

KMITAVÉ MEDITACE

Mathematické kývadlo

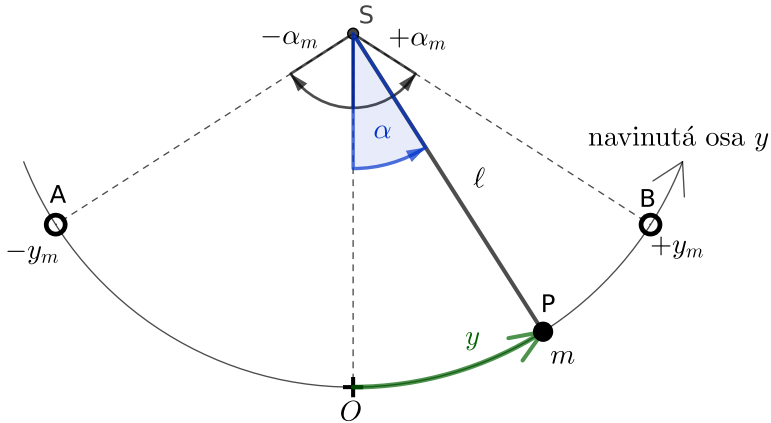
Žán Pól Kastról



13. června 2023



1 Popis pohybu $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{Y}$



Obr. 1:

<https://www.geogebra.org/m/v6vb92tj>

Definice 1: Mathemické kýmado

$\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{Y}$ = hmotný bod P o hmotnosti m zavěšený v bodě S na nehmotném provázku o délce ℓ (viz obr.1).

Uvažujme **netlumené** kmity. (Bez odporu vzduchu a bez tření v místě závěsu S .) Bod P se do zblbnutí pohybuje:

- po kruhovém oblouku AB se středem S ,
- nerovnoměrným pohybem,
- kolem rovnovážné polohy v bodě O ,



- v bodech A, B má nulovou rychlost,
- v bodě O má maximální rychlost

Zvolíme souřadnou soustavu – vystačíme si s $1D$ – osu y navineme podél kruhového oblouku AB a počátek prdne do rovnovážné polohy O . Osa y je orientována kladně od O k B .

- Zavedeme *okamžitou obloukovou výchylku* y jakožto souřadnici bodu P na navinuté ose y . (Vpravo od počátku O je $y > 0$, vlevo je $y < 0$.)
- *Maximální oblouková výchylka* y_m je délka oblouků AO a AB ; body A, B mají tedy obloukové souřadnice $y_A = -y_m, y_B = +y_m$.
- Zavedeme *okamžitou úhlovou výchylku* α jakožto *orientovaný úhel* OSP . Kladný smysl je proti směru hodinových ručiček.
- *Maximální úhlová výchylka* α_m je velikost úhlů OSA a OSB ; body A, B mají tedy úhlové souřadnice $\alpha_A = -\alpha_m, \alpha_B = +\alpha_m$.

2 Síly působící na MAKY

Popisujme pohyb bodu P z hlediska *inerciální VS* spojené se Zemí (žádné setrvačné síly). Z povahy pohybu bodu P plyne, že ve hře budou dvě podstatné síly:

- Pač pohyb bodu P se děje **po kružnici**, je zřejmé, že na P bude působit nějaká **dostředivá síla** ve **směru provázku**, která má **zotáčecí funkci**.
- Pač pohyb bodu P je současně **nerovnoměrný**, musí na P působit také nějaká síla ve **směru tečny** ke kružnici, která má **urychlovací a brzdou funkci**.

Tyto dvě síly musí vzniknout díky součinnosti nějakých reálných těles, která působí na hmotný bod P .

Reálná tělesa jsou zde dvě – Zeměkoule a provázek, na kterém je bod P zavěšen (viz obr.2). Na bod P tedy působí **tíhová síla** \vec{F}_G a **provázková síla** \vec{F}_P

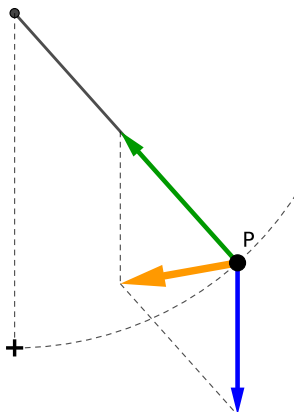


$$\vec{F}_v = \vec{F}_p + \vec{F}_G$$

☑ \vec{F}_v – **VÝSLEDNÁ SÍLA**

☑ \vec{F}_p – provázková síla \vec{F}_p

☑ \vec{F}_G – tíhová síla



Obr. 2: **Výsledná** síla jakožto složenina reálných sil – **provázkové** a **tíhové**.

