Problemas – Tema 6

Problemas resueltos - 9 - resolver ecuaciones matriciales

1. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ **resolver la ecuación** $A \cdot X=B$

Estos problemas de ecuación matriciales se pueden resolver de dos formas:

- Colocando incógnitas en los elementos de $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, operar y resolver el sistema resultante.

- Aplicar matriz inversa y despejar X , de la forma: $X=A^{-1}B$ (en capítulos posteriores del tema aprenderemos a obtener la matriz inversa)

La primera opción es práctica para matrices 2×2 ya que resulta un sistema 4×4 que no suele ser difícil de resolver. Pero para matrices $3x3$ es poco práctico porque genera un sistema 9×9 largo de resolver.

La segunda opción se puede aplicar siempre que exista la inversa A^{-1} . Si esta inversa existe, la solución de X será única y podremos aplicar este método. Si no existe A^{-1} la solución de X no será única y solo podremos resolverla con la primera opción, dando incógnitas a los elementos de X .

$$X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad , \quad A \cdot X=B \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ x+2z & y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Igualamos cada coeficiente de las matrices, y obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} 2x+3z=3 \\ 2y+3t=1 \\ x+2z=2 \\ y+2t=-5 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{De la tercera} \quad x=2-2z \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} 2(2-2z)+3z=3 \\ 2y+3t=1 \\ y+2t=-5 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{De la primera} \quad z=1$$

$$\begin{Bmatrix} 2y+3t=1 \\ y+2t=-5 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{De la segunda} \quad y=-5-2t \quad \rightarrow \text{En la primera} \quad 2(-5-2t)+3t=1 \quad \rightarrow \quad t=-11$$

La solución general es: $x=0, y=17, z=1, t=-11 \quad \rightarrow \quad X=\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$

2. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ **resolver la ecuación** $X\cdot A+B=C$

Llamamos $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ y operamos.

$$X\,A=C-B \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}x+y & x+2y\\ z+t & z+2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

Igualamos componentes y formamos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\begin{Bmatrix}x+y=-1\\ x+2y=1\\ z+t=1\\ z+2t=-2\end{Bmatrix} \rightarrow \text{De la tercera} \quad z=1-t \;\rightarrow\; \begin{Bmatrix}x+y=-1\\ x+2y=1\\ 1-t+2t=-2\end{Bmatrix} \rightarrow \text{De la tercera} \quad t=-3$$

$$\begin{Bmatrix}x+y=-1\\ x+2y=1\end{Bmatrix} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones} \quad -y=-2 \;\rightarrow\; y=2 \;\rightarrow \text{En la primera} \quad x=-3$$

La matriz solución resulta $X=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$

3. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ **resolver las ecuaciones:**

a) $X\cdot A=B+I$

b) $A\,X+B\,X=C$

c) $X\,A\,B-X\,C=2\,C$

a) $X\cdot A=B+I$ → si existe A^{-1} → $X=(B+I)A^{-1}$ (fíjate que la inversa se aplica por la derecha)

$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ → sus vectores no son proporcionales porque $\frac{1}{3}\neq\frac{1}{4}$ → rango 2 → existe A^{-1}

$A\,A^{-1}=I$ → $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{Bmatrix}a+c=1\\ b+d=0\\ 3a+4c=0\\ 3b+4d=1\end{Bmatrix}$ → De la primera $a=1-c$ → $\begin{Bmatrix}b+d=0\\ 3(1-c)+4c=0\\ 3b+4d=1\end{Bmatrix}$ → De la segunda $c=-3$ →

$\begin{Bmatrix}b+d=0\\ 3b+4d=1\end{Bmatrix}$ → De la primera $b=-d$ → En la segunda $-3d+4d=1$ → $d=1$

La matriz inversa resulta $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

$X=(B+I)A^{-1}$ → $X=[\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}]\cdot\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ → $X=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}12-3 & -3+1\\ 4-6 & -1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

b) $A\,X+B\,X=C$ → Sacamos factor común por la derecha → $(A+B)X=C$ → $X=(A+B)^{-1}C$

Fíjate que aplicamos inversa por la izquierda.

