Complexe getallen

Karel Appeltans

8 december 2024

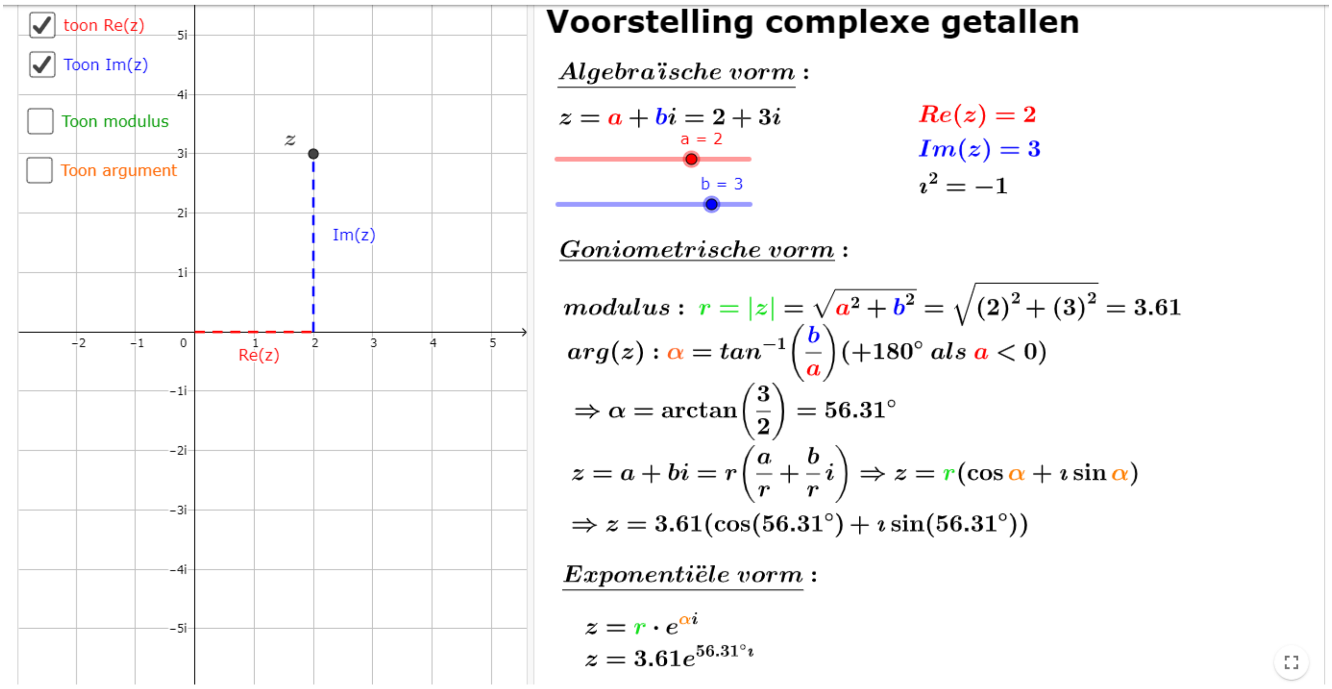
1 Inleiding

In 1545(!) publiceerde Cardano (Italiaans wiskundige) het wiskundeboek 'Ars Magna'. Onder andere volgend vraagstuk werd besproken: zoek twee getallen waarvan de som 10 is en het product 40. Kan jij ze vinden?

Meer over de oorsprong (en inleiding) van de complexe getallen in volgend filmpje http://www.dimensions-math.org/Dim_regarder_NL.htm (hoofdstuk 5)