<https://www.geogebra.org/m/wpqr5pmg>

Tyto dvě síly nám dají jistou **výslednici** \vec{F}_v . No a my si nyní tuto výslednici krásně rozložíme do těch dvou směrů, které potřebujeme (obr.3).

Hnědá síla nám nutí bod P zatáčet a má tedy funkci síly dostředivé \vec{F}_{do} . Červená síla bod P urychluje a brzdí (podle toho, kam se bod právě pohybuje).

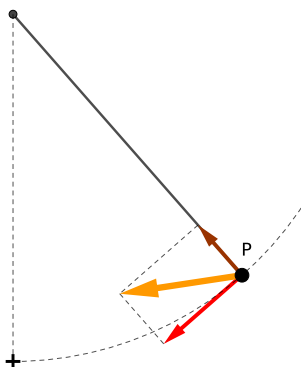
Rozložíme modrou tíhovou sílu z obr.2 do směru tečny a do směru provázku (viz obr.4). Vidíme, že **tečná složka** tíhové síly \vec{F}_t je vlastně **urychlovací** silou z obr.3.

Nyní čummež na obr.5. Vidíme, že složíme-li **normálovou složku** tíhové síly s **provázkovou silou**, dostáváme dostředivou sílu \vec{F}_{do} , která



$$\vec{F}_v = \vec{F}_{\text{zatáč}} + \vec{F}_{\text{urych}}$$

- \vec{F}_v – VÝSLEDNÁ SÍLA
- Zatáčecí složka výslednice
- Urychlovací (brzdňá) složka výslednice



Obr. 3: Rozklad **výslednice** na **zatáčecí** a **urychlovací** složku.

<https://www.geogebra.org/m/wpqr5pmg>

je vlastně zatáčecí silou z obr.3.

Shrnutí: V obr.6 máme všechny síly, které jsme teď prošli. Podstatné je si uvědomovat, že reálné síly – vyvolané konkrétními tělesy – jsou zde jen **dvě** (tíhová, provázková). Zbylé síly jsou jen v naší neposkvřené mysli a vznikají díky silovému skládání a rozkládání.

V apletech, ke kterým vedou odkazy v obrázcích 2 až 6, je dobré si povšimnout toho, jak se jednotlivé síly mění v průběhu kmitání bodu P . Například **dostředivá síla** je v krajních polohách nulová (bod P stojí, takže není potřeba ho nutit zatáčet), kdežto v rovnovážné poloze O je maximální (při velké rychlosti musím nutit bod P hodně zatáčet).

Dále si můžeme povšimnout provázkové síly, kterou působí provázek na kuličku P . Uvědomme si, že reakcí k této síle je síla, kterou kulička napíná provázek – je to tedy **tíha kuličky** \vec{G} (Ta není v obrázcích

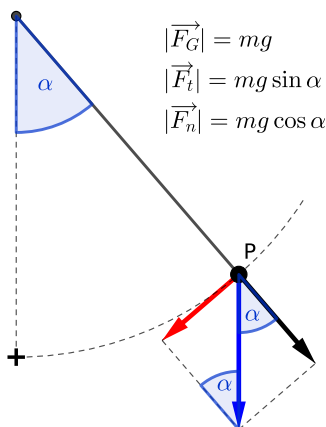


$$\vec{F}_G = \vec{F}_t + \vec{F}_n$$

✓ \vec{F}_G – tíhová síla

✓ \vec{F}_t – tečná složka tíhové

✓ \vec{F}_n – normálová slož. tíhové



Obr. 4: Rozklad **tíhové** síly na **tečnou** a **normálovou** složku.

<https://www.geogebra.org/m/bqf3nxdy>

nakreslena). Vidíme, že provázková síla je největší v rovnovážné poloze, takže také tíha kuličky zde bude největší a provázku tu nejvíce hrozí přetržení.

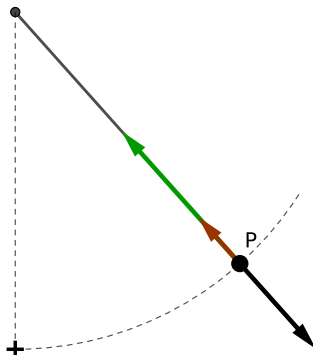
Navíc v rovnovážné poloze vidíme, že provázková síla je rovna tíhové síle zvětšené o sílu dostředivou – takže **tíha kuličky v rovnovážné poloze je v pohybu větší než v klidu!** Ale to si zaslouží samostatný rozbor a konkrétní příklad řešený jak z hlediska \mathcal{TVS} , tak z hlediska \mathcal{NVS} .

