Problemas sobre problemas de optimización y representación de funciones

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach CCSS	Derivadas	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo.
Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

La condición necesaria de extremo relativo es primera derivada igual a cero.

$$c' = 0 \rightarrow c' = e^{-t/2} + te^{-t/2}(-1/2) \rightarrow e^{-t/2} + te^{-t/2}(-1/2) = 0 \rightarrow e^{-t/2}(1 - \frac{t}{2}) = 0$$

La exponencial nunca se anula, por lo que la única solución posible resulta:

$1 - \frac{t}{2} = 0 \rightarrow t = 2\ horas \rightarrow$ punto crítico

Aplicamos la condición suficiente evaluando el signo de la segunda derivada en el punto crítico.

$$c'' = e^{-t/2}(-1/2) + e^{-t/2}(-1/2) + te^{-t/2}(1/4)$$

$c''(2) = \frac{-e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1}}{2} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{-e^{-1}}{2} < 0 \rightarrow t = 2\ horas$ es un máximo relativo

La concentración que se alcanza en el momento de máximo relativo será la imagen de la función $c(t)$ para $t = 2\ horas$.

$$c(2) = 2e^{-1} = \frac{2}{e} \simeq 0{,}74$$

La función $c(t)$solo presenta un extremo relativo, por lo que al ser continua en toda la recta real por ser producto de polinomio y exponencial, el máximo relativo también será absoluto. Como la concentración máxima resulta $0{,}74\,mg/ml < 1\,mg/ml$, en ningún momento hay riesgo para el paciente.

PROBLEMA 2

El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado lugar viene dado por la función siguiente:

$$\boldsymbol{Q(t) = \frac{-t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10}$$

Donde t es el tiempo en días que va desde t=1 (lunes) hasta t=8 (lunes de la semana siguiente).

a) Determina en qué día de la semana llovió más y en qué día llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió esos días?

b) Representa gráficamente la función durante los 8 días.

a) Los días en los que llovió más y en los que llovió menos, dentro de un intervalo, son los extremos absolutos. Para obtenerlos, debemos calcular la imagen de los extremos del intervalo y la imagen de los extremos relativos.

$Q' = \frac{-3}{8}t^2 + 3t - \frac{9}{2} \rightarrow Q' = 0 \rightarrow t = 2,\ t = 6$ puntos críticos

$Q'' = \dfrac{-3}{4}t + 3$

$Q''(2) > 0 \rightarrow t = 2$ es un mínimo relativo $\rightarrow$ coordenadas $(2, Q(2)) = (2,6)$

$Q''(6) < 0 \rightarrow t = 6$ es un máximo relativo $\rightarrow$ coordenadas $(6, Q(6)) = (6,10)$

Evaluamos los extremos del intervalo en la función.

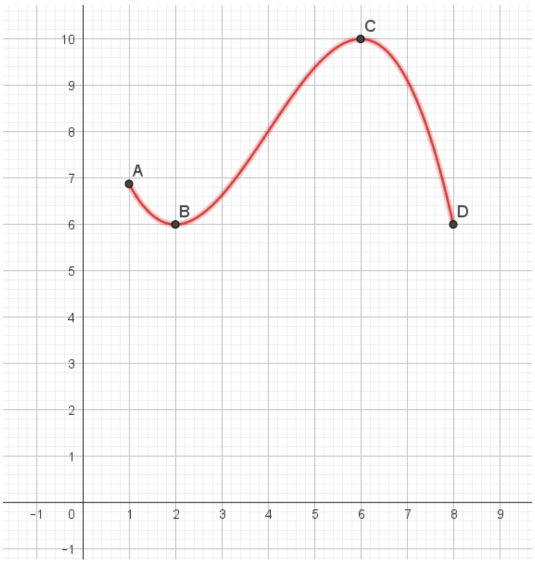
$(1, Q(1)) = (1,6{,}875)$

$(8, Q(8)) = (8,6)$

El día de mayor precipitación (máximo absoluto) es $t = 6$ (sábado), con una lluvia de 10 litros por metro cuadrado.

El día de menor precipitación (mínimo absoluto) es $t = 2$ (martes) y $t = 8$ (lunes de la otra semana), ambos con 6 litros por metro cuadrado.

b) La función es polinómica. Por lo que es continua en toda la recta real. Tenemos los valores de las imágenes en el inicio y en el fin del intervalo [1,8] y en los extremos relativos. Conocemos también los extremos absoluto. La función es suave por ser polinómica y no presenta asíntotas por ser un polinomio.



PROBLEMA 3

Los beneficios de una empresa en sus primeros 8 años de vida, en millones de euros, vienen dados por la función:

$$\boldsymbol{B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9}$$

Donde t es el tiempo transcurrido en años.

a) Estudia la monotonía y los extremos de $B(t)$.

b) Representa gráficamente la función en el intervalo [0, 8] y explicar en este intervalo la evolución de los beneficios.

a) El dominio de la función es toda la recta real, por ser un polinomio. Derivamos para estudiar la monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento).

$$B' = \frac{3t^2}{4} - 6t$$

La condición necesario de extremo relativo es primera derivada nula.

$$B' = 0$$

$$\frac{3t^2}{4} - 6t = 0$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = 8$$

