MATRICES

Índice:

1. Introducción

La utilización de matrices en las Matemáticas, parece ser que fueron introducidas por el matemático **James Joseph Silvester** *hacia el año 1850, y la teoría inicial, por el inglés* **Sir William Rowan Hamilton** *hacia 1853.*

La notación matricial como una forma abreviada de representación de una sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, fue introducida por **Arthur Cayley** *hacia 1858. Además, de la utilidad de las matrices para el estudio de los sistemas de ecuaciones, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, etcétera.*

En ocasiones tenemos que utilizar un conjunto compuesto por varios valores numéricos (ordenados en filas o en columnas), para listas o tablas numéricas. Por ejemplo pensemos en las notas de tres evaluaciones de 8 alumnos, que podemos representar mediante la siguiente tabla

		Alumno 1	*Alumno 2*	*Alumno 3*	*Alumno 4*	*Alumno 5*	*Alumno 6*	*Alumno 7*	*Alumno 8*
1ª evaluación	***Nota***	3,8	2,5	7	6,7	5	9,1	5,6	4,3
2ª evaluación	***Nota***	5	8,3	3,8	7	9	4,4	5,8	3
3ª evaluación	***Nota***	6,2	4,5	7,7	7	5	4	3	8,8

Que también podemos representar mediante la siguiente notación

$$N=\begin{pmatrix} 3,8 & 2,5 & 7 & 6,7 & 5 & 9,1 & 5,6 & 4,3 \\ 5 & 8,3 & 3,8 & 7 & 9 & 4,4 & 5,8 & 3 \\ 6,2 & 4,5 & 7,7 & 7 & 5 & 4 & 3 & 8,8 \end{pmatrix}$$

Donde las filas representan las evaluaciones y las columnas los alumnos,

El elemento n_{ij} *representa el valor de la fila i y la columna j, por ejemplo* $n_{23}=3,8$

Este tipo de datos o número multidimensional lo denominamos **MATRIZ**, *y puede representar una información de datos o relaciones, o un número multidimensional.*

2. Definición de matriz

Una **matriz A de dimensiones** (*o de orden*) $m\,x\,n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ es un número $m\,x\,n$ dimensional (*tablero de m filas y n columnas*), de $m\,x\,n$ elementos de $\mathbb{R}$, a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{i=1,2,\ldots,m;\,j=1,2,\ldots,n}$$

Donde, el elemento o término a_{ij} representa el elemento de la fila i y de la columna j.

Para referirnos a una matriz cualquiera, por comodidad solemos representar abreviadamente $\left(a_{ij}\right)_{i=1,2,\ldots,m;\,j=1,2,\ldots,n}$ o abusando de notación por $\left(a_{ij}\right)$.

 # Ejemplo.- La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *es de dimensión* $3\,x\,3$ *y* $a_{23}=3$.

Habitualmente representamos las matrices con letras mayúsculas (*A, B, C, ...*) y sus elementos mediante letras minúsculas (a, b, c, …), siendo práctico usar subíndices, sobre todo para matrices de grandes dimensiones.

Dos matrices A y B de orden m x n son **iguales** si $a_{ij}=b_{ij};\, i=1,2,\ldots,m;\, j=1,2,\ldots,n$.

 # Ejemplo.- Las matrices

$A=\begin{pmatrix} 3 & b & c \\ a & 1 & 8 \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} d & 7 & 4 \\ 2 & e & g \end{pmatrix}$ *son iguales si* $d=3, b=7, c=4, a=2, e=1\ y\ g=8$

3. Tipos de matrices

Matriz fila.- Está constituida por una sola fila.

 # Ejemplo.- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

Matriz columna.- Está constituida por una sola columna.

 # Ejemplo.- $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Matriz cuadrada.- Tiene el mismo número de filas que de columnas

 # Ejemplo.- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Una matriz que no sea cuadrada, se denomina **matriz rectangular**.

El conjunto de términos a_{ii} de una matriz cuadrada de orden n (*matriz* $n\,x\,n$), se denomina **diagonal principal** y al conjunto de términos a_{ij} con $i+j=n+1$ se denomina **diagonal secundaria**.

 # Ejemplo.- La matriz cuadrada $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ *tiene por diagonal principal (1 5 0 7) y por diagonal secundaria (1 4 2 1)*

Matriz opuesta de una matriz A (*se representa por* $-A$).- Es la matriz que se obtiene cambiando de signos todos los elementos o términos de la matriz A . Es decir, los elementos de $-A$ son de la forma $-a_{ij}$

 # Ejemplo.- La matriz opuesta de $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ *es* $-A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

Matriz traspuesta de una matriz A (*se representa por* A^t).- Es la matriz que se obtiene cambiando las filas por las columnas de la matriz A. Es decir los elementos de A^t son de la forma $a_{ij}^t = a_{ji}$.