Ólrajt! Nyní se zaměřmež na tu červenou sílu – tedy tečnou složku tíhové síly \vec{F}_t , o níž víme, že její funkce je urychlovat a brzdit kuličku P na její dobrodružné pouti po oblouku AB . Neboť je to ona, která způsobuje kmitavý pohyb kuličky. To ona neustále a neúnavně **vrací** neposednou kuličku do rovnovážné polohy, vede ji ke zlaté střední cestě mezi



$$\vec{F}_{do} = \vec{F}_n + \vec{F}_p$$

- \vec{F}_{do} – dostředivá síla
- \vec{F}_p – provázková síla \vec{F}_p
- \vec{F}_n – normálová slož. tíhové



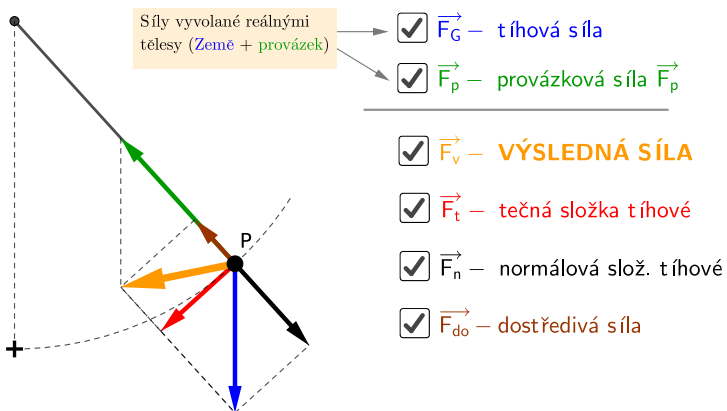
Obr. 5: **Dostředivá** síla jakožto výslednice **provázkové** síly a **normálové** složky tíhové síly.

<https://www.geogebra.org/m/nmcpna5p>

extrémní levicí a extrémní pravicí! Proto ji právem můžeme titulovat vznešeným názvem **vratná síla**.

Vzpomeňmež tělesa kmitajícího na vodo-rovné pružině či na svislé pružině. Tam byly vratnými silami síla pružnosti pružiny, resp. výslednice síly pružnosti pružiny a síly tíhové. Přitom víme, že pohyb tělesa v těchto dvou případech byl krásně **harmonický**. Vzniká otázka, zda je harmonický i pohyb matematického kývadla?

Na tuto otázku odpovíme v další kapitole!



Obr. 6: Přehled všech sil.

<https://www.geogebra.org/m/e2tmxtnd>



3 Je MAKY harmonickým oscilátorem?

Připomeňme si dvě možnosti, jak rozpoznat, zda je kmitavý pohyb harmonický (tedy zda se jedná o harmonický oscilátor).

První je přímo *kinematická definice* harmonického kmitavého pohybu:

Definice 2: Harmonický kmitavý pohyb

Harmonický kmitavý pohyb (\mathcal{HKP}) je takový pohyb, pro který platí, že *okamžitá výchylka* z rovnovážné polohy y je **harmonickou** funkcí času t , tedy

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

kde y_m je maximální výchylka, ω je úhlová frekvence a φ_0 je počáteční fáze.

Druhou možností odhalení, že je pohyb harmonický, je **dynamické kritérium** \mathcal{HKP} , které operuje s vratnou silou:

Věta 1: Kritérium \mathcal{HKP}

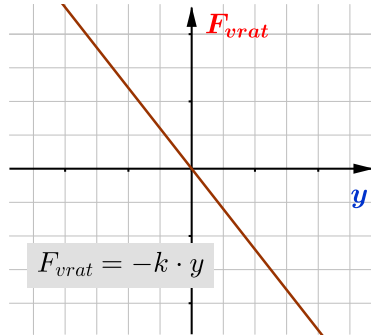
Kmitavý pohyb je **harmonický**, právě když jsou splněny dvě podmínky:

- 1) Vratná síla je **přímo úměrná** okamžité výchylce.
- 2) Vratná síla má **opačný směr** než okamžitá výchylka.

Tedy:

$$F_{vrat} = -k \cdot y \quad (2)$$

kde k je jistá konstanta úměrnosti.

Obr. 7: Kritérium $\mathcal{H}\mathcal{K}\mathcal{P}$

Graficky vyjádřeno – viz obr.7

My nyní využijeme právě tohoto kritéria.

Víme, že vratnou silou je v případě $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{Y}$ tečná složka tíhové síly \vec{F}_t , která má dle obr.4 velikost $|\vec{F}_t| = mg \sin \alpha$.

