Integral, Integralfunktion, Hauptsatz

Information 1
Wir untersuchen zunächst Funktion mit $f(x) \geq 0$ auf [a, b].
Wenn der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse auf [a, b] ermittelt werden soll und nicht sofort elementar berechnet werden kann, so schachtelt man die Fläche zwischen n-ter Untersumme und n-ter Obersumme ein. n kann über einen Schieberegler verändert werden und legt fest, in wieviel Streifen die Fläche unterteilt werden soll.
Die n-te Unter- und Obersumme nähert sich dann (bei genügend gutartigen Funktionen) aneinander an. Der gemeinsame Grenzwert wird dann **Integral** von f in den Grenzen von a und b bezeichnet.
Schreibweise: $\int_a^b f(x)dx$.

Mit der Trapezsumme als Mittelwert von Untersumme und Obersumme kommt man schneller zu stabilen Werten.

Information 2
Wenn f(x) auch negativ sein kann, bekommen wir bei Unter- und Obersumme auch negative Werte. Die Flächeninhaltsvorstellung wird dann schwieriger (man müsste negative Flächen zulassen). Naheliegender ist der Vergleich mit einem Konto: Zahlungseingänge sind ‚schwarze' Zahlen, positiv, Abbuchungen sind ‚rote' Zahlen, negativ. Das Integral summiert dann die positiven und negativen Änderungen auf (man spricht auch von Kumulation) und bildet die **Bilanz**.

Information 3
Jetzt halten wir die rechte Grenze b nicht mehr fest, sondern nehmen eine variable Grenze x (dann sollte man die Funktionsvariable in t umbenennen, damit es nicht Konflikte zwischen zwei verschiedenen x gibt): $\int_a^x f(t)dt$.
Damit können wir einen Punkt I definieren mit I = (x, $\int_a^b f(x)dx$).

Diesen Punkt können wir eine Ortslinie zeichnen lassen und erhalten damit die Integralkurve. Die zugehörige Funktion ist dann die **Integralfunktion**.
I(x) = $\int_a^b f(x)dx$. Wenn wir so die Integralkurve zeichnen lassen, sprechen wir von einem Integraphen (im vorigen Jahrhundert ein mechanisches Gerät).

Information 4
Wir können auch Funktionen integrieren, die eine gewisse Anzahl von Sprungstellen haben (sogenannte Treppenfunktionen).
Dabei stellen wir fest, dass die Integralfunktion dann an den Sprungstellen von f nicht differenzierbar ist/ die Integralkurve eine Knickstelle hat.

Information 5
Funktionen, deren Graph man ohne Sprungstellen ‚in einem Zug' durchzeichnen kann, nennt man anschaulich-stetig.
Der volle Begriff der Stetigkeit ist noch komplizierter. Für unsere Zwecke zum anschaulichen Einstieg in die Integralrechnung reicht aber die Vorstellung der anschaulichen Stetigkeit erst mal aus.

Information 6
Wenn man bei anschaulich-stetigen Funktionen erst die Integralfunktion bildet und diese dann noch mal ableitet, erhält man wieder die Ausgangsfunktion f.
Anders gesagt: Die Integralfunktion ist in diesem Fall auch eine Stammfunktion von f. Das ist der Inhalt des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung.

Information 7
Eine wichtige mathematische Folgerung: Statt mit Produktsummen und Grenzwerten zu integrieren, kann man mit Stammfunktionen rechnen.
Ist eine Funktion f anschaulich-stetig, so hat sie eine Stammfunktion F und es gilt:
$\int_a^b f(x)dx$ = F(b) – F(a). Auch kann man damit aus den Ableitungsregeln dann Integrationsregeln herleiten. Das ist hier aber nicht unser Thema.

Information 8
Mit Werkzeugen wie GeoGebra können wir heutzutage mit Grafikrechner oder CAS einfach Integrale berechnen: $\int_a^b f(x)dx$ = Integral(f, a, b).

Mit CAS können wie sogar die Integralfunktion ermitteln:
$\int_a^x f(t)dt$:= Integral(f, a, x) (*Achtung: bei CAS ist* := *erforderlich*).