

## INTEGRAL INDEFINIDA

### Primitiva. Integral indefinida

Sean  $f(x)$  y  $F(x)$  dos funciones reales definidas en un mismo dominio. La función  $F(x)$  es una función primitiva de  $f(x)$ , o simplemente primitiva de  $f(x)$ , si  $F(x)$  tiene por derivada  $f(x)$ . Es decir

$$F(x) \text{ es primitiva de } f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Cuando utilizamos la notación diferencial, teniendo en cuenta que  $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ , esta definición es equivalente a

$$F(x) \text{ es primitiva de } f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x) \cdot dx$$

# Ejemplo.-  $\frac{1}{x}$  es una primitiva de  $\ln x$ , ya que  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

La operación que nos permite obtener una función primitiva  $F(x)$  a partir de  $f(x)$  se denomina integración, Si existe la función  $F(x)$ , decimos que  $f(x)$  es integrable.

# Hay que observar, que una función puede tener varias primitivas, pues por ejemplo

$$F_1(x) = x^2, \quad F_2(x) = x^2 + 1, \quad F_3(x) = x^2 + 2, \dots \text{ son primitivas de } f(x) = 2 \cdot x$$

Si  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$  y  $C$  un número real cualquiera, la función  $(F(x) + C)$  es también una primitiva de  $f(x)$ .

Si  $F(x)$  es una función primitiva de  $f(x)$ , el conjunto de funciones primitivas de  $f(x)$  será  $\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, F'(x) = f(x)\}$

Al conjunto, de todas las primitivas de  $f(x)$ , se le denomina **integral indefinida<sup>1</sup> de  $f(x)$** .

Además, como por el primer teorema fundamental de cálculo: Si  $f$  es una función continua

en un intervalo  $I$ , y  $a, x \in I$ ,  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  es derivable en  $x$ ; y  $F'(x) = f(x)$

Y dado que  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ , el conjunto de primitivas de una función  $f$ , se designa por

$$\int f(t) dt = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, F'(x) = f(x)\}$$

Al número  $C$ , se le denomina constante de integración.

<sup>1</sup> No hay que confundir los símbolos,  $\int f$  con  $\int_a^b f$ . El primero designa un conjunto de funciones, el conjunto de todas las primitivas de  $f$ , mientras que el segundo es un número real, la integral de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ . Denominando integral indefinida e integral definida, a cada uno de los símbolos respectivos, sin embargo se utiliza indistintamente el término integral para designar uno u otro concepto, siendo el contexto el que determina si se trata de una integral indefinida o definida.

# Ejemplos.-

1. Hallar una primitiva  $F(x)$  de  $f(x)=2x$  cuya gráfica pase por el punto

$P(1,3)$  . ¿ Y si pasa por el origen?

Las primitivas de  $f(x)$  son de la forma  $F(x)=x^2+C$  . Puesto que la primitiva pedida para por el punto  $P(1,3)$  , resulta:

$$f(1)=3 \Rightarrow 3=1+C \Rightarrow C=2$$

Luego, la primitiva es  $F(x)=x^2+2$

Si pasara por el origen  $C$  sería 0, y la primitiva sería  $F(x)=x^2$

2. Halla una recta (función lineal  $f(x)$  ) cuya pendiente es 2 y pasa por el punto

$P(0,4)$

La derivada de la función lineal es su pendiente, por tanto,  $f'(x)=2$  , luego

$f(x)=2x+C$  . Por pasar por el punto  $P(0,4)$  , resulta que

$$4=C \Rightarrow f(x)=2x+4$$

3. Dado que determinar primitivas de funciones es efectuar la operación inversa de la derivación, es inmediato comprobar algunos ejemplos como:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Luego, podemos representar la integral indefinida de una función  $f(x)$  , como

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Además, si  $f$  es una función derivable se cumplen las siguientes propiedades

$$1. \quad \left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$$

$$2. \quad \int f'(x) dx = f(x) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

### **Propiedades lineales de la integración**

Si  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $f, g$  son funciones continuas definidas en un intervalo  $I$ , se cumple

$$\int (a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x)) \cdot dx = a \cdot \int f(x) \cdot dx \pm b \cdot \int g(x) \cdot dx$$