Dle obr.8a má vratná síla vždy opačný směr než úhlová i oblouková výchylka, takže můžeme psát

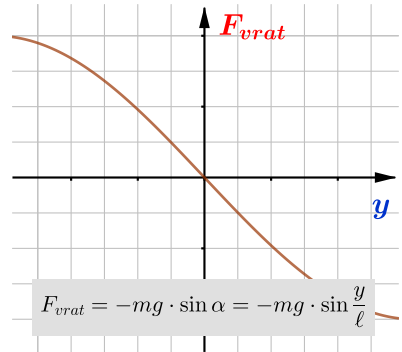
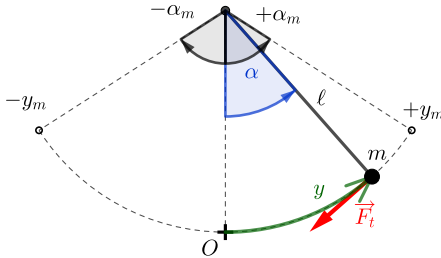
$$F_t = -mg \sin \alpha \quad (3)$$

A vzhledem ke vztahu $y = \alpha \ell$ (ES JE FÍR) dostáváme

$$F_t = -mg \cdot \sin \frac{y}{\ell} \quad (4)$$

Vidíme, že $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{Y}$ to má tak, že sice vratná síla má opačný směr než okamžitá (úhlová i oblouková) výchylka, avšak **podmínka přímé úměrnosti splněna není**, pač funkce sinus není bohužel kužel lineární (viz obr.8b).

Závěr je tedy:



(a) Vratná síla \vec{F}_t má **opačný směr** než okamžitá úhlová i oblouková výchylka.

(b) Vratná síla **není lineární**

Obr. 8: Vratná síla u $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{Y}$

<https://www.geogebra.org/m/rws6cnyb>

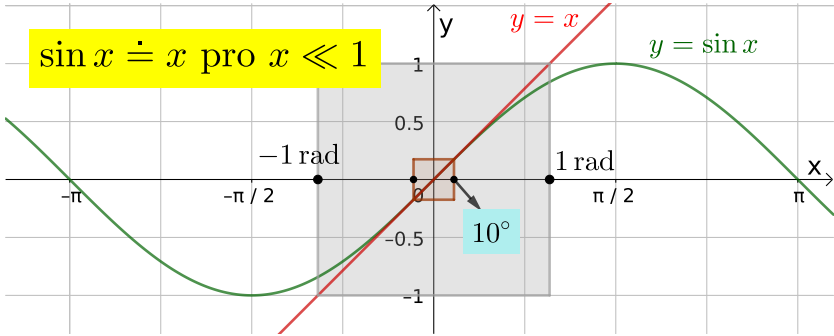
$\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{Y}$ není harmonickým oscilátorem!

Tímto skandálním odhalením se situace trochu komplikuje, pač $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{Y}$ není tak jednoduchý oscilátor jako třeba **závaží na pružině**.

Dál se můžeme vydat dvěma cestami:

1. **Cestou lineární aproximace** (jednodušší) – přimhouříme oko a za jistých podmínek budeme **považovat $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{Y}$ za harmonický oscilátor**.

- Dostaneme **přibližný vzorec pro periodu** (analogický vztahu pro závaží na pružině) a
- **přibližný průběh okamžité výchylky v závislosti na čase** – sinusový jako u $\mathcal{H}\mathcal{K}\mathcal{P}$.



Obr. 9

2. **Cestou nelineární** (složitější) – zachováme nelineárnost vratné síly.

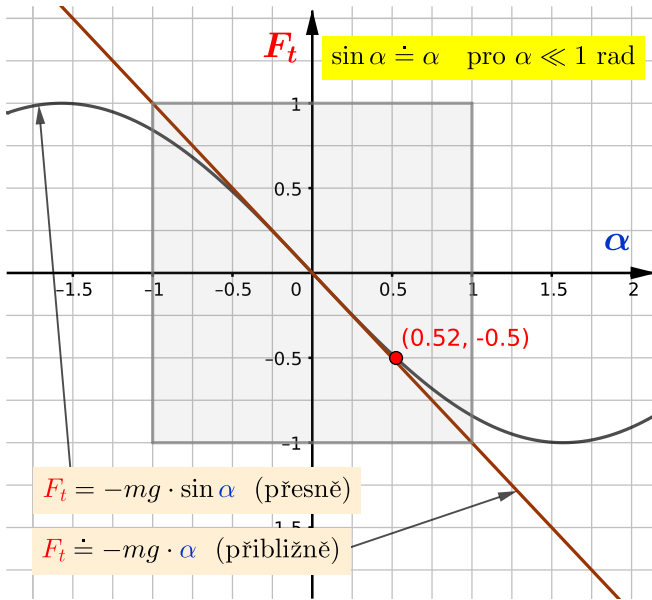
- Najdeme **přesný vzorec pro periodu** a
- **přesný průběh okamžité výchylky v závislosti na čase.**

