

# Complexe getallen

Karel Appeltans

8 december 2024

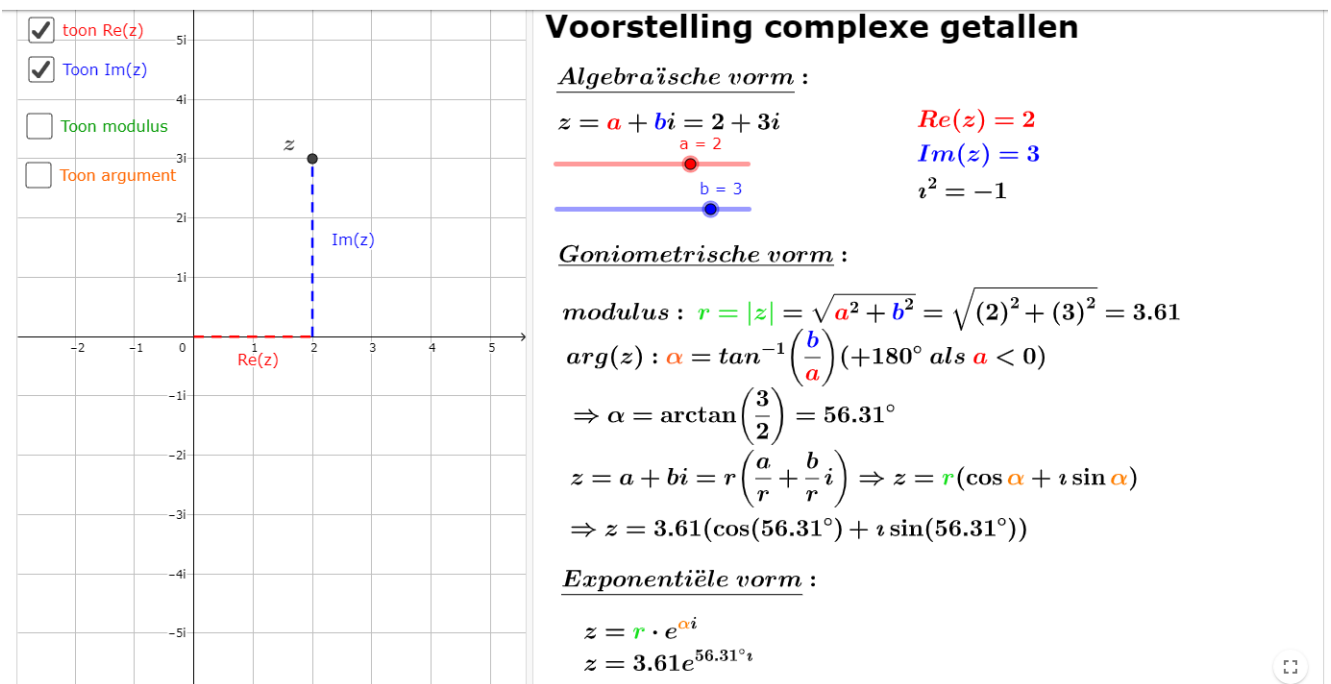
## 1 Inleiding

In 1545(!) publiceerde Cardano (Italiaans wiskundige) het wiskundeboek 'Ars Magna'. Onder andere volgend vraagstuk werd besproken: zoek twee getallen waarvan de som 10 is en het product 40. Kan jij ze vinden?

Meer over de oorsprong (en inleiding) van de complexe getallen in volgend filmpje [http://www.dimensions-math.org/Dim\\_regarder\\_NL.htm](http://www.dimensions-math.org/Dim_regarder_NL.htm) (hoofdstuk 5)

## 2 Algebraïsche vorm

### 2.1 Voorstelling complex getal in Argand-vlak



Figuur 1: <https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3>

## 2.2 Bewerkingen

### Bewerkingen met complexe getallen in algebraïsche vorm:

$$z_1 = 2 + i \quad z_2 = 5 - 3i \quad k = 3$$

Toegevoegde

$$\overline{z_1} = 2 - i$$

$$\overline{z_2} = 5 + 3i$$

Optelling

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (5 - 3i) = (2 + 5) + (1 + -3)i = 7 - 2i$$

Scalaire vermenigvuldiging

$$3 \cdot z_1 = 3(2 + i) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1i = 6 + 3i$$