 # Ejemplo.- La matriz traspuesta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ *es* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

Matriz simétrica.- Es la matriz cuadrada A que cumple $a_{ij} = a_{ji}$.

 # Ejemplo.- La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *es simétrica.*

Matriz antisimétrica.- Es la matriz cuadrada A que cumple $a_{ij} = -a_{ji}$.

 # Ejemplo.- La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ *es antisimétrica.*

Matriz nula.- Todos su elementos son cero y se denomina matriz cero o se representa por **0**.

 # Ejemplo.- $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Matriz diagonal.- Es una matriz cuadrada, en la que todos su elementos distintos de la diagonal principal son cero.

 # Ejemplo.- La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *es diagonal.*

Matriz escalar.- Es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal principal son iguales

 # Ejemplo.- La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *es escalar.*

Matriz unidad o identidad I_n .- Es una matriz escalar de orden $n x n$ con todos los elementos de la diagonal principal iguales y de valor 1.

 # Ejemplo.- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matriz triangular.- Es una matriz cuadrada en la que todos los términos por encima o por debajo de la diagonal principal son cero. En el primer caso se denomina triangular inferior y en el segundo caso triangular superior.

 # Ejemplo.- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *es triangular inferior y* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *es triangular superior.*

4. Suma de matrices

Si $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son dos matrices de orden $m x n$.

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})=(s_{ij})$ donde $s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, para $i=1,2,\ldots,m$ y $j=1,2,\ldots,n$

 # Ejemplo.- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\forall A, B \, y \, C$ matrices de dimensiones $m x n$, la suma de matrices posee las siguientes propiedades

1.- $A+(B+C)=(A+B)+C$ (*propiedad asociativa*)

2.- $A+B=B+A$ (*propiedad conmutativa*)

3.- $A+0=A$ (*0 es la matriz nula*)

4.- Dos matrices no nulas A y B son opuestas si $A+B=0$

Diferencia de matrices.- Si A y B son dos matrices de orden m x n, denominamos **diferencia** de A menos B, a la operación:

$A-B=A+(-B)$

5. Producto de un número real por una matriz

Si $A=(a_{ij})$ es una matriz de orden $m\,x\,n$ y k un número real.

$k\,.\,A=k\,.(a_{ij})=(b_{ij})$ donde $b_{ij}=k.a_{ij}$ para $i=1,2,\ldots,m$ y $j=1,2,\ldots,n$

 # Ejemplo.- $2\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&2\\2&0&4\end{pmatrix}$

Al número k se le denomina escalar, y a esta operación producto de escalares por matrices

$\forall\,A\,y\,B$ matrices de dimensiones $m\,x\,n$ y $\forall\,k,h\in\mathbb{R}$, el producto de un número real por una matriz posee las siguientes propiedades

1.- $k.(A+B)=k.A+k.B$ (*propiedad distributiva 1ª*)

2.- $(k+h).A=k.A+h.A$ (*propiedad distributiva 2ª*)

3.- $k.(h.A)=(k.h).A$ (*propiedad asociativa mixta*)

4.- $1.A=A$ (*elemento neutro*)

el número 1 es el elemento unidad de los números reales.

Además, como resultado de esta operación se deducen las siguiente propiedades simplificativas $\forall\,A,B\,y\,C$ matrices de dimensiones $m\,x\,n$ y $\forall\,k,h\in\mathbb{R}$

1.- $A+C=B+C$ equivale a que $A=B$

2.- $k.A=k.B$ equivale a que si k es distinto de cero $A=B$

3.- $k.\,A=h.A$ equivale a que $h=k$, si A es distinta de la matriz nula

4.- $(k.A)^t=k.A^t$

6. Producto de matrices

El producto de la matriz $A=(a_{ij})$ de dimensión $m\,x\,n$, por la matriz $B=(b_{ij})$ de dimensión $n\,x\,q$, es la matriz $A.B=(a_{ij}).(b_{ij})=(p_{ij})$ de dimensión $m\,x\,q$. Donde

$p_{ij}=\sum_{r=1}^{n} a_{ir}.b_{rj}$, para cada $i=1,2,3,\dots,m$ y $j=1,2,3,\dots,p$

 # Ejemplo.- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

$\forall A, B\, y\, C$ matrices de dimensiones adecuadas para que se pueda aplicar la multiplicación de matrices (*el número de columnas de la primera matriz a multiplicar tiene que ser igual al número de filas de la segunda matriz a multiplicar*), el producto de matrices posee las siguientes propiedades

1.- $A(BC)=A(BC)$ (*propiedad asociativa*)

2.- $A(B+C)=AB+AC$ (*propiedad distributiva por la izquierda*)

3.- $(A+B)C=AC+BC$ (*propiedad distributiva por la derecha*)

También, se cumple

4.- $(AB)^t=B^t A^t$

 El producto de matrices no es en general conmutativo, basta considerar como contraejemplo

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=BA$$

 Si $AB=0$, *no implica necesariamente que* $A=0$ *o* $B=0$

 # Ejemplo.- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pero ni $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ni $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ so nulas.

