Teoría – Tema 5

Teoría - 1 - Dirección, sentido y módulo de un vector. Normalización

Un ejemplo en 2 dimensiones

Sea un punto de coordenadas $A(x_1, y_1)$ y otro punto de coordenadas $B(x_2, y_2)$.

El vector con inicio en el punto A y fin en el punto B se calcula:

$$\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$$

Ya sabemos que el vector es una flecha orientada. La punta de la flecha apunta hacia el punto final del vector. La longitud de la flecha se denomina módulo.

Un vector es una flecha libre que podemos pinchar en cualquier punto del espacio. Es decir, dado un vector $\vec{AB}$ podemos dibujar infinitos vectores con la misma dirección, sentido y módulo y que solo se diferencian en el punto de inicio de donde parte el vector.

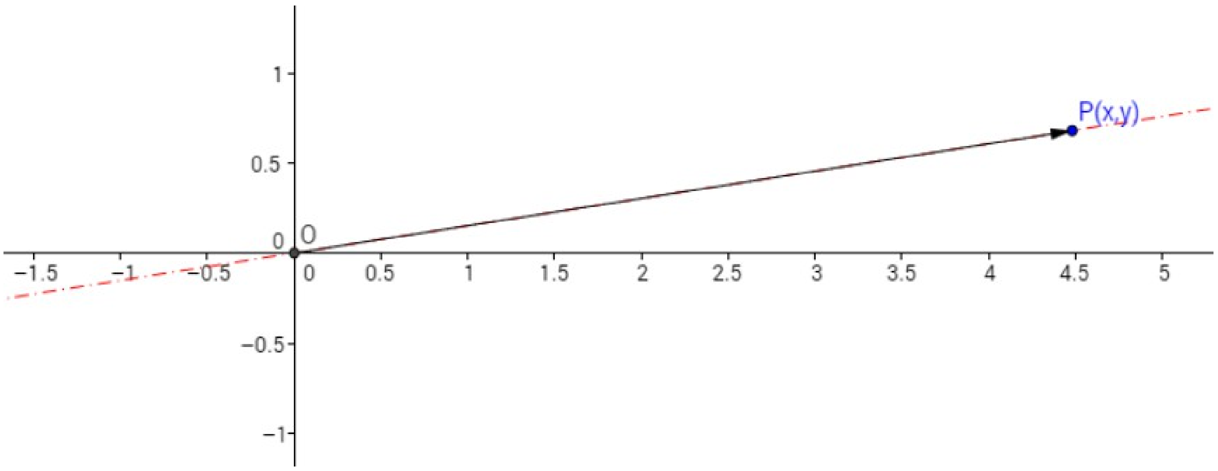
Si ese vector $\vec{AB}$ lo pinchamos en el origen de coordenadas $(0,0)$ diremos que tenemos su representante canónico. Y a este representante canónico se le suele representar con una letra minúscula:

$$\vec{u}=(x, y)$$

Donde x indica la primera coordenada del vector, mientras que y expresa la segunda coordenada del vector.

Por lo tanto, el representante canónico nace en el origen $(0,0)$ del sistema de referencia y termina en el punto de coordenadas $P(x, y)$.

$$representante \quad canónico \quad del \quad vector \quad \vec{u}=(x, y)$$



La dirección del vector $\vec{u}=(x\,,\,y)$ es la marcada por la recta que une sus dos extremos (indicada en rojo en la gráfica superior). Dos rectas paralelas indican la misma dirección.

El sentido del vector viene indicado por la flecha de su extremo final. Esta fecha siempre apunta desde el punto origen al punto final (en la gráfica superior, el sentido va desde el punto $O(0,0)$ al punto $P(x\,,y)$).

El módulo es la longitud del vector. Este módulo suele representarse con las barras de valor absoluto: $|\vec{AB}|$, $|\vec{u}|$.

Si desde el extremo $P(x\,,y)$ proyectamos perpendicularmente sobre el eje horizontal, tendremos un triángulo rectángulo de altura y y base x . Aplicando el teorema de Pitágoras la longitud del vector se obtiene como:

$$módulo \equiv |\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Un ejemplo en 3 dimensiones

Vamos a extender las definiciones del anterior apartado a tres dimensiones. En general, podemos hacerlo para n-dimensiones.