Vermenigvuldiging

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + i) \cdot (5 - 3i) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot -3i + 1 \cdot 5i + 1 \cdot -3i^2 = 13 - i$$

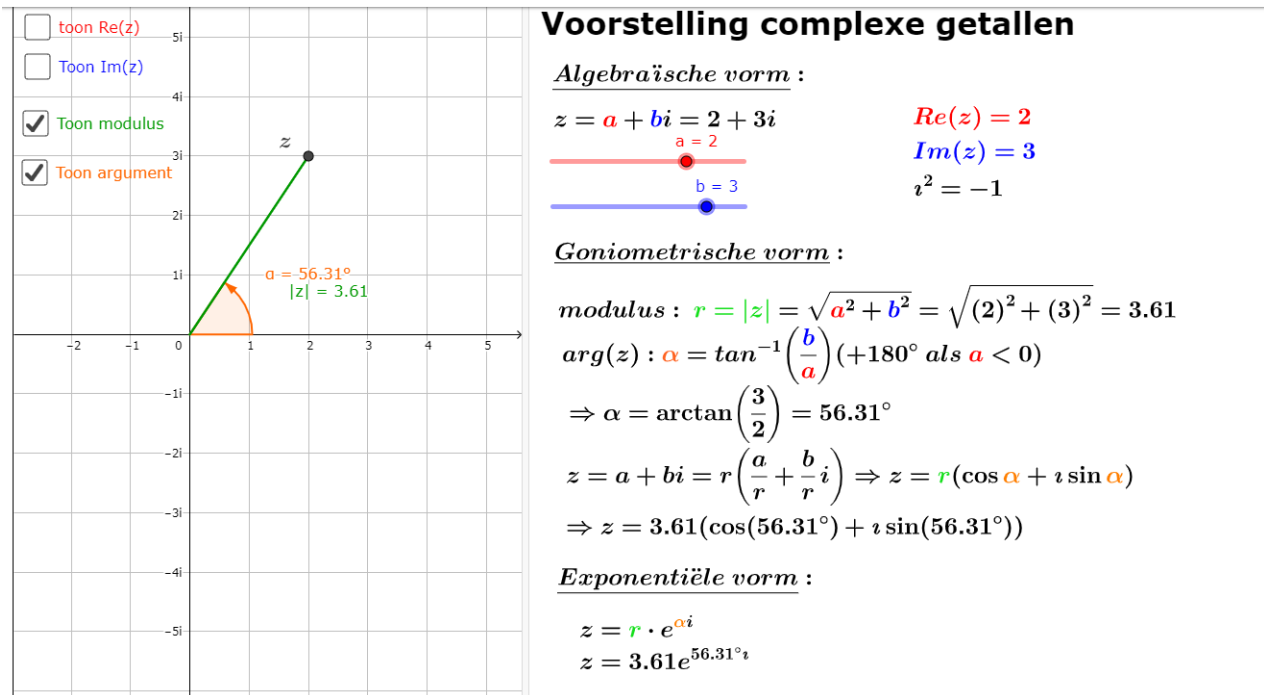
Deling

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i}{5 - 3i} = \frac{2 + i}{5 - 3i} \cdot \frac{5 + 3i}{5 + 3i} = \frac{(2 + i) \cdot (5 + 3i)}{(5 - 3i) \cdot (5 + 3i)} = \frac{7 + 11i}{34 + 0i} = \frac{7}{34} + \frac{11}{34}i$$

Figuur 2: <https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3>

### 3 goniometrische en exponentiële vorm

#### 3.1 Voorstelling complex getal in Argand-vlak



Figuur 3: <https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3>

#### 3.2 van goniometrische naar exponentiële vorm

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cos(x) + \sin(x)i & f(0) &= \cos(0) + \sin(0)i = 1 + 0 = 1 \\
 \Rightarrow f'(x) &= -\sin(x) + \cos(x)i \\
 f'(x) &= i^2 \sin(x) + \cos(x)i \\
 f'(x) &= i[\cos(x) + \sin(x)i] \\
 f'(x) &= i f(x) & y' &= ky \Rightarrow y = y_0 e^{kt} \\
 f(x) &= 1 \cdot e^{ix} = e^{ix} \\
 e^{ix} &= \cos(x) + i \sin(x)
 \end{aligned}$$

