Teoría – Tema 3

Teoría - 13 - Teorema de Cauchy

Teorema de Cauchy

Si el Teorema de Lagrange generaliza al Teorema de Rolle, el Teorema de Cauchy hace lo propio con Lagrange.

En el Teorema de Cauchy vamos a relacionar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. Si $g(x)=x$ veremos que recuperamos el Teorema de Lagrange de los incrementos finitos.

Teorema de Cauchy

Sean $f(x)$ y $g(x)$ continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b) , tales que $g(a)\neq g(b)$ y $g'(x)\neq 0,\ \forall\ x\in(a,b)\ \rightarrow\ \exists c\in(a,b)\,/\,\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Demostración: Partimos de la función auxiliar $h(x)=f(x)\cdot[g(b)-g(a)]-g(x)\cdot[f(b)-f(a)]$, que cumple las condiciones del Teorema de Rolle.

- $h(x)$ continua en $[a,b]$ por ser diferencia de funciones continuas en ese intervalo.
- $h(x)$ derivable en (a,b) por ser diferencia de funciones derivables en ese intervalo.
- Comprobemos que $h(a)=h(b)$:
  - $h(a)=f(a)\cdot[g(b)-g(a)]-g(a)\cdot[f(b)-f(a)]=f(a)\cdot g(b)-g(a)\cdot f(b)$
  - $h(b)=f(b)\cdot[g(b)-g(a)]-g(b)\cdot[f(b)-f(a)]=-f(b)\cdot g(a)+g(b)\cdot f(a)$
  - En efecto, se cumple $h(a)=h(b)$

Con estas condiciones el Teorema de Rolle afirma que $\exists c\in(a,b)/h'(c)=0$. Si derivamos $h(x)$:

$$h'(x)=f'(x)\cdot[g(b)-g(a)]-g'(x)[f(b)-f(a)]$$
$$h'(c)=0\ \rightarrow\ h'(c)=f'(c)\cdot[g(b)-g(a)]-g'(c)[f(b)-f(a)]=0$$
$$f'(c)\cdot[g(b)-g(a)]=g'(c)[f(b)-f(a)]\ \rightarrow\ \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Tal y como queríamos demostrar. Como ya adelantamos, si $g(x)=x$ recuperamos el Teorema de Lagrange.

El Teorema de Cauchy nos garantiza que si $f(x)$ y $g(x)$ cumplen las condiciones del teorema en el intervalo $[a,b]$, existe al menos un punto c del intervalo donde el cociente de las derivadas evaluadas en el punto c coincide con el cociente de las diferencias de las funciones evaluadas en los extremos del intervalo.

Ejemplo 1 resuelto

Hallar en qué punto del intervalo $[0,2]$ las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=-x^2+1$ cumplen las condiciones del Teorema de Cauchy.

$f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[0,2]$ y derivables en $(0,2)$ por ser polinómicas.

$$g(0)=1,\ g(2)=-3 \ \rightarrow\ g(0)\neq g(2)$$

$$g'(x)=-2x \ \rightarrow\ g'(x)=0 \ \rightarrow\ -2x=0 \ \rightarrow\ x=0 \ \rightarrow\ 0\notin(0,2)$$

Una vez confirmadas las condiciones del Teorema de Cauchy, podemos afirmar que:

$$\exists c\in(0,2) \ / \ \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)}$$

En efecto:

$$f'(x)=3x^2 \ \rightarrow\ f'(x)=3c^2$$

$$g'(x)=-2x \ \rightarrow\ g'(c)=-2c$$

$$f(2)=8,\ f(0)=0$$

$$g(2)=-3,\ g(0)=1$$

Sustituyendo estos valores:

$$\frac{3c^2}{-2c}=\frac{8-0}{-3-1} \ \rightarrow\ \frac{-3c}{2}=\frac{8}{-4} \ \rightarrow\ \frac{3c}{2}=2 \ \rightarrow\ c=\frac{4}{3} \ \rightarrow\ \frac{4}{3}\in(0,2)$$