4 Lineární aproximace

Každej blbec asi už slyšel o té fantastické aproximaci funkce $y = \sin x$ funkcí $y = x$ pro velmi malá x – viz obr.9. Zde složitou funkci sinus nahrazujeme mnohem jednodušší funkcí $y = x$, tedy přímkou úměrností. Tato finta se v matematice i fyzice používá velice často a již leta (již od pravěku) a představuje obrovské zjednodušení popisu mnoha jevů – pokud ovšem dodržíme podmínku $x \ll 1$ (V obr.9 máme pro srovnání šedý čtverec ± 1 rad a hnědý čtverec $\pm 10^\circ$.)

Ól-rajt saj-rajt! Pojdme se oddat této lákavé aproximaci (viz10). Pokud tedy bude $\alpha \ll 1$ rad, můžeme vztahy (5) a (4) psát ve tvaru

$$F_t \doteq -mg \cdot \alpha = -mg \cdot \frac{y}{\ell}$$



Obr. 10: Pojdme linearizovat vratnou sílu!

<https://www.geogebra.org/m/q2xb2by7>

tedy

$$F_t \doteq -k \cdot y; \quad k = \frac{mg}{\ell} \quad \text{pro } \alpha \ll 1 \text{ rad} \quad (5)$$

4.1 Přibližný vztah pro periodu \mathcal{MAKY}

Nyní snadno odvodíme přibližný vzorec pro úhlovou frekvenci a periodu \mathcal{MAKY} , pač ho považujeme za harmonický oscilátor (\mathcal{HOS}), pro který



platí obecný vztah

$$\omega_{HOS} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6)$$

kde k je konstanta úměrnosti ve vztahu (2), tedy v našem případě $k = \frac{mg}{\ell}$. Po dosazení do (6) dostáváme pro úhlovou frekvenci \mathcal{MAKY} :

$$\omega_{MAKY} \doteq \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (7)$$

A vzhledem k tomu, že $\omega = \frac{2\pi}{T}$ máme samolitr také vztah pro periodu:

$$T_{MAKY} \doteq 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (8)$$

Povšimneme si **tří esenciálních vlastností** vztahu (8), které na základě mnoha pokusů objevil jako první Galileo Galilei (1602). Krásně je vše zobrazeno ve videu[4].

1. Perioda **nezávisí vůbec na počáteční výchylce** (α_m) kyvadla. Galileo si toho prý všiml u **lustru** v chrámu v Pise. Tomuto jevu se říká *isochronismus*. Hraje důležitou roli u kyvadlových hodin.
2. Perioda **nezávisí vůbec na hmotnosti** kuličky. To je analogické Galileovu objevu, že při **volném pádu** nezávisí zrychlení padajících těles na jejich hmotnosti.
3. Perioda **závisí na délce** kyvadla. Čím větší je délka, tím delší je perioda. Ale ve vztahu je délka pod odmocninou, takže např. 4× delší kyvadlo nemá 4×, ale jen 2× delší periodu! Galileo přirovnává dvě kyvadla, kdy delší má i větší periodu, k **planetám**, kdy planeta vzdálenější od Slunce má také delší periodu.



Jenom si pro všechno na světě pořád uvědomujme, že pracujeme s přibližnou aproximací (kdy jsme nahradili sinusoidu lineární funkcí), takže vztah pro periodu platí jen přibližně.

Jak uvidíme později, ve skutečnosti perioda na počáteční výchylce α_m **závisí** – a to tím více, čím je počáteční výchylka větší, takže vlastnost 1. platí opravdu jen přibližně. Galileo však neměl šanci s tehdejšími experimentálními prostředky tuto závislost odhalit.

Vlastnost 2. platí i při velkých výchylkách, ale stejně jako u volného pádu musíme požadovat pohyb ve vakuu. (Ve vzduchu padají různá tělesa s různým zrychlením!)

Vlastnost 3. také platí i při velkých výchylkách.