### 3.3 bewerkingen

#### 3.3.1 basisbewerkingen

**Bewerkingen met complexe getallen in gon/exp vorm:**

$z_1 = 2 + 3i = \sqrt{13} \cdot e^{56.31^\circ i}$

$z_2 = -1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{135^\circ i}$

Vermenigvuldiging

$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{13}e^{56.31^\circ i} \cdot \sqrt{2}e^{135^\circ i} = (\sqrt{13} \cdot \sqrt{2})e^{(56.31^\circ + 135^\circ)i} = \sqrt{26}e^{191.31^\circ i} = -5 - i$

Machtsverheffing  $n=3$

$z_1^n = (2 + 3i)^3 = (\sqrt{13}e^{56.31^\circ i})^3 = \sqrt{13}^3 e^{3 \cdot 56.31^\circ i} = 13 \sqrt{13}e^{168.93^\circ i} = -46 + 9i$

Deling

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{13}e^{56.31^\circ i}}{\sqrt{2}e^{135^\circ i}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} e^{(56.31^\circ - 135^\circ)i} = \frac{1}{2} \sqrt{26}e^{-78.69^\circ i} = \frac{1 - 5i}{2}$

Figuur 4: <https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3>

#### 3.3.2 worteltrekking

inzoomen

uitzoomen

**Worteltrekking uit een complex getal:**

$z = 0 - 8i = 8e^{270^\circ i}$

$n = 3$  *Los op  $w^3 = 0 - 8i$*

**Oplossingen:**

$w = re^{\alpha i} \Rightarrow (re^{\alpha i})^3 = 8e^{270^\circ i}$

$\Leftrightarrow r^3 e^{3\alpha i} = 8e^{270^\circ i}$

$r^3 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2 = 2$

$3\alpha = 270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = 90^\circ + k120^\circ, k = 0, 1, \dots, 2$

$w_0 = 2 e^{90^\circ i} = 0 + 2i$

$w_1 = 2 e^{210^\circ i} = -1\sqrt{3} - 1i$

$w_2 = 2 e^{330^\circ i} = \sqrt{3} - 1i$

Figuur 5: <https://www.geogebra.org/m/a9TNGhWs>

## 4 Veeltermen over $\mathbb{C}$

### 4.1 reële coëfficiënten

Voorbeeld 1:  $f(z) = z^2 + z + 1$

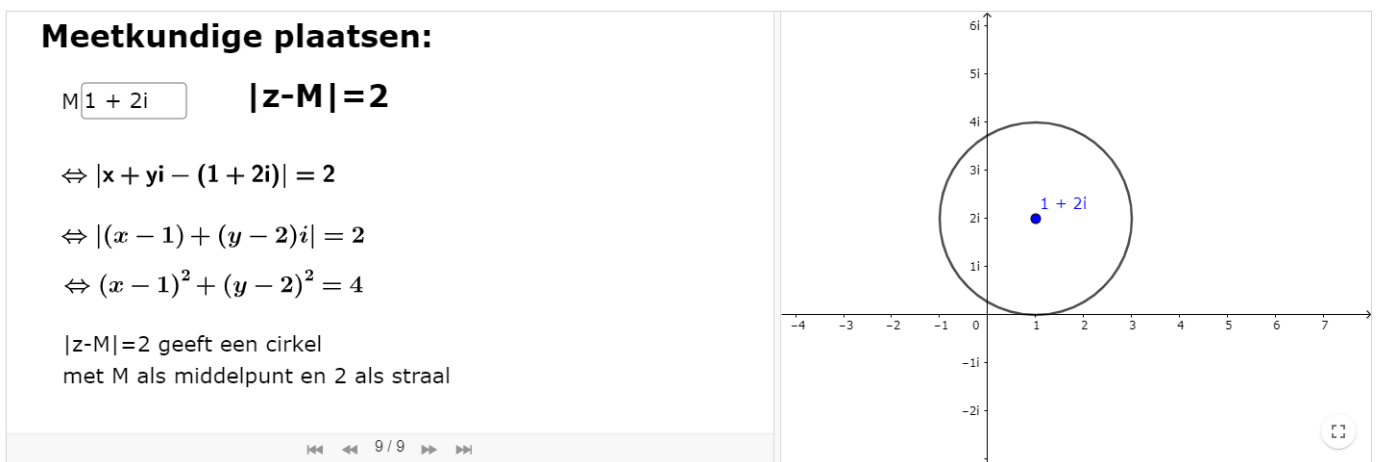
Voorbeeld 2:  $f(z) = z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 12z + 8$  met gegeven  $f(2i) = 0$