Tenemos dos puntos críticos. Evaluamos el signo de la derivada en el interior de los siguientes intervalos:

$$(-\infty, 0) \to por\ ejemplo\ t = -10 \to B'(1-10) = \frac{300}{4} + 60 > 0 \to B\ estrictamente\ creciente$$

$$(0{,}8) \to por\ ejemplo\ t = 1 \to B'(1) = \frac{3}{4} - 6 < 0 \to B\ estrictamente\ decreciente$$

$$(8, +\infty) \to por\ ejemplo\ t = 10 \to B'(10) = \frac{300}{4} - 60 > 0 \to B\ estrictamente\ creciente$$

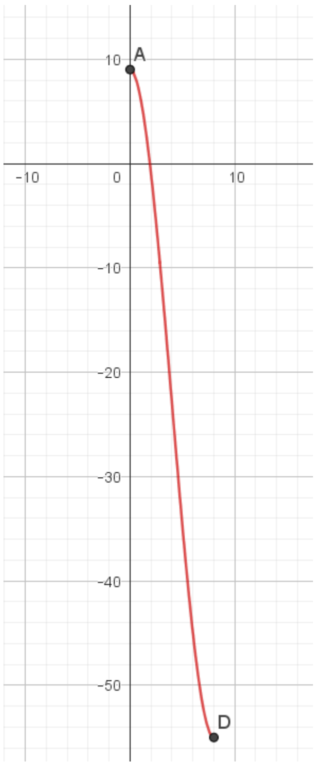
Por lo tanto, en $t = 0$ encontramos un máximo relativo y en $t = 10$ un mínimo relativo.

b) Si acotamos el estudio de la gráfica al intervalo [0,8] los extremos relativos se convierten en absolutos, con imágenes:

$$B(t = 0) = 9\ millones\ de\ euros$$

$$B(t = 8) = -55\ millones\ de\ euros$$

El máximo de beneficios se obtiene para el instante inicial $t = 0$, decayendo la gráfica hasta llegar a unas perdidas de 55 millones de euros en $t = 8\ años$ (gráfica estrictamente decreciente en el intervalo $(0{,}8)$).



PROBLEMA 4

Una empresa que fabrica bolsos estima que los costes de producción para x unidades son:

$$C(x) = 0.2x^2 - 50x + 2500$$

Si cada bolso se vende a 90 euros, se pide:

a) Determinar la función beneficio (ingresos menos coste) en función de x (número de unidades producidas), asumiendo que se vende todo lo que se produce.

b) ¿Cuántas unidades deben venderse para que los beneficios sean máximos?

c) Hallar el valor de dichos beneficios máximos.

a) El beneficio es la resta de los ingresos menos los costes.

Ingreso: $90x$

Costes: $C(x)$

Función beneficio:

$$B(x) = 90x - (0.2x^2 - 50x + 2500)$$

$$B(x) = -0.2x^2 + 130x - 2500$$

b) Optimizamos esta función, calculando su derivada. Como es un polinomio, su dominio es toda la recta real. Aunque solo tiene sentido físico para valores de x positivos (no tiene sentido una fabricación negativa de bolsos).

$$B' = -0.4x + 130$$

$$B' = 0$$

$$-0.4x + 130 = 0$$

$$x = 325\ unidades\ (punto\ crítico)$$

Evaluamos el punto crítico en la segunda derivada:

$$B'' = -0.4$$

$$B''(x = 325) = -0.4 < 0$$

Como la segunda derivada evaluada en el punto crítico es negativa, significa que el punto crítico $x = 325$ es un máximo relativo. Como es el único extremos relativo de la función, también será máximo absoluto.

c) El beneficio máximo se obtiene con la imagen en la función $B(x)$ del valor $x = 325$.

$$B(x) = -0.2x^2 + 130x - 2500$$

$$B(325) = -0.2(325)^2 + 130(325) - 2500 \rightarrow B(325) = 18.625€$$

PROBLEMA 5

En una granja dedicada a la cría de pollos, el peso de los mismos en función de la edad viene dado por la función:

$$P(x) = \begin{cases} -x^2 + bx & si\ 0 \leq x \leq 21 \\ c & si\ x > 21 \end{cases}$$

Donde x representa la edad en días y P el peso en gramos. Se sabe que la función es continua y que a los 14 días un pollo pesa 2198 gramos.

a) Determinas las constantes b y c.

b) Representar gráficamente el peso en función de x.

a) La función debe ser continua en los puntos frontera.

$$\exists f(21) = -(21)^2 + b(21) \rightarrow f(21) = -441 + 21b$$

$$L^- = -441 + 21b$$

$$L^+ = c$$

$$L^- = L^+ = L \rightarrow -441 + 21b = c$$

$$f(21) = L \rightarrow -441 + 21b = -441 + 21b\ (Tautología)$$

Sabemos que para $x = 14$ la imagen vale 2198 gramos:

$$f(14) = 2198 \rightarrow -(14)^2 + b(14) = 2198 \rightarrow -196 + 14b = 2198 \rightarrow b = 171$$

Sustituyendo en la condición de continuidad:

$$-441 + 21(171) = c$$

$$c = 3150$$

b) La función queda $P(x) = \begin{cases} -x^2 + 171x & si\ 0 \leq x \leq 21 \\ 3150 & si\ x > 21 \end{cases}$

En el intervalo [0,21] tenemos una parábola cóncava. A partir de los 21 días, tenemos una recta horizontal.

El vértice de la parábola lo obtenemos con: $x_{vértice} = -\frac{b}{2a} = \frac{-171}{2(-1)} = 85.5$. Este valor del vértice queda fuera del intervalo [0,21]. En este intervalo la gráfica será estrictamente creciente, por ser anterior al vértice de la parábola cóncava (que sería un máximo relativo).