 $AB=AC$, *no implica necesariamente que* $B=C$

7. Potencia de matrices cuadradas

Si A es una matriz cuadrada de orden m (*es decir m x m*), podemos definir la **potencia n-ésima de la matriz cuadrada A**, como

$$A^n = A^{n-1} A = A^{n-2} A\, A = A \overset{\dots\ n)}{\dots} A$$

 # Ejemplo.- Para calcular las potencias de $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

. . . .

$$A^n = A^{n-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

- Si A es una matriz cuadrada de orden n, se cumple $A\,.\,I_n = I_n\,.\,A = A$, siendo I_n la matriz identidad de orden n.
- $(A+B)^2$ *, no implica necesariamente que sea* $A^2 + 2.\,A\,B + B^2$
- $(A-B)^2$ *, no implica necesariamente que sea* $A^2 - 2.\,A\,B + B^2$
- $(A+B)^2 (A+B)^2$ *no implica necesariamente que sea* $A^2 + 2\,.\,A\,B + B^2$
- *Una matriz cuadrada* A *decimos que es **idempotente** si cumple* $A^2 = A$
- *Una matriz cuadrada* A *decimos que es **involutiva** si cumple* $A^2 = I$
- Una matriz cuadrada A decimos que es **ortogonal** si cumple $A.\,A^t = I$

8. Matriz inversa

Dada una matriz cuadrada A de orden n, no siempre existe una matriz B tal que

$$A.B=B.A=I_n \quad .$$

Cuando existe, decimos que A y B son matrices inversas. Una matriz cuadrada que posee inversa, decimos que es **inversible** o **regular**, además a la matriz inversa de A, si existe la denominamos por A^{-1}

 Dada una matriz cuadrada A de orden n, si existe una matriz B tal que $A.B=B.A=I_n$. Decimos que A y B son matrices inversas. Una matriz cuadrada que posee inversa, decimos que es **inversible** o **regular**, además a la matriz inversa de A, si existe la denominamos por A^{-1}

 Dada una matriz cuadrada A de orden n, no siempre existe una matriz B tal que $A.B=B.A=I_n$.

Cálculo de matriz inversa de A por el método directo.- Para hallar A^{-1} por el método directo resolvemos el sistema de ecuaciones obtenido a partir de la ecuación matricial $A.A^{-1}=I_n$, siendo los coeficientes desconocidos de A^{-1} las incógnitas del sistema.

 # Ejemplo.- Para calcular la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ *, si* $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ *es la matriz inversa de A, podemos plantear el sistema*

$$A\,B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Que obtenemos, el sistema de ecuaciones

$$2x-z=1 \qquad 2y-t=0$$

$$x+z=0 \qquad y+t=1$$

Obteniendo, como solución del sistema:

$$x=y=\frac{1}{3} \qquad z=-\frac{1}{3} \qquad t=\frac{2}{3}$$

Por tanto, la matriz buscada será

$$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=A^{-1}$$

9. Cálculo de matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

En el caso de que una matriz cuadrada A sea de dimensión mayor que 2, el método de cálculo directo para hallar la matriz inversa generará un sistema grande de ecuaciones (9 ecuaciones si es de dimensión 3, 16 si es de dimensión 4, etc.) , por lo que interesa aplicar otro método, como puede ser el método de ***Gauss-Jordan****.*

Cálculo de matriz inversa por el método de Gauss-Jordan.- *Si* $A=(a_{ij})$ *es una matriz cuadrada de orden n, para utilizar el método de reducción o de Gauss, utilizamos el siguiente esquema inicial (donde se recogen en una matriz doble, los coeficientes de la matriz A y de la matriz* I_n *, separados por una línea vertical)*

$$A \approx \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & .. & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \approx I_n$$

donde se recogen en una matriz doble, los coeficientes de la matriz A y de la matriz I_n *, separados por una línea vertical. Y utilizando las siguientes reglas:*

1: Multiplicar una fila por un número distinto de cero.

2: Sumar o restar a una fila otra multiplicada por un número

Hasta llegar al esquema

$$I_n \approx \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & .. & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right) \approx A^{-1}$$

Teniendo en cuenta, que si durante el proceso aparece alguna fila nula, la matriz no tiene inversa.

