Problemas – Tema 4

Problemas resueltos - 12 - rango de vectores en función de un parámetro

1. Estudiar el rango de los vectores $\vec{u}=(1,-1,1)$, $\vec{v}=(2,1,a)$ y $\vec{w}=(0,3,1)$ en función del parámetro a .

Escribimos la matriz formada por los vectores.

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_2{}'=F_2-2F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & a-2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow F_3{}'=F_3-F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & a-2 \\ 0 & 0 & 3-a \end{pmatrix}$$ → ¿Cuánto vale el rango?

La primera fila tiene al menos un coeficiente no nulo. La segunda fila también tiene al menos un coeficiente no nulo, independientemente del parámetro a . Y la tercera fila tiene dos coeficientes nulo y una tercer coeficiente que depende del parámetro a .

¿Cómo resolver? En este ejemplo, estudiando qué valores del parámetro a hacen nulo los coeficientes de la diagonal principal. Aplicamos el mismo razonamiento que en sistema de ecuaciones por Gauss.

En nuestro ejemplo, en la tercera fila tenemos → $3-a=0 \rightarrow a=3$

Realizamos la siguiente discusión de casos:

- Si $a\neq 3 \rightarrow 3-a\neq 0$ → La tercera fila tiene al menos un coeficiente no nulo → Tendremos tres vectores linealmente independientes → El rango es 3 → Los tres vectores son Independientes

- Si $a=3$ → Sustituimos en la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → Obviamos la tercera fila →

→ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ → Tenemos dos vectores con al menos un coeficiente no nulo tras aplicar Gauss → Rango 2 → Los tres vectores son dependientes. Solo hay dos vectores independientes

2. Estudiar el rango de los vectores $\vec{u}=(1,a,3)$, $\vec{v}=(-1,2,3)$ y $\vec{w}=(-1,2,1)$ en función del parámetro a .

Escribimos la matriz formada por los vectores.

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_2{}'=F_2+F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 2+a & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow F_3{}'=F_3+F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 2+a & 6 \\ 0 & 2+a & 4 \end{pmatrix} \rightarrow F_3{}'=F_3-F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 2+a & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Cuánto vale el rango? Estudiamos los coeficientes de la diagonal principal que pueden anularse según el parámetro a . Y encontramos en la segunda fila → $2+a=0 \rightarrow a=-2$.

Realizamos la siguiente discusión de casos.

- Si $a\neq-2$ → Tendremos tres filas no nulas → Rango 3 → Tres vectores independientes

- Si $a=-2$ → Sustituimos en la matriz → $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ → Las filas segunda y tercera son proporcionales → Podemos obviar una fila → $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ → Rango 2 → Los tres vectores son dependientes. Solo hay dos vectores independientes.