Expresiones algebraicas

Expresiones algebraicas. Monomios y polinomios.

Monomios y polinomios.

Una expresión algebraica es una combinación de letras, números y signos de operaciones. Y en el caso particular, de que la expresión este solamente formado por productos, diremos que dicha expresión algebraica es un monomio.

 # Ejemplo: $3.x^2.y^3.z$ *es un monomio. Al número 3 se le denomina coeficiente del monomio, y a las letras x, y y z, variables o incógnitas. Además, el grado del monomio es la suma de los exponentes de las variables o incógnitas, es decir el grado del monomio* $3.x^2.y^3.z$ *es* $2+3+1=6$.

Un polinomio es una expresión algebraica compuesta por una suma de monomios (*en caso de suma de dos monomios se denomina binomio, en caso de tres, binomio, ...*). Además, el grado de un polinomio, es igual al grado del monomio de mayor grado que lo componen.

 # Ejemplo: $3.x^2+y^3.z+x.y.z$ *es un polinomio de grado 4, ya que el monomio* $y^3.z$ *es de grado 4, y es el monomio de mayor grado.*

Suma y diferencia de polinomios.

Para sumar o restar polinomios, se suman o restan los coeficientes de los monomios semejantes de cada uno de los polinomios, recordando que dos monomios son semejantes cuando tiene la misma parte literal (*mismo grado e igual variables elevadas a las misma potencia*).

Ejemplo.- Si $P(x)=x^2+7xz+2y+7z+5$ y $Q(x)=3x^2-6xz+2x+3$, será

$$\begin{aligned}P(x)+Q(x)&=(x^2+7xz+2y+7z+5)+(3x^2-6xz+2x+3)=\\&=(1+3)x^2+(7+(-6))xz+2x+2y+7z+(5+3)=4x^2+xz+2x+2y+7z+8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(x)-Q(x)&=(x^2+7xz+2y+7z+5)-(3x^2-6xz+2x+3)=\\&=(1-3)x^2+(7-(-6))xz-2x+2y+7z+(5-3)=-2x^2+13xz-2x+2y+7z+2\end{aligned}$$

Producto de monomios y de polinomios.

Para multiplicar dos monomios, se multiplican los coeficiente y utilizando las propiedades de las potencias, también se multiplican las variables de la parte literal obteniendo un nuevo monomio, que tiene de coeficiente el producto de los coeficientes y de grado la suma de los grados.

 # Ejemplo: $(7x^2yz^3).(2xy^2)=14x^3y^3z^3$

Para multiplicar un monomio por un polinomio, aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, se multiplica el monomio por todos los monomios del polinomio.

 # Ejemplo: $(3xy).(x^2+2y-z+1)=3x^3y+6xy^2-3xyz+3xy$

Para multiplicar polinomios, basta con que multipliquemos cada monomio que compone el primer polinomio, por el segundo polinomio y posteriormente agrupemos los monomios semejantes

 # Ejemplo:

$$(2xy-3x^2).(2x+5y)=4x^2y+10xy^2-6x^3-15x^2y=-11x^2y+10xy^2-6x^3$$

Al multiplicar monomios por polinomio, utilizamos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. En ocasiones, para simplificar polinomios tenemos que efectuar la operación inversa, es decir sacar factor común.

 # Ejemplo: $-11x^2y+10xy^2-6x^3=(-11xy+10xy^2-6x^2).x$

Para operar con polinomios, habitualmente agrupamos sumamos o restamos los monomios semejantes y los ordenados según su grado, y en el caso particular del producto de monomios una disposición práctica es la que mostramos en el siguiente ejemplo

				$5x^2$	+	$2x^2$	-	x	+	3
						$3x^2$	-	$4x$	+	6
				$30x^3$	+	$12x^2$	-	$6x$	+	18
	-	$20x^4$	-	$8x^3$	+	$4x^2$	-	$12x$		
$15x^5$	+	$6x^4$	-	$3x^3$	+	$9x^2$				
$15x^5$	-	$14x^4$	+	$19x^3$	+	$25x^2$	-	$18x$	+	18

División entera de polinomios.