### 4.2 complexe coëfficiënten

Voorbeeld 1:  $f(z) = z^2 + (3 - i)z + 2 - i$

Voorbeeld 2:  $f(z) = z^3 + 4(1 - i)z^2 - 2(2 + 7i)z - 16 + 8i$  met gegeven dat er een reële oplossing is.

## 5 Meetkundige plaatsen



Figuur 6: <https://www.geogebra.org/m/cprfsqvu>

## 6 Complexe getallen vandaag

General Quantum Gate

$$|\psi\rangle \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow |\psi'\rangle$$

$$|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$$

where  $A$  is a Unitary operator

---

	Example of a "Conjugate Transpose"	Example of a "Unitary Operator"
operator: Transpose of A ment	$\begin{pmatrix} 5+i & 3-7i \\ 8+2i & 9-2i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-i & 8-2i \\ 3+7i & 9+2i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \end{pmatrix}$

## 7 Vectorruimte

$(\mathbb{R}, \mathbb{C}, +)$  is een vectorruimte

**Het begrip reële vectorruimte**  $\mathbb{R}, \mathbb{V}, +$

$\mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$A+B=B+A$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}[x]$

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

$$g(x) = -2x + 5$$

$$f(x) + g(x) = 2x^2 - 5x + 10 \in \mathbb{R}[x]$$

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$

$$2x^2 - 3x + 5 + 0 = 2x^2 - 3x + 5$$

$\pi_0$



$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \in \pi_0$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

**Vectorruimte  $\mathbb{V}$**

**u en v**

1)  $\forall u, v \in \mathbb{V} : u + v \in \mathbb{V}$  (de optelling van vectoren is inwendig)

2)  $\forall u, v \in \mathbb{V} : u + v = v + u$  De optelling van vectoren is commutatief

3)  $\exists o \in \mathbb{V}, o + v = v = v + o$  er is een neutraal element voor de optelling van vectoren

4)  $\forall v \in \mathbb{V}, \exists -v \in \mathbb{V} : v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0}$  elke vector heeft een invers element

5)  $\forall u, v, w \in \mathbb{R} : (u + v) + w = u + (v + w)$  de optelling van vectoren is associatief

6)  $\forall v \in \mathbb{V}, \forall r \in \mathbb{R} : r \cdot v \in \mathbb{R}$  het scalair product van een vector met een reëel getal is een vector

7)  $\forall v \in \mathbb{V}, \forall r, s \in \mathbb{R} : r(s \cdot v) = (rs) \cdot v$  De scalaire vermenigvuldiging is gemengd associatief

8)  $\forall u, v \in \mathbb{V}, \forall r \in \mathbb{R} : r \cdot (u + v) = r \cdot u + r \cdot v$  De scalaire vermenigvuldiging is distributief t.o.v. zowel de optelling in  $\mathbb{R}$  als in  $\mathbb{V}$

9)  $\forall v \in \mathbb{V}, \forall r, s \in \mathbb{R} : (r + s) \cdot v = r \cdot v + s \cdot v$

10)  $\forall v \in \mathbb{V} : \mathbf{1} \cdot v = v = v \cdot \mathbf{1}$  1 is het neutraal element voor de scalaire vermenigvuldiging

Figuur 7: <https://www.geogebra.org/material/edit/id/fgsz7ma5>

## 8 Oefeningen

### 8.1 basisbewerkingen algebraïsche vorm

1. Gegeven zijn de complexe getallen  $z_1 = -2 + 3i$  en  $z_2 = 3 + 4i$ . Bereken:

(a)  $z_1 + z_2$

(b)  $2z_1 + 5z_2$

(c)  $z_1 \cdot z_2$

(d)  $\frac{z_1}{z_2}$

2. Bepaal de modulus van  $z = \frac{16-48i}{8+4i}$ . (A.  $|z| = 4\sqrt{2}$ )

3. Bepaal z zodat

(a)  $3iz + 2\bar{z} = 7 + 8i$

(b)  $(1 + 2i)z - \bar{z} = 10(2+i)$

(c)  $3z = (2+i)z + 2$  (A.  $z = a + 1i$ )