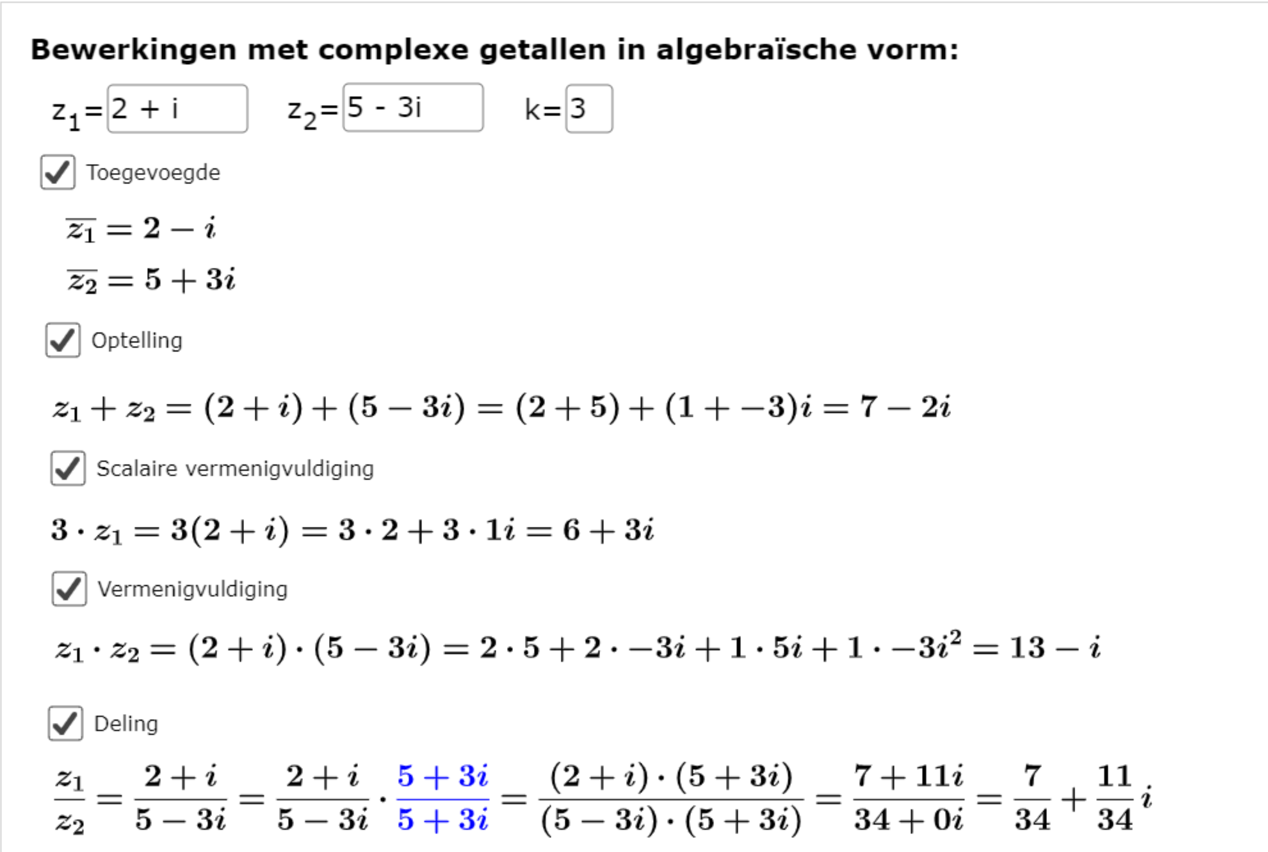
2 Algebraïsche vorm

2.1 Voorstelling complex getal in Argand-vlak



Figuur 1: https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3

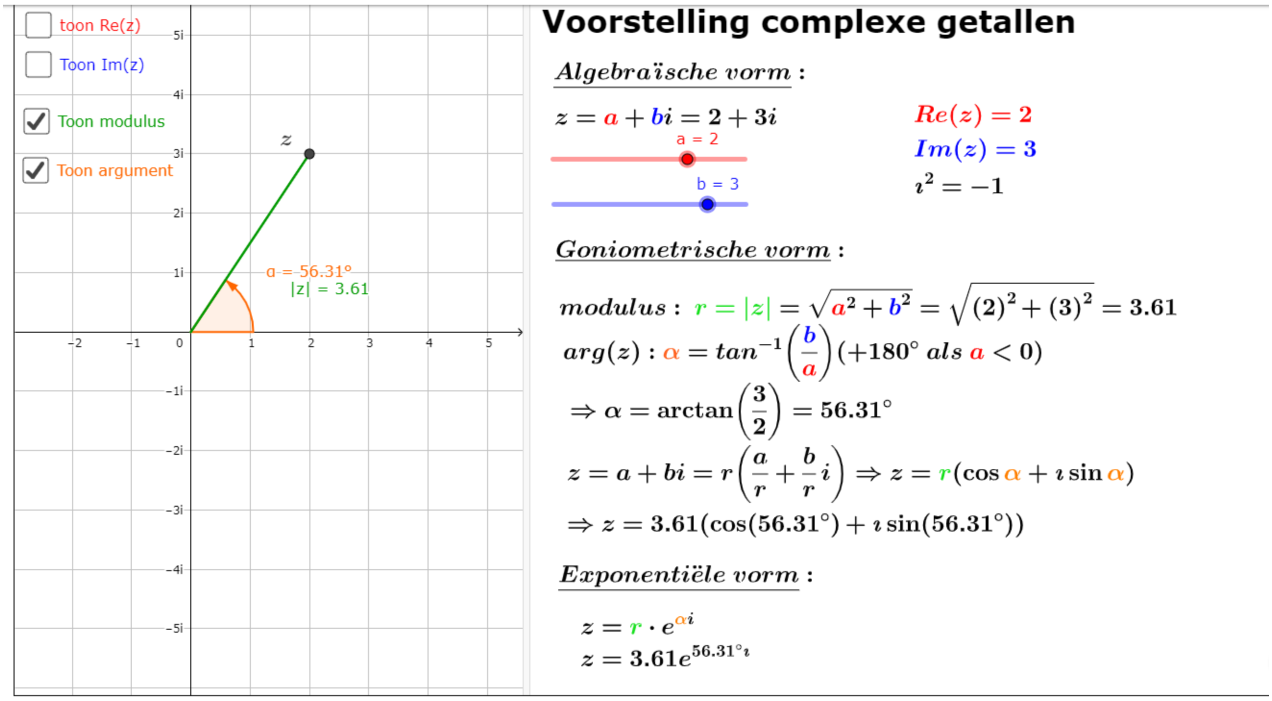
2.2 Bewerkingen



Figuur 2: https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3

3 goniometrische en exponentiële vorm

3.1 Voorstelling complex getal in Argand-vlak