Para dividir monomios, dividimos y a la parte literal o variables, les aplicamos las propiedades de las potencias. El resultado obtenido no será siempre un monomio, ya que para que sea un monomio las potencias de las variables no pueden ser negativas.

 # Ejemplo:

$14x^3y^2z:2x^2yz=7xy$ *es un monomio.*

$14xy^2z:2x^2yz^2=7x^{-1}yz^{-1}$ *no es un monomio.*

La división de un polinomio por un monomio se obtiene dividiendo cada término o monomio del polinomio por el monomio. El resultado obtenido será un polinomio, si todos los términos obtenidos de la división son monomios.

 # Ejemplo:

$(14x^2+8x):(2x)=7x+4$ *es un polinomio.*

$(14x^2+8x+2):(2x^2)=7+4x^{-1}+x^{-2}$ *no es un polinomio.*

La división de dos polinomios **D(x) y d(x)**, está basada, en las dos operaciones anteriores. Sin embargo, si queremos efectuar divisiones entre polinomios, de forma que el resultado que obtengamos sea otro polinomio **c(x)**, tendremos que efectuar la división entera (*divisiones mientras que los términos obtenidos sean monomios*), quedándonos un resto R(x), tal que se verifica

a) $D(x)=d(x).c(x)+R(x)$

b) $Grado(R(x))<Grado(d(x))$

 # Ejemplo.- La división entera

$$6x^4+5x^3-7x^2+3x+2:2x^2+3x-1$$

Da como cociente $3x^2-2x+1$ *y resto* $-2x+3$ *, ya que*

$6x^4$	+	$5x^3$	-	$7x^2$	+	$3x$	+	2	$2x^2$	+	$3x$	-	1
$-6x^4$	-	$9x^3$	+	$3x^2$					$3x^2$	-	$2x$	+	1
	-	$4x^3$	-	$4x^2$	+	$3x$	+	2					
		$4x^3$	+	$6x^2$	-	$2x$							
				2 x^2	+	x	+	2					
			-	2 x^2	-	3 x	+	1					
					-	2 x	+	3					

Cuando efectuamos una división de la forma **D(x) : (x – a)**, un método práctico es utilizar el método de Rufini

 # Ejemplo: Para dividir $(2x^3+3x^2-4):(x+1)$ *mediante el método de Ruffini, efectuamos el método*

	2	*3*	*0*	*- 4*
- 1		*- 2*	*- 1*	*1*
	2	*1*	*- 1*	*- 3*

Y obtenemos como cociente $2x^2+x-1$ *y resto* -3

Factorización de polinomios.

Valor numérico y resto

Al hacer la división de un polinomio $P(x)$ por $x-a$, existirá un cociente $C(x)$ y un resto R de grado 0 tal que

$$P(x)=(x-a).C(x)+R$$

Además, como para x = a, se cumple

$$P(x)=(a-a).C(x)+R=0+R=R$$

Obtenemos, el siguiente teorema

Teorema del Resto

El valor numérico de un polinomio en $x=a$ es igual al resto R de la división de dicho polinomio por $x-a$, es decir $P(a)=R$.

 # Ejemplo.- Para calcular el resto de la división $(x^3-2x+1):(x-2)$ *, basta con que apliquemos el teorema del resto y será* $2^3-2.2+1=5$

Valor numérico y factor

Al hacer la división de un polinomio $P(x)$ por $x-a$, si la división es exacta el resto R será 0, y existirá un cociente $C(x)$ tal que

$$P(x)=(x-a).C(x)$$

Y en este caso, diremos que **a es raíz del polinomio P(x)**

Teorema del factor

Un polinomio P(x) tiene como factor $x-a$ si el valor de dicho polinomio en $x=a$ es cero. Es decir

$$P(x)=(x-a).C(x)\Leftrightarrow P(a)=0$$

Si a su vez C(x) tiene como factor $x-b$, existirá un polinomio $D(x)$ tal que $P(x)=(x-a).(x-b).C(x)$. Siguiendo con este procedimiento, podemos factorizar $P(x)$ en producto de polinomios irreducibles, Además, si $P(x)$ es de grado n, tendrá como máximo n factores y por tanto n raíces reales.