4.2 Přibližný vztah pro $y(t)$, $v(t)$, $a(t)$ *MAKY*

Pač jsme začali považovat *MAKY* pro $\alpha \ll 1$ rad přibližně za *HOS*, musí okamžité hodnoty obloukové výchylky, rychlosti i zrychlení být přibližně dány vztahy

$$\begin{aligned}y(t) &\doteq y_m \sin(\omega t + \varphi_0) \\v(t) &\doteq v_m \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega y_m \cos(\omega t + \varphi_0) \\a(t) &\doteq -a_m \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y_m \sin(\omega t + \varphi_0)\end{aligned}$$

Pojďme vychýlit kývadlo v čase $t = 0$ do krajní polohy $y(0) = +y_m$. Potom bude zřejmě počáteční fáze $\varphi_0 = +\frac{\pi}{2}$ (viz obr.11a). Pač platí

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

dostáváme vztahy

$$y(t) \doteq y_m \cos \omega t \tag{9}$$

$$v(t) \doteq -v_m \sin \omega t = -\omega y_m \sin \omega t \tag{10}$$

$$a(t) \doteq -a_m \cos \omega t = -\omega^2 y_m \cos \omega t \tag{11}$$

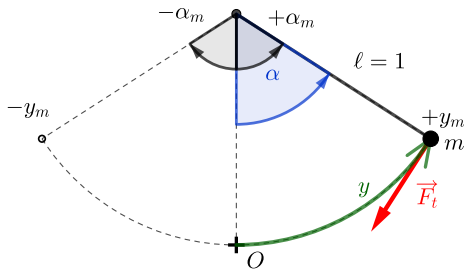


Analogické vztahy platí i pro úhlovou výchylku $\alpha(t)$, úhlovou rychlost nerovnoměrného pohybu po oblouku kružnice $\Omega(t)$ (neplést s úhlovou frekvencí ω !) a pro úhlové zrychlení $\varepsilon(t)$.

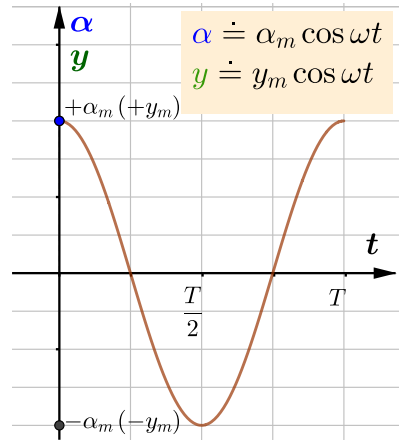
$$\alpha(t) \doteq \alpha_m \cos \omega t \quad (12)$$

$$\Omega(t) \doteq -\omega \alpha_m \sin \omega t \quad (13)$$

$$\varepsilon(t) \doteq -\omega^2 \alpha_m \cos \omega t \quad (14)$$



(a)

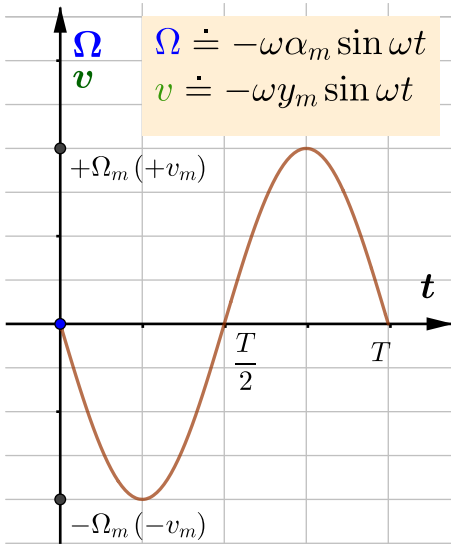


(b)

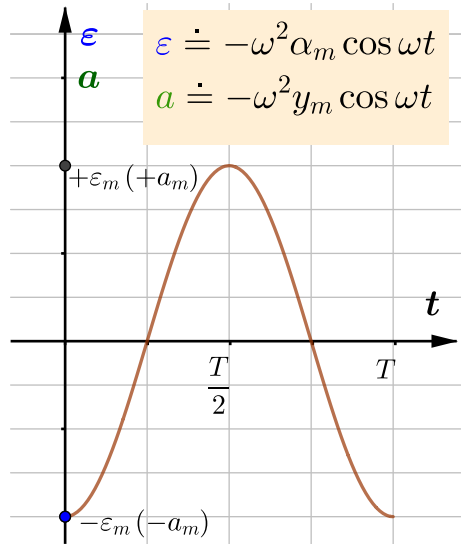
Obr. 11: Přibližný průběh okamžité výchylky \mathcal{MAKY} .
 Skutečný průběh má větší periodu a není to přesná sinusoida.
 Viz další kapitola.