Figuur 3: https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3

3.2 van goniometrische naar exponentiële vorm

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) + \sin(x)i \\ \Rightarrow f'(x) &= -\sin(x) + \cos(x)i \\ f'(x) &= i^2\sin(x) + \cos(x)i \\ f'(x) &= i\left[\cos(x) + \sin(x)i\right] \\ f'(x) &= i\,f(x) \\ f(x) &= 1 \cdot e^{ix} = e^{ix} \end{aligned}$$

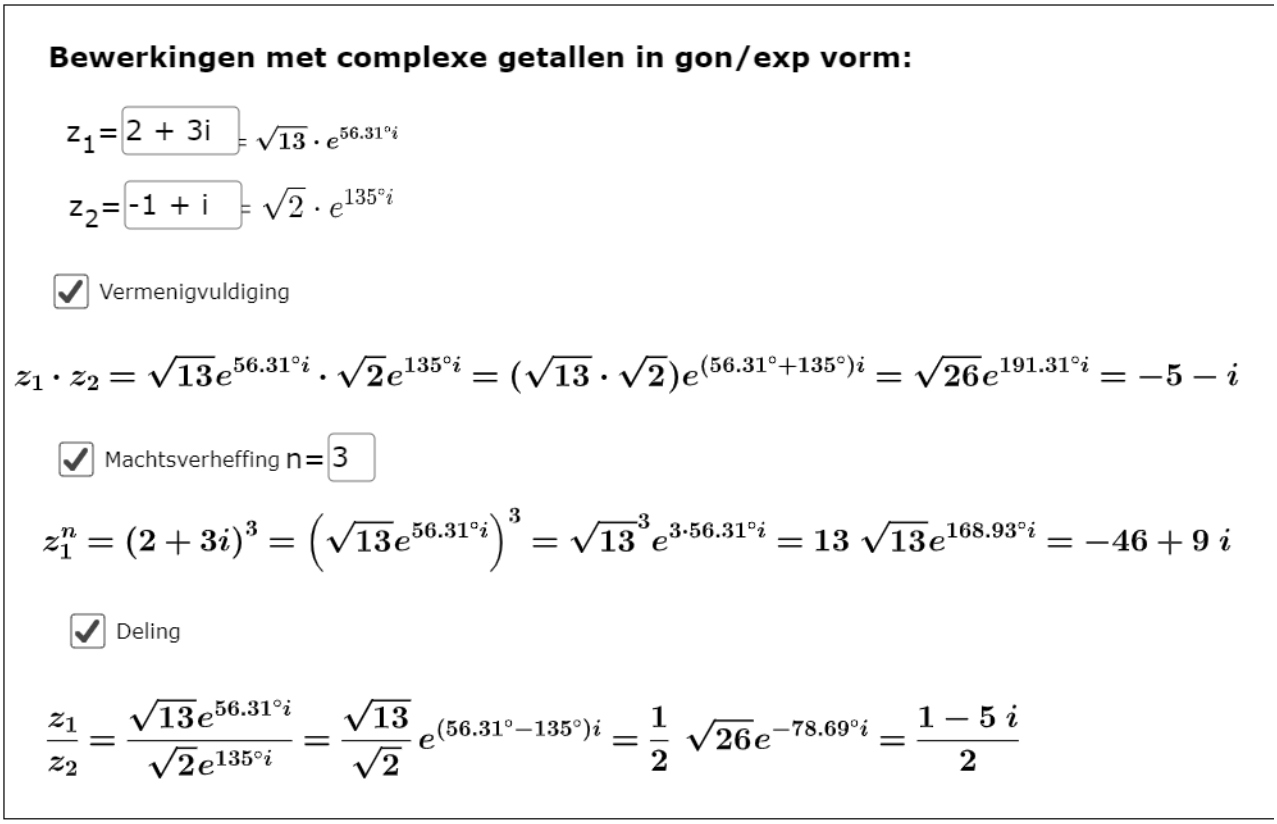
$$f(0) = \cos(0) + \sin(0)i = 1 + 0 = 1$$