# Ejemplos:

$$1.- \quad \int 5 \cdot x^2 dx = 5 \int x^2 dx = 5 \cdot \left( \frac{x^3}{3} + C \right) = \frac{5 \cdot x^3}{3} + 5 \cdot C = \frac{5 \cdot x^3}{3} + K \quad K \in \mathbb{R}$$

$$2.- \quad 4 \cdot \int x^3 dx = \int 4 \cdot x^3 dx = x^4 + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$3.- \int (2x + \cos x) dx = \int 2x dx + \int \cos dx = x^2 + C_1 + \operatorname{sen} x + C_2 = x^2 + \operatorname{sen} x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$4.- \int \left( \frac{5}{x} + 4e^x \right) dx = 5 \int \frac{1}{x} dx + 4 \int e^x dx = 5 \ln x + C_1 + 4e^x + C_2 = 5 \ln x + 4e^x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$5.- \int \frac{x+1}{x} dx = \int \left( 1 + \frac{1}{x} \right) dx = \int 1 dx + \int \frac{1}{x} dx = x + \ln x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$6.- \int \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^2} dx = \int \left( 2x + 1 - \frac{1}{x} \right) dx = x^2 + x - \ln x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

## Tipos fundamentales de integración

### Tipo potencial ( $a \neq -1$ )

Las funciones potenciales son de la forma  $f(x) = x^a$  o  $f(x) = k \cdot x^a$ .

En el caso de  $a = -1$ , la integral de la función  $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$  no sigue la fórmula que vamos a ver.

### **Casos particulares**

$$\star \quad \text{Si } f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = \int 0 dx = C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\star \quad \text{Si } f(x) = k, k \neq 0 \Rightarrow \int f(x) dx = kx + C \quad C \in \mathbb{R}$$

**Forma simple:**  $y = x^a$  (  $a \neq -1$  )

$$\star \quad \text{Si } f(x) = x^a; (a \neq -1) \Rightarrow F(x) = \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad C \in \mathbb{R}$$

**Forma compuesta:**  $y = f^a(x) \cdot f'(x)$  (  $a \neq -1$  )

$$\star \quad \text{Si } y(x) = f^a(x) \cdot f'(x); (a \neq -1) \\ \Rightarrow F(x) = \int y(x) dx = \int f^a(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1} + C \quad C \in \mathbb{R}$$

# Ejemplos:

$$1. \quad \int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 + C; C \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad \int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{x^{-3}}{3} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad \int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{x^5} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$4. \quad \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$5. \quad \int (x+1)^2 dx = \frac{1}{3} \cdot (x+1)^3 + C; C \in \mathbb{R}$$

$$6. \quad \int (2x+1) \cdot (x^2+x+1)^{30} dx = \frac{1}{31} \cdot (x^2+x+1)^{31} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$7. \quad \int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x dx = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{sen}^4 x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$8. \quad \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{sec}^2 x dx = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^3 x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$9. \quad \int (\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x) dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{tg}^4 x + C; C \in \mathbb{R}$$

10.

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos x (1 - \operatorname{sen}^2 x) dx = \int (\cos x - \operatorname{sen}^2 x \cos x) dx = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sen}^3 x + C; C \in \mathbb{R}$$

11.

$$\int \operatorname{sen}^3 x dx = \int \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) dx = \int (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x) dx = -\operatorname{cos} x + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{cos}^3 x + C; C \in \mathbb{R}$$

### **Tipo logarítmico**

**Forma simple:**  $y = \frac{1}{x}$

$$\star \quad \text{Si } f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C; C \in \mathbb{R}$$

**Forma compuesta:**  $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\star \quad \text{Si } y(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow F(x) = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C; C \in \mathbb{R}$$

# Ejemplos:

$$1. \quad \int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = 3 \ln|x| + C; C \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad \int \frac{3x^2+1}{x^3+x+5} dx = \ln|x^3+x+5| + C; C \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+1| + C; C \in \mathbb{R}$$

$$4. \quad \int \frac{x^2}{x^3+8} dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{3x^2}{x^3+8} dx = \frac{1}{3} \cdot \ln|x^3+8| + C; C \in \mathbb{R}$$

$$5. \quad \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C; C \in \mathbb{R}$$

$$6. \quad \int \operatorname{cotg} x dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C; C \in \mathbb{R}$$

$$7. \quad \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} dx = \ln|1+\operatorname{sen}^2 x| + C; C \in \mathbb{R}$$

### **Tipo exponencial**

**Forma simple:**  $y=e^x$  ;  $y=a^x$

$$\star \quad \text{Si } f(x)=e^x \Rightarrow F(x)=\int e^x dx = e^x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\star \quad \text{Si } f(x)=a^x \Rightarrow F(x)=\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; C \in \mathbb{R}$$

**Forma compuesta:**  $y(x)=e^{f(x)} \cdot f'(x)$  ;  $y(x)=a^{f(x)} \cdot f'(x)$

$$\star \quad \text{Si } y(x)=e^{f(x)} \cdot f'(x) \Rightarrow F(x)=\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\star \quad \text{Si } y(x)=a^{f(x)} \cdot f'(x) \Rightarrow F(x)=\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C; C \in \mathbb{R}$$