 # Ejemplo.- Si $P(x)=x^2-x-2$ *, como* $P(-1)=0$ *,* $x=-1$ *es raíz de* $P(x)$ *. Además, como el cociente de* $P(x):(x+1)$ *es* $(x-2)$ *y el resto es 0,* $P(x)=(x+1).(x-2)$

Factorización de polinomios.

Teorema de las raíces enteras

Las raíces enteras de un polinomio con coeficiente enteros son divisores del término independiente.

 # Ejemplo.- Para factorizar el polinomio $P(x)=x^3+2x^2-x-2$ *, podemos utilizar el teorema de las raíces enteras, probando con números enteros que dividan al término independiente, es decir probando con valores de* $x\in\{\pm1,\pm2\}$.

$$P(-1)=0 \; ; \; P(1)=0 \; ; \; P(-2)=0 \; ; \; P(2)\neq0 \; ;$$

Luego su factorización será $P(x)=(x+1).(x-1).(x+2)$

Fracciones algebraica.

Un fracción algebraica es el cociente de dos polinomios, siendo el polinomio del denominador no nulo.

$$\frac{a(x)}{b(x)} \text{ y } \frac{c(x)}{d(x)} \text{ son equivalente si } a(x).d(x)=b(x).c(x)$$

Simplificación de fracciones algebraica.

Simplificar una fracción algebraica es dividir el numerador y el denominador por un polinomio que es común divisor de ambos.

 # Ejemplo.- La fracción algebraica $\frac{3x-3}{x^2-x}$ *es equivalente a* $\frac{3}{x}$ *, ya que*

$$\frac{3x-3}{x^2-x}=\frac{3.(x-1)}{x.(x-1)}=\frac{3}{x}$$

Reducción de fracciones a común denominador

Reducir dos o mas fracciones a común denominador es hallar otras fracciones, equivalentes a las primeras, que tengan todas ellas el mismo denominador. En particular, como método práctico se buscan fracciones equivalentes cuyo denominador sea el polinomio mínimo común múltiplo de los denominadores.

 # Ejemplo.- Como los denominadores de las fracción algebraica $\frac{5}{x-1};\frac{x}{x+1};\frac{x+1}{x^2-1}$ *tienen por mínimo común múltiplo* $m.c.m.\{x-1,x+1,x^2-1\}=x^2-1$ *, dichas fracciones equivalentes reducidas a común denominador serán* $\frac{5.(x+1)}{x^2-1};\frac{x.(x-1)}{x^2-1};\frac{x+1}{x^2-1}$

Operaciones con fracciones algebraicas.

Suma y resta de fracciones algebraicas

Para sumar o restar fracciones algebraicas, utilizamos fracciones algebraicas equivalentes con denominador común, quedando como resultado una fracción algebraica con dicho denominador común y con numerador la suma o resta de numeradores.

 # Ejemplo.-

$$\frac{5}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{5.(x+1)}{x^2-1}+\frac{x.(x-1)}{x^2-1}-\frac{x+1}{x^2-1}=$$
$$=\frac{(5x+5)+(x^2-x)-(x+1)}{x^2-1}=\frac{x^2+3x+4}{x^2-1}$$

Multiplicación y división de fracciones algebraicas

El resultado de multiplicar dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica, cuyo numerador es el producto de los numeradores y denominador el producto de los denominadores.

 # Ejemplo.- $\frac{5x-1}{x-1}.\frac{x}{x+1}=\frac{(5x-1).x}{(x+1).(x-1)}=\frac{5x^2-x}{x^2-1}$

El resultado de multiplicar dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica, cuyo numerador es el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, y cuyo denominador es el producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción.

 # Ejemplo.- $\frac{5x-1}{x-1}:\frac{x}{x+1}=\frac{(5x-1).(x+1)}{(x-1).x}=\frac{5x^2+4x-1}{x^2-x}$