$$y' = ky \Rightarrow y = y_0e^{kt}$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

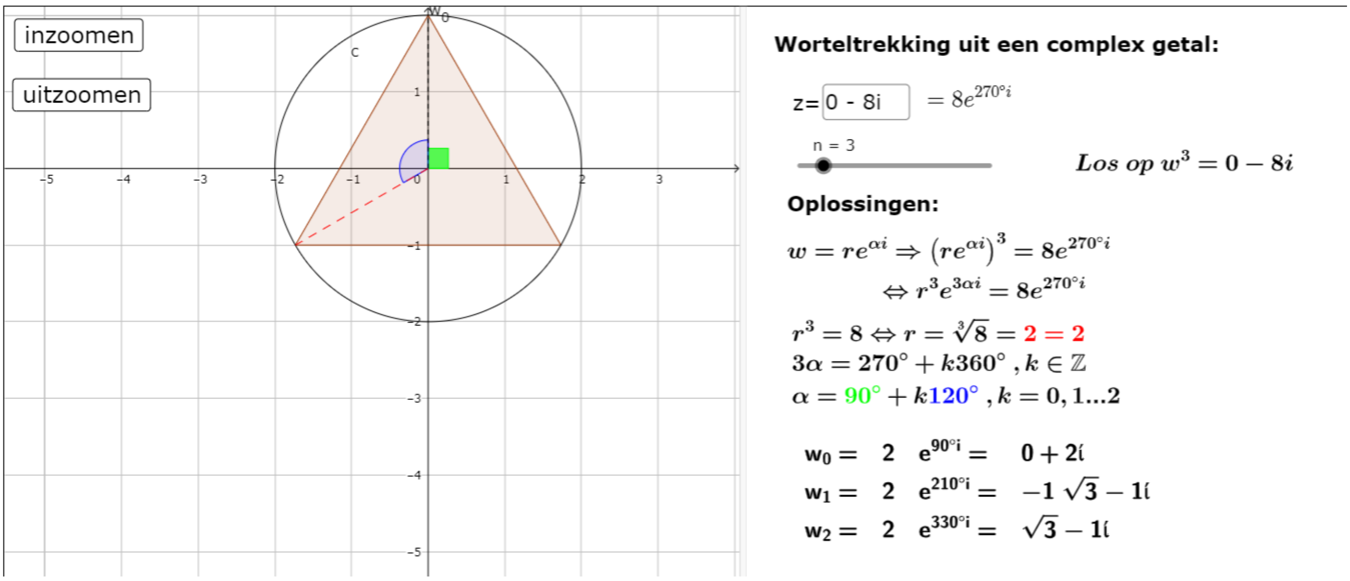
3.3 bewerkingen

3.3.1 basisbewerkingen



Figuur 4: https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3

3.3.2 worteltrekking



Figuur 5: https://www.geogebra.org/m/a9TNGhWs

4 Veeltermen over C

4.1 reële coëfficiënten

Voorbeeld 1: $f(z) = z^2 + z + 1$
Voorbeeld 2: $f(z) = z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 12z + 8$ met gegeven $f(2i) = 0$