# Ejemplos:

$$1. \quad \int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int e^{2x+1} \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x+1}$$

$$2. \quad \int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad \int \frac{3^x}{2^x} dx = \int \left(\frac{3}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$4. \quad \int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$5. \quad \int e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x dx = e^{\operatorname{sen} x} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$6. \quad \int e^{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \operatorname{sen} 2x dx = \int e^{\operatorname{sen}^2 x} \cdot 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x dx = e^{\operatorname{sen}^2 x} + C; C \in \mathbb{R}$$

**Tipo seno****Forma simple:**  $y = \cos x$ 

$$\star \quad \text{Si } f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \int \cos x \, dx = \text{sen } x + C; C \in \mathbb{R}$$

**Forma compuesta:**  $y(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)$ 

$$\star \quad \text{Si } y(x) = \cos f(x) \cdot f'(x) \Rightarrow F(x) = \int \cos f(x) \cdot f'(x) \, dx = \text{sen } f(x) + C; C \in \mathbb{R}$$

# Ejemplos:

$$1. \quad \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \text{sen } 2x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad \int \cos(2x+1) \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \cos(2x+1) \, dx = \frac{1}{2} \text{sen}(2x+1) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad \int x \cdot \cos(x^2+1) \, dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \cos(x^2+1) \, dx = \frac{1}{2} \text{sen}(x^2+1) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$4. \quad \int (2x+1) \cdot \cos(x^2+x+1) \, dx = \text{sen}(x^2+x+1) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$5. \quad \int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx = \int \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \, dx = \text{sen}(\ln x) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$6. \quad \int e^x \cdot \cos(e^x) \, dx = \text{sen}(e^x) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$7. \quad \int 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x^3+9) \, dx = \text{sen}(x^3+9) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$8. \quad \int x^2 \cdot \cos(x^3+1) \, dx = \frac{1}{3} \int 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x^3+1) \, dx = \frac{1}{3} \text{sen}(x^3+1) + C; C \in \mathbb{R}$$

**Tipo coseno****Forma simple:**  $y = \text{sen } x$ 

$$\star \quad \text{Si } f(x) = \text{sen } x \Rightarrow F(x) = \int \text{sen } x \, dx = -\cos x + C; C \in \mathbb{R}$$

**Forma compuesta:**  $y(x) = \text{sen } f(x) \cdot f'(x)$ 

$$\star \quad \text{Si } y(x) = \text{sen } f(x) \cdot f'(x) \Rightarrow F(x) = \int \text{sen } f(x) \cdot f'(x) \, dx = -\cos f(x) + C; C \in \mathbb{R}$$

# Ejemplos:

$$1. \quad \int \text{sen } 2x \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \text{sen } 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad \int \text{sen}(2x+6) \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \text{sen}(2x+6) \, dx = -\frac{1}{2} \cos(2x+6) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad \int x \cdot \text{sen}(x^2+3) \, dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \text{sen}(x^2+3) \, dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2+3) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$4. \quad \int (2x+1) \cdot \operatorname{sen}(x^2+x+1) dx = -\cos(x^2+x+1) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$5. \quad \int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x} dx = \int \operatorname{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = -\cos(\ln x) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$6. \quad \int e^x \cdot \operatorname{sen}(e^x) dx = -\cos(e^x) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$7. \quad \int \operatorname{sen} 5x dx = \frac{1}{5} \int \operatorname{sen} 5x dx = -\frac{\cos 5x}{5} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$8. \quad \int \operatorname{sen}(7x+8) dx = \frac{1}{7} \int 7 \cdot \operatorname{sen}(7x+8) dx = -\frac{1}{7} \cos(7x+8) + C; C \in \mathbb{R}$$

### Tipo tangente

**Forma simple:**  $y = \sec^2 x$

$$\star \quad \text{Si } f(x) = \sec^2 x \Rightarrow F(x) = \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C; C \in \mathbb{R}$$

**Forma compuesta:**  $y(x) = \sec^2 f(x) \cdot f'(x)$

$$\star \quad \text{Si } y(x) = \sec^2 f(x) \cdot f'(x) \Rightarrow F(x) = \int \sec^2 f(x) \cdot f'(x) dx = \operatorname{tg} f(x) + C; C \in \mathbb{R}$$

# Ejemplos:

$$1. \quad \int 3 \sec^2 x dx = 3 \int \sec^2 x dx = 3 \operatorname{tg} x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad \int \frac{7}{\cos^2 x} x dx = 7 \int \sec^2 x dx = 7 \operatorname{tg} x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad \int (5+5 \operatorname{tg}^2 x) dx = 5 \int (1+\operatorname{tg}^2 x) dx = 5 \operatorname{tg} x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$4. \quad \int 3x^2 \cdot \operatorname{Sec}^2(x^3+9) dx = \int 3x^2 \cdot \operatorname{Sec}^2(x^3+9) dx = \operatorname{tg}(x^3+9) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$5. \quad \int \sec^2(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \sec^2(2x+1) dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x+1) + C; C \in \mathbb{R}$$