 # Ejemplos.-

- Para calcular *la* matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *por el método de Gauss-Jordan*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\begin{subarray}{c} F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{subarray}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{7}.F_2}{\Rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3+4.F_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & 1 \end{array}\right) \underset{-\frac{7}{5}.F_3}{\Rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{array}\right) \underset{\Rightarrow}{F_2+\frac{3}{7}.F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{array}\right) \underset{\Rightarrow}{F_1+F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{array}\right) \underset{\Rightarrow}{F_1-3.F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

- Para calcular *la* matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ *por el método de Gauss-Jordan*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2-3F_1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Que dado que hay una fila de ceros en A, luego A no tiene inversa y, por tanto, es una matriz singular.

10. Rango de una matriz

Dependencia lineal de filas o columnas de una matriz.- Dada una matriz A de orden $m \, x \, n$. Una fila o columna I, **depende linealmente de sus filas o columnas paralelas** $I_1, I_2, I_3, \ldots., I_r$ si existen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r$ (*r = m si son filas y r = n si son columnas*), no todos nulos, tales que

$$I = a_1 . I_1 + a_2 . I_2 + a_3 . I_3 + \ldots + a_r . I_r$$

- Si una fila o columna depende linealmente de otra fila o columna, se dice que ambas filas o columnas son proporcionales, por serlo sus elementos.
- Un conjunto de filas o columnas de una matriz es linealmente dependiente si al menos una de ellas depende linealmente de las restantes. En caso contrario, se dicen que son independientes.

Rango de una matriz.- Se denomina **RANGO** de una matriz, al número de filas y columnas linealmente independientes.

Cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss.- Para efectuar el cálculo del rango de una matriz, debemos de tener en cuenta:

a) Se puede suprimir sin que varíe el rango:

1. Las filas o columnas nulas.
2. Las filas o columnas proporcionales a otras.
3. Las filas o columnas dependientes de otras.

b) Se puede efectuar las siguiente operaciones sin que varíe el rango:

1. Multiplicar una fila o columna por un número distinto de cero.
2. Sumar o restar una fila o columna a otra.

Aplicando las reglas expuestas anteriormente, se puede obtener una matriz escalonada que nos indica el número de filas o columnas linealmente independientes, y por tanto podremos calcular el rango de dicha matriz.

Ejemplo:

Para calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *, utilizamos*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_2}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-3.F_1 \\ F_3-F_2}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango=2$$

- Una matriz cuadrada de orden n tiene inversa, si y solo sí, su rango es n

 # Ejemplo:

Como, la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *tiene rango 2, como hemos visto en el ejemplo anterior, la matriz A, no tiene inversa.*

11. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones maticiales

- Si A y X son matrices de orden $m\,x\,n$, con A conocida y X desconocida, y r un número real, la ecuación:

$$r.X=A \Rightarrow X=\frac{1}{r}.A$$

- Si A,B y X son matrices cuadradas de orden n, con A,B conocidas y X desconocida, la ecuación:

$$A.X=B \Rightarrow \begin{Bmatrix} si\,\exists A^{-1} & X=A^{-1}.B \\ \text{si no existe } A^{-1} & \text{no tiene solución} \end{Bmatrix}$$

$$X.A=B \Rightarrow \begin{Bmatrix} si\,\exists A^{-1} & X=B.A^{-1} \\ \text{si no existe } A^{-1} & \text{no tiene solución} \end{Bmatrix}$$

Este tipo de ecuaciones matriciales, normalmente representan un sistema de ecuaciones lineales (como veremos posteriormente), donde la matriz A representa la matriz de coeficientes, la matriz X la de las incógnitas y la matriz B la de los términos independientes.

- Si A,B y X,Y son matrices de orden $m\,x\,n$, con A,B conocida y X,Y desconocidas, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{matrix} a_1.X+b_1.Y=A \\ a_2.X+b_2.Y=B \end{matrix}$$

Se resuelve, como si fueran A y B números, así por ejemplo, si utilizamos la regla de Cramer (*que estudiaremos posteriormente*) será

$$X=\frac{1}{a_1.B_2-a_2.B_1}.(b_2.A-b_1.B) \qquad Y=\frac{1}{a_1.B_2-a_2.B_1}.(a_1.B-a_2.A)$$

 # Ejemplos.-

- $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}+3.X=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 1 & -4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X=\left(\frac{1}{3}\right).\left(\begin{pmatrix}4 & 4\\ 1 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}.X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{5}{2} & -2\end{pmatrix}$

- $\begin{array}{l} X+Y=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\\ 2.X-Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}\end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} X=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}.\left((-1).\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}-(1).\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}\right).=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\\ Y=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}.\left((1).\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}-(2).\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\right).=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\end{array}\right\}$