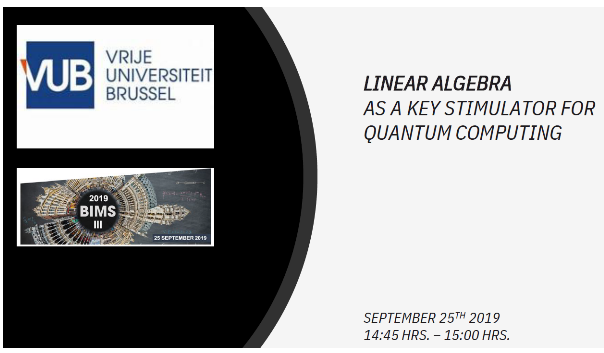
4.2 complexe coëfficiënten

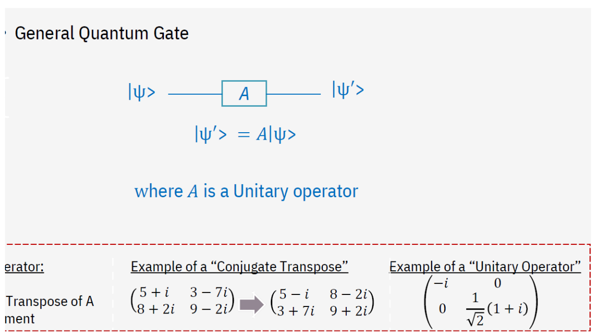
Voorbeeld 1: $f(z) = z^2 + (3 - i)z + 2 - i$
Voorbeeld 2: $f(z) = z^3 + 4(1 - i)z^2 - 2(2 + 7i)z - 16 + 8i$ met gegeven dat er een reële oplossing is.