<https://www.geogebra.org/m/sje7bbtr>

<https://www.geogebra.org/m/kdhrvkwm>



(a) Úhlová a obvodová rychlost



(b) Úhlové a obvodové zrychlení

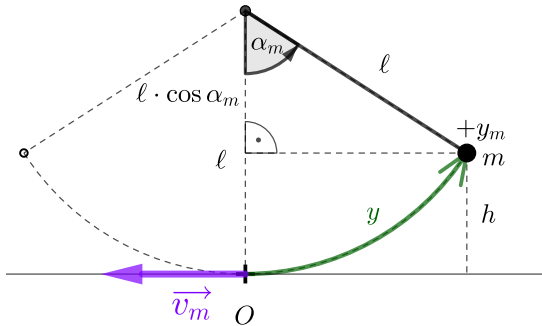
Obr. 12: Přibližné průběhy rychlosti a zrychlení *MAKY*
 Skutečný průběh má větší periodu a není to přesná sinusoida.
 Viz další kapitola.



Příklad 1: Rychlost kuličky v rovnovážné poloze

Urči rychlost kuličky $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{Y}$ v rovnovážné poloze v závislosti na počáteční úhlové výchylce α_m . Řeš:

- 1) obecně
 - a) pomocí vztahu (10)
 - b) pomocí $\mathcal{Z}\mathcal{Z}\mathcal{M}\mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{H}\mathcal{E}\mathcal{N}$
- 2) číselně pro $\ell = 1$ m, $g = 9,80665$ ms⁻² a pro úhly
 - a) $\alpha_m = 5^\circ$
 - b) $\alpha_m = 45^\circ$
 - c) $\alpha_m = 90^\circ$



Obr. 13

No tudlencto je fakt Boží příklad! Lec gou onit!



1a) Je jasné, že v rovnovážné poloze bude rychlost maximální, tedy dle vztahu (10) je $v_m = \omega y_m$. Sem dosadíme

$$\omega \doteq \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{a} \quad y_m = \alpha_m \cdot \ell \quad (\text{ES JE FÍR})$$

a dostáváme $v_m \doteq \alpha_m \cdot \ell \cdot \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ tedy

$$v_m \doteq \alpha_m \cdot \sqrt{g\ell} \quad (\text{a})$$

1b) Kulička má v krajní poloze (viz obr.13) pouze potenciální energii $E_p = mgh$ a ta se přemění na kinetickou energii v rovnovážné poloze $E_k = \frac{1}{2}mv_m^2$, kde je potenciální energie nulová. Dle *ZZMECHEN* platí

$$mgh = \frac{1}{2}mv_m^2$$

Odtud máme

$$v_m = \sqrt{2gh}$$

Dle obr. 13 je

$$h = \ell - \ell \cos \alpha_m = \ell(1 - \cos \alpha_m)$$

Pročež máme

$$v_m = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \alpha_m)}$$

neboli

$$v_m = \sqrt{2(1 - \cos \alpha_m)} \cdot \sqrt{g\ell} \quad (\text{b})$$



Srovnání vztahů (a) a (b): Vztah (a) je pouze **přibližný**, kdežto vztah (b) je **přesný** (pokud odhlédneme od odporových sil).

Vztah (a) vznikl na základě lineární aproximace

$$\sin \alpha_m \doteq \alpha_m \quad \text{pro } \alpha_m \ll 1 \text{ rad}$$

Snadno ukážeme, že za této podmínky přejde vztah (b) ve vztah (a). Stačí (b) vydělit dvěma a upravit:

$$\frac{v_m}{2} = \frac{\sqrt{2(1 - \cos \alpha_m)}}{2} \cdot \sqrt{g\ell}$$

$$\frac{v_m}{2} = \sqrt{\frac{2(1 - \cos \alpha_m)}{4}} \cdot \sqrt{g\ell}$$

$$\frac{v_m}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha_m}{2}} \cdot \sqrt{g\ell}$$

$$\frac{v_m}{2} = \sin \frac{\alpha_m}{2} \cdot \sqrt{g\ell}$$

Pač předpokládáme, že $\alpha_m \ll 1 \text{ rad}$, potom jistě i $\frac{\alpha_m}{2} \ll 1 \text{ rad}$ a můžeme použít $\sin \frac{\alpha_m}{2} \doteq \frac{\alpha_m}{2}$:

$$\frac{v_m}{2} \doteq \frac{\alpha_m}{2} \cdot \sqrt{g\ell}$$

$$v_m \doteq \alpha_m \cdot \sqrt{g\ell}$$

což je vskutku vztah (a)!