4. Toon aan dat  $z_1 = \frac{1}{2} - i$  en  $z_2 = \frac{1}{2} + i$  oplossingen zijn van  $z^2 + \bar{z} + \frac{1}{4} = 0$

5. De complexe getallen  $z_1, z_2$  en  $z_3$  voldoen aan de vergelijking  $\frac{2}{z_1} = \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$ . Bepaal  $z_1$  als  $z_2 = 2 + 3i$  en  $z_3 = 3 - 2i$

6. Bepaal  $a \in \mathbb{C}$  zodat volgende vergelijking geldt:

$$\frac{-1+i}{2} + \frac{1-a}{1+i} = \frac{1+2ai}{1-i}$$

(A.  $a=i$ )

7. Bepaal  $c_{12}$  als  $C = A \cdot B$  met  $A = \begin{bmatrix} 2+3i & 2 \\ 0 & 1-7i \end{bmatrix}$  en  $B = \begin{bmatrix} 5-7i & 1-i \\ 0 & 3i \end{bmatrix}$  (Antw.  $5 + 7i$ )

8. Bepaal  $|A|$  als  $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3-i & 0 \\ 3+i & 2+i & 0 \\ 1 & 1 & i \end{bmatrix}$

9. Los op (x en y zijn complexe getallen):

$$(a) \begin{cases} ix + 2y = 1 - 2i \\ 4x - iy = -1 + 3i \end{cases} \quad (\text{Antw: } x = i \text{ en } y = 1 - i)$$

$$(b) \begin{cases} x + (1 - i)y = 2 \\ (1 - 2i)x + 2y = -1 + 2i \end{cases} \quad (\text{Antw: } x = -i)$$

10. Bepaal  $A^{-1}$  als  $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$

11. Noem  $y$  en  $z$  twee complexe getallen die voldoen aan  $y + z = 3 - i$  en  $\frac{z}{y} = 1 + i$ . Bepaal de modulus van  $z$  (A.  $|z| = 2$ )

12. Als  $z \neq 0$  een complex getal is dan geldt

(a) als  $Re(z) = 0 \Rightarrow Im(z^2) = 0$

(b) als  $Re(z^2) = 0 \Rightarrow Im(z) = 0$

(c) als  $Re(z) = 0 \Rightarrow Re(z^2) = 0$

(d) geen van voorgaande beweringen is juist

13. Toon aan dat  $G = \{1, -1, i, -i\}, \cdot$  een groep is.

## 8.2 Basisbewerkingen goniometrische/exponentiële vorm

1. Bepaal modulus, argument en goniometrische/exponentiële vorm van de volgende complexe getallen.

(a)  $z = 1$

(b)  $z = 4i$

(c)  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. Gegeven is  $z = 4 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$  en  $w = 1 - i\sqrt{3}$ . Bepaal

(a)  $\left| \frac{z}{w} \right|$

(b)  $arg\left(\frac{z}{w}\right)$

3. Schrijf  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8 + \left(\frac{\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$  in de vorm  $a + bi$

4. We beschouwen het complex getal  $z = \frac{(\sqrt{3}+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^2}$  dan is de som  $s$  van het reëel deel van  $z$  en het imaginair deel van  $z$  gelijk aan (A.  $s = -4$ )

## 8.3 Veeltermen over $\mathbb{C}$

1. Stel dat  $\alpha$  en  $\beta$  twee complexe wortels zijn van de vergelijking  $z^2 + z + 1 = 0$ . Welke vergelijking hieronder heeft dan  $\alpha^{19}$  en  $\beta^7$  als wortels?

(a)  $z^2 - z - 1 = 0$

(b)  $z^2 - z + 1 = 0$

(c)  $z^2 + z - 1 = 0$

(d)  $z^2 + z + 1 = 0$

2. De veelterm  $z^3 + 10z^2 + 35z + 44$  heeft als wortel  $-3 + \sqrt{2}i$ . Bepaal de andere wortels.

3. De veelterm  $2z^3 - 15z^2 + bz - 30 = 0$  heeft als oplossing  $z = 3 + i$ . Bepaal de waarde van  $b$  en de andere wortels.