5 Meetkundige plaatsen

Figuur 6: https://www.geogebra.org/m/cprfsqvu

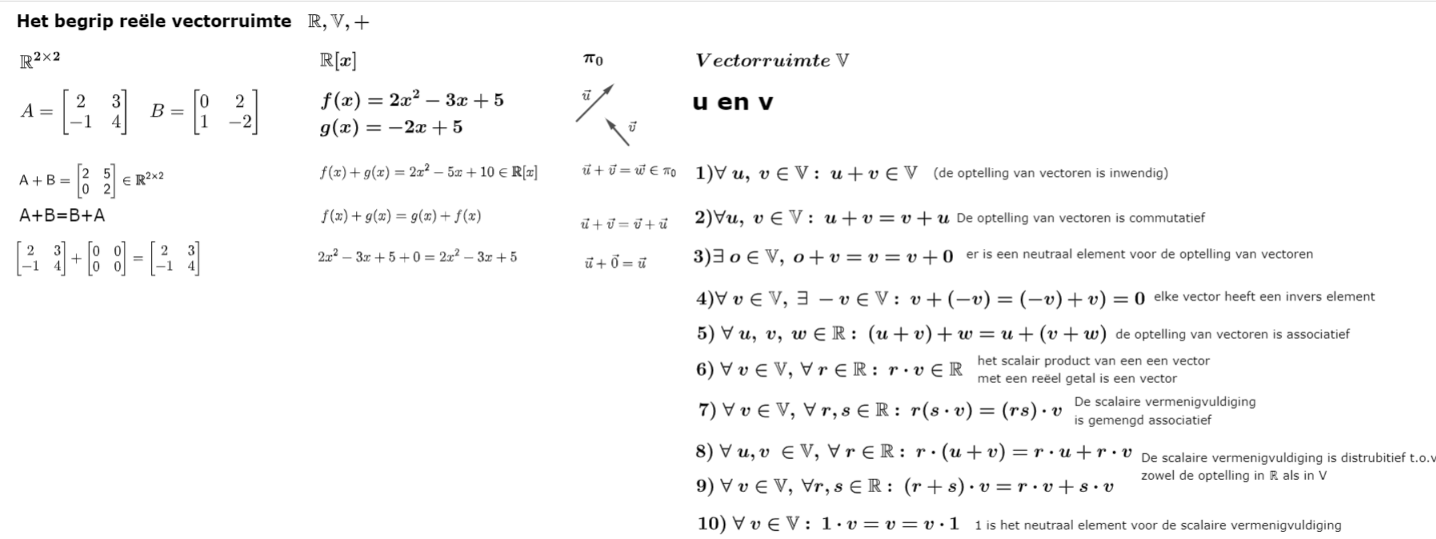
6 Complexe getallen vandaag





7 Vectorruimte

$(\mathbb{R}, \mathbb{C}, +)$ is een vectorruimte



Figuur 7: https://www.geogebra.org/material/edit/id/fgsz7ma5

8 Oefeningen

8.1 basisbewerkingen algebraïsche vorm

1. Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = -2 + 3i$ en $z_2 = 3 + 4i$. Bereken:
   (a) $z_1 + z_2$
   (b) $2z_1 + 5z_2$
   (c) $z_1 \cdot z_2$
   (d) $\frac{z_1}{z_2}$
2. Bepaal de modulus van $z = \frac{16-48i}{8+4i}$. (A. $|z| = 4\sqrt{2}$)
3. Bepaal z zodat
   (a) $3iz + 2\bar{z} = 7 + 8i$
   (b) $(1 + 2i)z - \bar{z}$=10(2+i)
   (c) 3z=(2+i)z+2 (A. $z = a + 1i$)
4. Toon aan dat $z_1 = \frac{1}{2} - i$ en $z_2 = \frac{1}{2} + i$ oplossingen zijn van $z^2 + \bar{z} + \frac{1}{4} = 0$
5. De complexe getallen z_1,z_2 en z_3 voldoen aan de vergelijking $\frac{2}{z_1} = \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$. Bepaal z_1 als $z_2 = 2 + 3i$ en $z_3 = 3 - 2i$
6. Bepaal $a \in \mathbb{C}$ zodat volgende vergelijking geldt:
$$\frac{-1+i}{2} + \frac{1-a}{1+i} = \frac{1+2ai}{1-i}$$
   (A. a=i)
7. Bepaal c_{12} als $C = A \cdot B$ met $A = \begin{bmatrix} 2+3i & 2 \\ 0 & 1-7i \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 5-7i & 1-i \\ 0 & 3i \end{bmatrix}$ (Antw. $5 + 7i$)
8. Bepaal $|A|$ als $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3-i & 0 \\ 3+i & 2+i & 0 \\ 1 & 1 & i \end{bmatrix}$
9. Los op (x en y zijn complexe getallen):

(a) $\begin{cases} ix + 2y = 1 - 2i \\ 4x - iy = -1 + 3i \end{cases}$ (Antw: $x = i$ en $y = 1 - i$)

(b) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + (1-i)y & = & 2 \\ (1-2i)x + 2y & = & -1 + 2i \end{array} \right.$ (Antw: $x = -i$)

10. Bepaal A^{-1} als $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$

11. Noem y en z twee complexe getallen die voldoen aan $y + z = 3 - i$ en $\frac{z}{y} = 1 + i$. Bepaal de modulus van z (A. $|z| = 2$)

12. Als $z \neq 0$ een complex getal is dan geldt

    (a) als $Re(z) = 0 \Rightarrow Im(z^2) = 0$

    (b) als $Re(z^2) = 0 \Rightarrow Im(z^2) = 0$

    (c) als $Re(z) = 0 \Rightarrow Re(z^2) = 0$

    (d) geen van voorgaande beweringen is juist

13. Toon aan dat $G = \{1, -1, i, -i\}, \cdot$ een groep is.

8.2 Basisbewerkingen goniometrische/exponentiële vorm

1. Bepaal modulus, argument en goniometrische/exponentiële vorm van de volgende complexe getallen.

    (a) $z = 1$

    (b) $z = 4i$

    (c) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. Gegeven is $z = 4\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ en $w = 1 - i\sqrt{3}$. Bepaal

    (a) $\left|\frac{z}{w}\right|$

    (b) $arg\left(\frac{z}{w}\right)$

3. Schrijf $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8 + \left(\frac{\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$ in de vorm $a + bi$

4. We beschouwen het complex getal $z = \frac{(\sqrt{3}+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^2}$ dan is de som s van het reëel deel van z en het imaginair deel van z gelijk aan (A. s=-4)

8.3 Veeltermen over $\mathbb{C}$

1. Stel dat α en β twee complexe wortels zijn van de vergelijking $z^2 + z + 1 = 0$. Welke vergelijking hieronder heeft dan α^{19} en β^7 als wortels?

