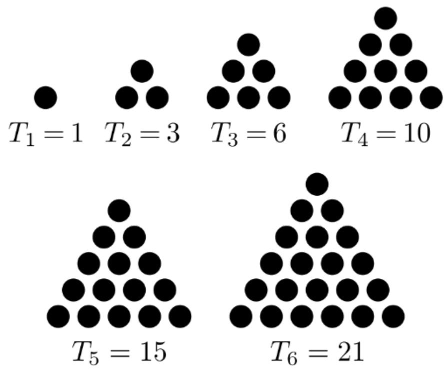
Números triangulares

Los números triangulares son números que se pueden disponer formando un triángulo.
(1, 3, 6, 10, 15, ...)



Observa en los cuatro primeros números triangulares cómo se forma cada triángulo a partir del anterior.

Los números triangulares (1, 3, 6, 10, 15, ...) son enteros del tipo T(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n

T(n) = $\sum_1^n k = \frac{n\,(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{n-1}$. La suma es la de una progresión aritmética de diferencia 1.

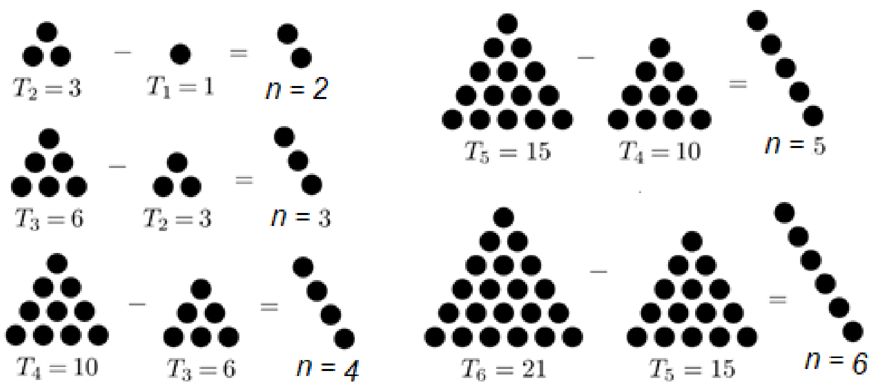
Ejemplo: La suma de los 12 primeros números naturales es T(12) = 78.

- Libro el diablo de los números, pág. 61.

Propiedad 1: T(n) – T(n-1) = n , $\forall\, n \geq 2$

- Demostración 1: T(n) – T(n-1) = $\sum_1^n k - \sum_1^{n-1} k$ = n

Geométricamente:



- Demostración 2: T(n) – T(n-1) = $\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2} = \ldots = \binom{n}{1} = n$

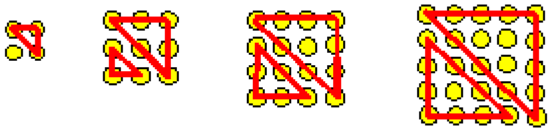
- Libro el diablo de los números, pág. 59.

Propiedad 2: T(n) + T(n−1) = n^2 = C(n) (en el siguiente apartado se tratan los números cuadrados), $\forall\, n \geq 2$

- Demostración 1: T(n) + T(n-1) = $\sum_1^n k + \sum_1^{n-1} k$ = n + $\sum_1^{n-1} k + \sum_1^{n-1} k$ =

= n + 2 $\sum_1^{n-1} k$ = n + 2 $\cdot \frac{n\,(n-1)}{2}$ = n^2

Geométricamente:



- Demostración 2: T(n) + T(n-1) = $\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = \ldots = n^2$

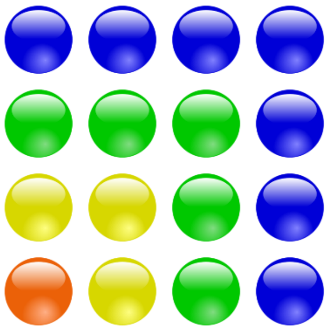
➯ Libro el diablo de los números, pág. 60.

Números cuadrados

Los números cuadrados son aquellos cuyos puntos forman un cuadrado.
Coinciden con los cuadrados de los números enteros.
Comprueba que todo número cuadrado es suma de números impares consecutivos empezando por 1:

$$1 = 1;$$
$$1 + 3 = 4\ ;$$
$$1 + 3 + 5 = 9\ ;$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

Los números cuadrados (1, 4, 9, 16, 25, ...) son enteros del tipo:
C(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1)



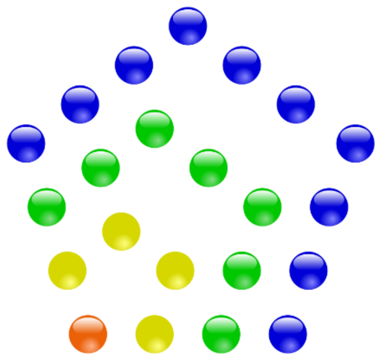
- Ver en mi perfil Geogebra "Números cuadrados": https://www.geogebra.org/m/x268bfjn