Sea un punto de coordenadas $A(x_1, y_1, z_1)$ y otro punto de coordenadas $B(x_2, y_2, z_2)$.

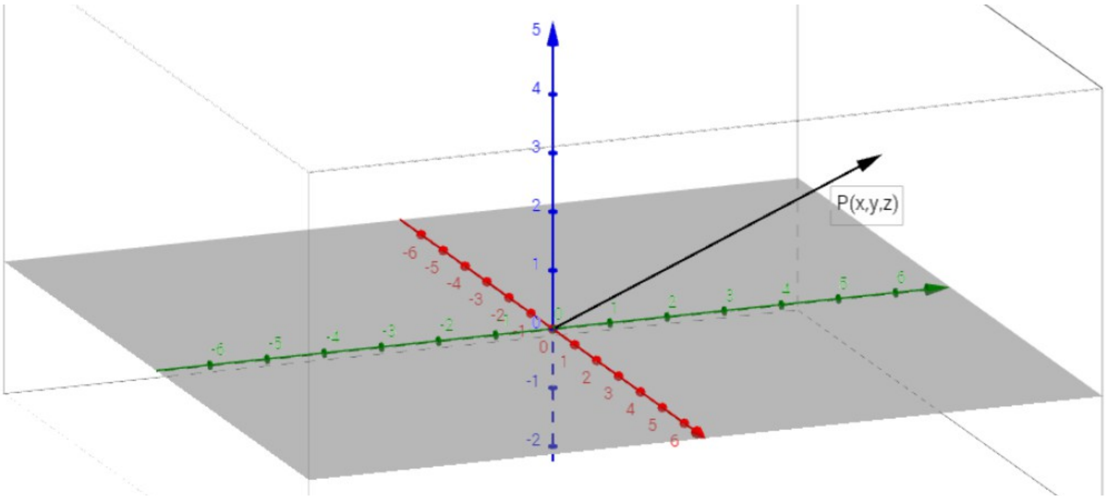
El vector con inicio en el punto A y fin en el punto B se calcula:

$$\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

Si hablamos de un vector libre podemos expresarlo como $\vec{u}=(x, y, z)$. Donde x indica la primera coordenada del vector, y la segunda coordenada del vector, z la tercera coordenada del espacio tridimensional.

Su representante canónico es el vector que nace en el origen $(0,0,0)$ del sistema de referencia y termina en el punto $P(x, y, z)$.

$$representante \quad canónico \quad del \quad vector \quad \vec{u}=(x, y, z)$$



La dirección del vector $\vec{u}=(x, y, z)$ es la marcada por la recta que une sus dos extremos .

El sentido del vector apunta del origen al final (en la gráfica superior, el sentido va del punto $O(0,0,0)$ al punto $P(x, y, z)$).

El módulo es la longitud del vector, que en tres dimensiones resulta una expresión análoga a la de dos dimensiones:

$$módulo \equiv |\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Vector unitario. Normalización

Un vector $\vec{u}$ es unitario si **su módulo es la unidad**: $|\vec{u}|=1$

Si en un vector arbitrario $\vec{u}$ dividimos cada componente por su módulo, el resultado es un nuevo vector con la misma dirección y sentido que $\vec{u}$ pero de módulo unidad. A este proceso se le denomina **normalización de un vector.**

$$\hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

Es costumbre representar los vectores unitarios de la forma $\hat{u}$, en vez de con la flecha tradicional de vector.

Ejemplo 1 resuelto

Normalizar el vector $\vec{u}=(\frac{1}{2},3)$ **.**

El módulo de este vector es $|\vec{u}|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+3^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+9}=\sqrt{\frac{37}{4}}=\frac{\sqrt{37}}{2}$

Su vector unitario asociado será:

$$\hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{(\frac{1}{2},3)}{\frac{\sqrt{37}}{2}}=(\frac{1}{\sqrt{37}},\frac{6}{\sqrt{37}})=racionalizando=(\frac{\sqrt{37}}{37},\frac{6\cdot\sqrt{37}}{37})$$

Es fácil comprobar que el módulo de este vector es la unidad:

$$|\hat{u}|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{37}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{37}}\right)^2}=\sqrt{\frac{37}{37}}=1$$