    (a) $z^2 - z - 1 = 0$

    (b) $z^2 - z + 1 = 0$

    (c) $z^2 + z - 1 = 0$

    (d) $z^2 + z + 1 = 0$

2. De veelterm $z^3 + 10z^2 + 35z + 44$ heeft als wortel $-3 + \sqrt{2}i$. Bepaal de andere wortels.

3. De veelterm $2z^3 - 15z^2 + bz - 30 = 0$ heeft als oplossing $z = 3 + i$. Bepaal de waarde van b en de andere wortels.

4. Gegeven is dat 2 en $5 + 2i$ wortels zijn van de vergelijking $z^3 - 12z^2 + cz + d = 0$ met c en d reële getallen.

    (a) Bepaal de derde wortel van deze vergelijking

    (b) Bepaal de waarden van c en d

(c) Stel deze wortels voor in het Arganddiagram

5. Als gegeven is dat $3-2i$ een oplossing is van $z^4-6z^3+19z^2-36z+78=0$ bepaal dan de andere oplossingen.
6. Bepaal alle oplossingen van volgende vergelijking als je weet dat er een zuiver imaginaire oplossing is. $z^4-2z^3+7z^2-4z+10=0$
7. Los volgende vierkantsvergelijkingen op:
   (a) $z^2+(1-2i)z+1+5i=0$
   (b) $z^2-4z+5=0$
   (c) $iz^2+(1-5i)z-1+8i=0$
   (d) $(1+i)z^2+(3-7i)z-10=0$
8. Beschouw volgende vierkantsvergelijking $z^2-(5+2i)z+(5+5i)=0$ in de complex veranderlijke z met oplossingen z_1 en z_2. Bepaal $|z_1-z_2|$. (A. 1)
9. Gegeven is de vergelijking $z^2+(4+i+qi)z+20=0$ met als oplossingen w en $\overline{w}$
   (a) Als q een reëel getal is, verklaar dan waarom $q=-1$ moet zijn.
   (b) als $w=p+2i$ met p een reëel getal, bepaal dan de mogelijke waarde(n) voor q.
10. Los volgende binomiaalvergelijkingen op:
    (a) $z^3-64=0$
    (b) $z^2+16-30i=0$
    (c) $z^3=1$
    (d) $z^4=1-\sqrt{3}i$
11. Het imaginaire getal $8i$ heeft drie verschillende derdemachtswortels. Twee ervan zijn $-2i$ en $\sqrt{3}+i$. Wat is de derde derdemachtswortel?
    (a) $\sqrt{3}-i$
    (b) $-\sqrt{3}-i$
    (c) $-\sqrt{3}+i$
    (d) $2i$

8.4 Meetkundige plaatsen

1. Als $z\in\mathbb{C}$ zodat $|z-i|\leq 1$, wat kan je dan zeker zeggen?
   (a) $Arg(z)\in[0,\pi]$ en $|z|\in[0,2]$
   (b) $Arg(z)\in[\pi,2\pi]$ en $|z|\in[1/2,3/2]$
   (c) $Arg(z)\in[\pi/2,3\pi/2]$ en $|z|\in[1,2]$
   (d) $Arg(z)\in[0,2\pi]$ en $|z|\in[0,1]$
2. Bepaal de MP van alle complexe getallen z die voldoen aan $|z-2|=|z+4i|$. Bepaal tussen al deze getallen die z met de kleinste modulus.
3. Gegeven $|z-4i|\leq 2$
   (a) Arceer het gebied in het Arganddiagram waarvoor deze vergelijking opgaat
   (b) Bepaal het bereik van de mogelijke waarden voor arg(z) waarvoor deze vergelijking opgaat
4. Een cirkel C en een halfrechte L hebben respectievelijk als vergelijking:

$$|z-2\sqrt{3}-i|=4 \; en \; arg(z+i)=\frac{\pi}{6}$$

   (a) toon aan:
      i. De cirkel gaat door het punt waar z=-i
      ii. De halfrechte gaat door het middelpunt van de cirkel
   (b) schets de cirkel en de halfrechte in het Argandvlak
   (c) Arceer het gebied dat voldoet aan $|z-2\sqrt{3}-i|\leq 4$ en $0\leq arg(z+i)\leq\frac{\pi}{6}$