C(n) = $\sum_1^n (2k - 1)$ = n^2. Ver el applet GeoGebra y luego proponer a los estudiantes que la demuestren: Ver

- Docencia/2018-19/3ºESO Académicas/Tema 3/Demostraciones sin palabras/ "Suma de números impares consecutivos_Demostración.docx"
- En la misma carpeta el documento "Sucesión de nº impares como diferencia de cuadrados consecutivos_Demostración.docx"

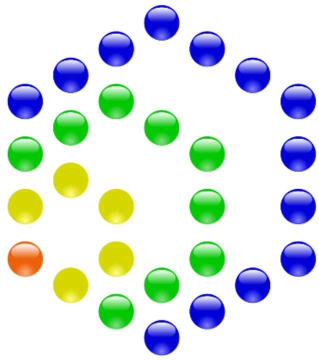
Otros números poligonales

En matemáticas, un **número figurado** es todo número natural que al ser representado por un conjunto de puntos equidistantes puede formar una figura geométrica regular. En particular, un **número poligonal** es un número natural que puede recomponerse en un polígono regular.



Números pentagonales

1, 5, 12, 22…



Números hexagonales

1, 6, 15, 28…

Toda la información sobre números poligonales y figurados viene en http://numerentur.org/poligonales/ Ahí puedo encontrar los primeros elementos de las sucesiones, el término general, figuras geométricas, historia…

El término general de un número poligonal no centrado de l lados es $\frac{(L-2)n^2-(L-4)n}{2}$

HISTORIA

Los Poligonales – Figurados son números figurados, **naturales**, en **sucesión** que se representan como puntos materiales dispuestos en forma de polígono regular.

Los primeros en estudiar la propiedad de estos números fueron **Pitágoras** y sus seguidores de la escuela Pitagórica en el siglo V ane. Influenciados por los conocimientos del imperio Babilónico, descubrieron que con piedras o semillas (números) podían establecer ciertas formas y configuraciones geométricas. Los primeros escritos relevantes sobre estos números son de Euclides de Alejandría, en el siglo IV ane, pero es Hipsicles de Alejandría, dos siglos después, quién da la definición de los mismos.

Nicómano de Gerasa

En el siglo I, **Nicómaco** de Gerasa sienta las bases de la aritmética actual con su libro «Arithmetike Eisagoge» (introducción a la aritmética) y define los números Triangulares, Cuadrados y Oblongos

Con posterioridad, Diofanto de Alejandría (siglo III- IV) publicó varios libros que serían la base del álgebra y entre ellos "Numeris Multangulis" (El Tratado sobre los números Poligonales), donde amplia estos conocimientos y habla sobre los números Piramidales, Tetragonales, conjeturando que todo número entero positivo puede escribirse con no más de cuatro números cuadrados. Se adelantó en el tiempo a Fermat, Gauss, Euler y otros que también hablan de su desarrollo.

En 1.638 **Fermat** publicó su teorema sobre números poligonales escribiendo, «Todo entero positivo es la suma de

- Uno, dos o tres números triangulares
- Uno, dos, tres o cuatro números cuadrangulares
- Uno, dos, tres,cuatro o cinco pentagonales
- y así sucesivamente.

Diofanto de Alejandría

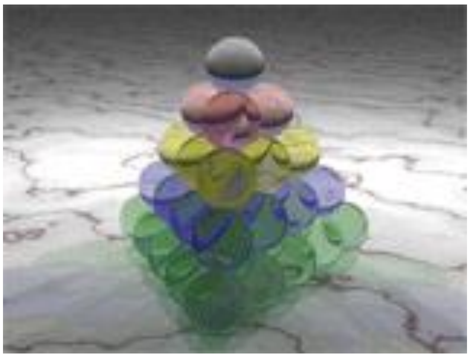
Teorema: Todo número natural se puede escribir como suma de:

- Uno, dos o tres números triangulares.
- Uno, dos, tres o cuatro números cuadrangulares.
- Uno, dos, tres, cuatro o cinco pentagonales.
- Y así sucesivamente.

- Libro el diablo de los números, págs. 59 y 60.

Números tetragonales

Los números tetragonales forman las pirámides triangulares, cuyos pisos son a su vez números triangulares.



1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, 560, 680, 816, 969…

Mira cada piso: 1, 3, 6, 10, 15, 21… ¡Los números triangulares!

La sucesión de los números tetragonales es la sucesión de sumas parciales de la sucesión de los números triangulares:

$$\text{Tetra(n)} = \sum_1^n T(k) = \sum_1^n \binom{k+1}{2} = \sum_2^{n+1} \binom{\tilde{k}}{2} = \binom{n+2}{3} = \binom{n+2}{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

donde se ha usado la propiedad "stick 1" de los números combinatorios.