6.

$$\int \sec^4 x dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x dx = \int (\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x) dx = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{inte} \operatorname{tg}^3 x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$7. \quad \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x - 1) dx = \operatorname{tg} x - x + C; C \in \mathbb{R}$$

## Método de cambio de variable

Este método es consecuencia de la derivación de funciones compuestas. Se trata de sustituir en la función  $f(x)$  la variable  $x$  por otra función de variable  $t$ , es decir  $x = x(t)$  tal que  $f(x) = f(x(t))$ , y podamos integrar más fácilmente  $f(x)$ , mediante los siguientes pasos

### a) Sustitución de la variable $x$ por $t$

**Forma directa:** si  $f(x) = f(x(t))$  implica  $\int f(x) dx = \int f(x(t)) x'(t) dt$

**Forma recíproca:** Si  $f(t) = f(t(x))$  implica  $\int f(t) dt = \int f(t(x)) t'(x) dx$

### b) Integración de la nueva función en $t$

Si la nueva función obtenida de variable  $t$  (o  $x$  en forma recíproca) es más sencilla, se integra. En caso contrario, hay que elegir otra sustitución más adecuada.

### c) Sustitución de la variable $t$ por $x$

Una vez calculada la integral en  $t$  (o  $x$  en forma recíproca) se deshace el cambio.

# Ejemplos:

1.

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{\cos t}{t} 2t dt = 2 \int \cos t dt = 2 \operatorname{sen} t + C = 2 \cos \sqrt{x} + C ; C \in \mathbb{R}$$

2. 
$$\int 2x (x^2 + 5)^{25} dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + 5 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} \Rightarrow \int t^{25} dt = \frac{1}{26} t^{26} + C = \frac{1}{26} (x^2 + 5)^{26} + C ; C \in \mathbb{R}$$

## Integral de un producto o integración por partes

La integral de un producto, método de integración por partes se basa en la derivada de un producto de funciones.

Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son dos funciones derivables y  $u$  y  $v$  dos funciones diferenciables, haciendo  $f(x) = u$  y  $g(x) = v$ , mediante el siguiente proceso, resumido en una tabla

	Forma con derivadas	Forma con diferenciales
Derivando o Diferenciando	$(fg)' = fg' + gf'$	$d(uv) = u dv + v du$
Integrando	$fg = \int fg' + \int gf'$	$uv = \int u dv + \int v du$
Despejando	$\int fg' = fg - \int gf'$	$\int u dv = uv - \int v du$

Obtenemos la integral

$$\int u dv = uv - \int v du$$

# Ejemplos:

$$1. \quad \int x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=e^x dx \Rightarrow v=e^x \end{array} \right\} = x \cdot e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C; C \in \mathbb{R}$$

2.

$$\int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=\cos x dx \Rightarrow v=\text{sen } x \end{array} \right\} = x \cdot \text{sen } x - \int \text{sen } x dx = x \text{sen } x + \cos x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad \int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x} dx \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{array} \right\} = (\ln x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$4. \quad \int \ln(x+1) dx = \left\{ \begin{array}{l} u=\ln(x+1) \Rightarrow du=\frac{1}{x+1} dx \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{array} \right\} = x \cdot \ln(x+1) - \int x \cdot \frac{1}{x+1} dx = \\ = x \cdot \ln(x+1) - \int \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = x \cdot \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$5. \quad \int x^2 \cdot \text{Sen } x dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x^2 \Rightarrow du=2x dx \\ dv=\text{sen } x dx \Rightarrow v=-\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = \\ = -x^2 \cos x + \left\{ \begin{array}{l} u=2x \Rightarrow du=2 dx \\ dv=\cos x dx \Rightarrow v=\text{sen } x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2x \text{sen } x - \int 2 \text{sen } x dx = \\ = -x^2 \cos x + 2x \text{sen } x + 2 \cos x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$6. \quad \int e^x \cdot \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u=e^x \Rightarrow du=e^x dx \\ dv=\cos x dx \Rightarrow v=\text{sen } x \end{array} \right\} = e^x \text{sen } x - \int e^x \text{sen } x dx = \\ = e^x \text{sen } x + \left\{ \begin{array}{l} u=e^x \Rightarrow du=e^x dx \\ dv=\text{sen } x dx \Rightarrow v=(-\cos x) \end{array} \right\} = e^x \text{sen } x + e^x \cdot \cos x - \int e^x \cos x dx$$

que reagrupando términos, obtenemos

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \cdot \text{sen } x + e^x \cdot \cos x \Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} \cdot (e^x \cdot \text{sen } x + e^x \cdot \cos x) + C; C \in \mathbb{R}$$