Podremos resolver de esta forma si existe la inversa $(A+B)^{-1}$

$A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$

$(A+B)$ Admite inversa porque el rango es 2 al tener dos vectores independientes → $\frac{3}{4}\neq\frac{2}{5}$

$$(A+B)(A+B)^{-1}=I \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 4a+5c & 4b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{Bmatrix} 3a+2c=1 \\ 3b+2d=0 \\ 4a+5c=0 \\ 4b+5d=1 \end{Bmatrix}$ → De la tercera $a=\frac{-5}{4}c \rightarrow \begin{Bmatrix} 3(\frac{-5}{4}c)+2c=1 \\ 3b+2d=0 \\ 4b+5d=1 \end{Bmatrix} \rightarrow$

→ De la primera $\frac{-15}{4}c+2c=1 \rightarrow c=\frac{-4}{7} \rightarrow \begin{Bmatrix} 3b+2d=0 \\ 4b+5d=1 \end{Bmatrix}$ → De la primera $b=\frac{-2}{3}d$

$\rightarrow 4(\frac{-2}{3}d)+5d=1 \rightarrow \frac{-8}{3}d+5d=1 \rightarrow d=\frac{3}{7}$

La matriz inversa resulta $(A+B)^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

$$X=(A+B)^{-1}C=\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}-\frac{2}{7} & \frac{10}{7}-\frac{6}{7} \\ \frac{-4}{7}+\frac{3}{7} & \frac{-8}{7}+\frac{9}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

c) $XAB-XC=2C$ → Sacamos factor común por la izquierda → $X(AB-C)=2C$

$X=2C(AB-C)^{-1}$ → Podremos resolver de esta forma si existe la inversa $(AB-C)^{-1}$

Fíjate que en esta ocasión hemos aplicado inversa por la derecha.

$$AB-C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+1 \\ 6+4 & 3+4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz $AB-C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ admite inversa, ya que el rango es dos por ser sus vectores linealmente independientes, ya que no son proporcionales → $\frac{2}{9} \neq \frac{0}{4}$. Calculemos su inversa.

$$(AB-C)(AB-C)^{-1}=I \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \left\{ \begin{matrix} 2a=1 \\ 2b=0 \\ 9a+4c=0 \\ 9b+4d=1 \end{matrix} \right\} \;\rightarrow\; a=\frac{1}{2},\; b=0$$

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{9}{2}+4c=0 \\ 4d=1 \end{matrix} \right\} \;\rightarrow\; c=\frac{-9}{8} \;,\; d=\frac{1}{4}$$

La matriz inversa resulta → $(AB-C)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-9}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

La matriz solución resulta → $X=2C(AB-C)^{-1} \;\rightarrow\; X=2\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-9}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$X=2\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{9}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{27}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{-7}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-23}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{2} & 1 \\ \frac{-23}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

4. Determina la matriz X que satisface la ecuación

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Suponemos: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Primero realizo el producto de matrices del término izquierdo.

$$\begin{pmatrix} -x+2z & -y+2t \\ 3x & 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Sumamos en el término de la izquierda.

$$\begin{pmatrix} -x+2z & -y+2t+2 \\ 3x+5 & 3y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualamos término a término, formando un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\left\{ \begin{matrix} -x+2z=-3 \\ -y+2t+2=8 \\ 3x+5=8 \\ 3y-1=5 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} -x+2z=-3 \\ -y+2t=6 \\ 3x=3 \\ 3y=6 \end{matrix} \right\} \rightarrow x=1 \quad , \quad y=2 \quad , \quad t=4 \quad , \quad z=-1$$

Es decir: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

5. Si $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}$ **, calcula el valor del número real** a **para que se cumpla** $A^2=I$

$$A^2=I \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Operamos e igualamos a cada término m_{ij} de la matriz identidad:

$m_{11} \rightarrow 1=1$

$m_{12} \rightarrow 1+a=0 \rightarrow a=-1$

$m_{13} \rightarrow 1+a=0 \rightarrow a=-1$

$m_{21} \rightarrow 0=0$

$m_{22} \rightarrow a^2=1 \rightarrow a=\pm 1$

$m_{23} \rightarrow 0=0$

$m_{31} \rightarrow 0=0$

$m_{32} \rightarrow 0=0$

$m_{33} \rightarrow a^2=1 \rightarrow a=\pm 1$

Por lo tanto, la condición que cumple todas las igualdades es $a=-1$.

6. Determina las matrices cuadradas de dimensión 2x2 de la forma $M=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}$ **que verifiquen que** $M\cdot M^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ **.**

$\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ → Operamos y obtenemos un sistema de 4 ecuaciones y 2 incógnitas.

$$\left.\begin{cases}1+x^2=1\\ x\cdot y=0\\ y\cdot x=0\\ y^2=4\end{cases}\right\} \rightarrow \quad x=0 \ , \ y=\pm 2 \ \rightarrow \quad M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \ , \ M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

7. Sea el sistema matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Determine los valores de a para que el sistema sea compatible.

b) Calcule todas las soluciones en el caso en el que sea compatible indeterminado y en el caso $a=3$.

a) Resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3a & 2a & 2a & 1 \end{array}\right) \rightarrow F_2 \Leftrightarrow F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3a & 2a & 2a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow F'_2 = F_2 - 3aF_1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -a & -a & 1-6a \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow F'_3 = F_3 - F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -a & -a & 1-6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Obviamos } F_3 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -a & -a & 1-6a \end{array}\right)$$

Tras obtener la matriz triangular del método de Gauss, comprobar que no hay absurdos matemáticos y eliminar filas proporcionales, el rango del sistema coincide con el número de ecuaciones con al menos un coeficiente no nulo.

Para la discusión de casos, consideramos: $-a=0 \rightarrow a=0$

- Si $a=0$ → En la matriz fina de Gauss → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ → En la segunda ecuación encontramos el absurdo $0=1$ → Absurdo matemático → No hay solución → Sistema Incompatible.
- Caso complementario si $a \neq 0$ → En la matriz final de Gauss tenemos Rango 2 → Al ser el sistema de 3 incógnitas, tendremos SCI con infinitas soluciones con un parámetro libre.

b) Tenemos SCI para el caso $a \neq 0$. El sistema resulta:

$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ -ay-az=1-6a \end{array}\right\}$ → Si $z=b \in \mathbb{R}$ parámetro libre, en cada ecuación podremos despejar el resto de incógnitas → En la segunda ecuación → $-ay=1-6a+a\cdot b \rightarrow y=\frac{-1}{a}+6-b$ → Llevando este resultado a la primera ecuación → $x=\frac{1}{a}-4$

Para el caso particular $a=3$ las solucione serán:

$$x=\frac{1}{3}-4=\frac{-11}{3} \rightarrow y=\frac{-1}{3}+6-b=\frac{17}{3}-b \rightarrow z=b$$

8. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule el valor de x **para que se cumpla** $A+B+C^2=3\cdot I$

b) Calcular la matriz X **solución de la ecuación matricial** $A\cdot X+C^2=3\cdot I$

a) $C^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$A+B+C^2=\begin{pmatrix} 3 & x-2 \\ x-2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A+B+C^2=3\cdot I \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & x-2 \\ x-2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si igualamos coeficientes, la igualdad de matrices se cumple si $x=2$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+1 & b-2 \\ a-c-2 & b-d+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Igualamos coeficientes y tendremos un sistema 4x4.

$$\left\{\begin{array}{c} a+1=3 \\ b-2=0 \\ a-c-2=0 \\ b-d+5=3 \end{array}\right\} \rightarrow a=2 \;,\; b=2 \;,\; c=0 \;,\; d=4$$