4. Gegeven is dat  $2$  en  $5 + 2i$  wortels zijn van de vergelijking  $z^3 - 12z^2 + cz + d = 0$  met  $c$  en  $d$  reële getallen.

(a) Bepaal de derde wortel van deze vergelijking

(b) Bepaal de waarden van  $c$  en  $d$

- (c) Stel deze wortels voor in het Arganddiagram
5. Als gegeven is dat  $3 - 2i$  een oplossing is van  $z^4 - 6z^3 + 19z^2 - 36z + 78 = 0$  bepaal dan de andere oplossingen.
  6. Bepaal alle oplossingen van volgende vergelijking als je weet dat er een zuiver imaginaire oplossing is.  
 $z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 4z + 10 = 0$
  7. Los volgende vierkantsvergelijkingen op:
    - (a)  $z^2 + (1 - 2i)z + 1 + 5i = 0$
    - (b)  $z^2 - 4z + 5 = 0$
    - (c)  $iz^2 + (1 - 5i)z - 1 + 8i = 0$
    - (d)  $(1 + i)z^2 + (3 - 7i)z - 10 = 0$
  8. Beschouw volgende vierkantsvergelijking  $z^2 - (5 + 2i)z + (5 + 5i) = 0$  in de complex veranderlijke  $z$  met oplossingen  $z_1$  en  $z_2$ . Bepaal  $|z_1 - z_2|$ . (A. 1)
  9. Gegeven is de vergelijking  $z^2 + (4 + i + qi)z + 20 = 0$  met als oplossingen  $w$  en  $\bar{w}$ 
    - (a) Als  $q$  een reëel getal is, verklaar dan waarom  $q = -1$  moet zijn.
    - (b) als  $w = p + 2i$  met  $p$  een reëel getal, bepaal dan de mogelijke waarde(n) voor  $q$ .
  10. Los volgende binomiaalvergelijkingen op:
    - (a)  $z^3 - 64 = 0$
    - (b)  $z^2 + 16 - 30i = 0$
    - (c)  $z^3 = 1$
    - (d)  $z^4 = 1 - \sqrt{3}i$
  11. Het imaginaire getal  $8i$  heeft drie verschillende derdemachtswortels. Twee ervan zijn  $-2i$  en  $\sqrt{3} + i$ . Wat is de derde derdemachtswortel?
    - (a)  $\sqrt{3} - i$
    - (b)  $-\sqrt{3} - i$
    - (c)  $-\sqrt{3} + i$
    - (d)  $2i$

## 8.4 Meetkundige plaatsen

1. Als  $z \in \mathbb{C}$  zodat  $|z - i| \leq 1$ , wat kan je dan zeker zeggen?
  - (a)  $Arg(z) \in [0, \pi]$  en  $|z| \in [0, 2]$
  - (b)  $Arg(z) \in [\pi, 2\pi]$  en  $|z| \in [1/2, 3/2]$
  - (c)  $Arg(z) \in [\pi/2, 3\pi/2]$  en  $|z| \in [1, 2]$
  - (d)  $Arg(z) \in [0, 2\pi]$  en  $|z| \in [0, 1]$
2. Bepaal de MP van alle complexe getallen  $z$  die voldoen aan  $|z - 2| = |z + 4i|$ . Bepaal tussen al deze getallen die  $z$  met de kleinste modulus.
3. Gegeven  $|z - 4i| \leq 2$ 
  - (a) Arceer het gebied in het Arganddiagram waarvoor deze vergelijking opgaat
  - (b) Bepaal het bereik van de mogelijke waarden voor  $arg(z)$  waarvoor deze vergelijking opgaat
4. Een cirkel  $C$  en een halfrechte  $L$  hebben respectievelijk als vergelijking:

$$|z - 2\sqrt{3} - i| = 4 \text{ en } arg(z + i) = \frac{\pi}{6}$$

- (a) toon aan:
  - i. De cirkel gaat door het punt waar  $z = -i$
  - ii. De halfrechte gaat door het middelpunt van de cirkel
- (b) schets de cirkel en de halfrechte in het Argandvlak
- (c) Arceer het gebied dat voldoet aan  $|z - 2\sqrt{3} - i| \leq 4$  en  $0 \leq arg(z + i) \leq \frac{\pi}{6}$