2) Tejkonc číselně: Rovnou to frkne do tabulky a určíme též relativní chybu přibližného vzorce:

α_m	5°	45°	90°
$v_m \doteq \alpha_m \cdot \sqrt{g\ell}$	0,2733	2,4595	4,9190
$v_m = \sqrt{2(1 - \cos \alpha_m)} \cdot \sqrt{g\ell}$	0,2732	2,3968	4,4287
Rel. chyba	0,03%	2,6%	11,1 %



Krásně je vidět, že přesná rychlost (dle ZZMECHEN) je vždy trochu menší než rychlost daná přibližným vzorcem. To dává smysl, pač tečná složka tíhové síly (která je vratnou silou) brání poctivě podle sinusoidy, je v krajních polohách trochu menší než linearizovaná síla (viz obr.10).

Dále vidíme, že s rostoucí počáteční výchylkou se chyba přibližného vzorce prudce zvyšuje.

5 Nelineární aproximace

Víme, že vratná síla kyvadla je dána vztahem

$$F_t = -mg \sin \alpha$$

a my ho krzevá větší přesnost nechceme linearizovat vztahem $F_t = -mg\alpha$, ale zachovat tam ten sinus! Dle 2.Newtonova zákona platí současně pro vratnou sílu $F_t = am$, pročež dostáváme $am = -mg \sin \alpha$ a po zkrácení hmotnosti

$$a = -g \sin \alpha \quad (15)$$

Dále víme, že „ES JE FÍR“, tedy $y = \alpha \cdot \ell$ a derivováním dostaneme:

$$y = \alpha \cdot \ell$$

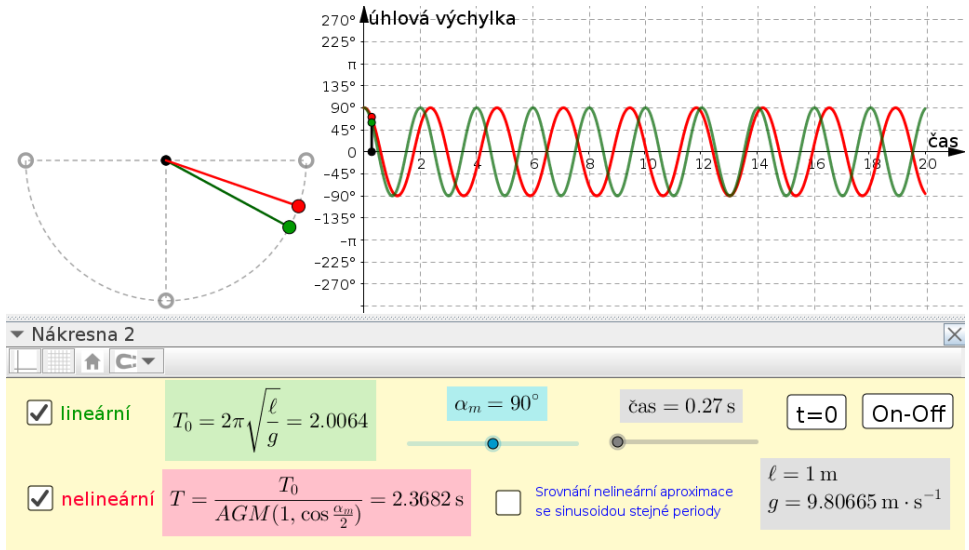
$$v = \dot{\alpha} \cdot \ell$$

$$a = \ddot{\alpha} \cdot \ell$$

A srovnáním s (15) máme $\ddot{\alpha} \cdot \ell = -g \sin \alpha$, tedy

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{\ell} \sin \alpha = 0 \quad (16)$$

Toto je tedy **přesná** rovnice popisující pohyb $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{Y}$. Problém je, že na rozdíl od linearizované rovnice $\ddot{\alpha} + \frac{g}{\ell} \cdot \alpha$, která by popisovala dokonalý



Obr. 14:

<https://www.geogebra.org/m/yubtcme3>

harmonický oscilátor a jejímž řešením by byly **dokonalé** sinusoidy (10) až (14) a jednoduchý vzorec pro periodu $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, tak tato rovnice **nemá jednoduché řešení** a vztah pro periodu je o dost komplikovanější.

V zásadě můžeme říci dvě podstatné věci:

1. Časový průběh okamžitých výchylek (obloukové y a úhlové α) **nebudou dokonalé sinusoidy!**
2. **Perioda kmitání bude větší** než v případě zjednodušeného lineárního modelu. (Pač síla je v krajních polohách kvůli sinusoidě trochu menší, takže návrat do RP bude pomalejší.)



Tuto problematiku nám může naznačit článek na Wiki-pédii[3]. Pro nás bude postatné, že tu pitomou rovnicí (16) umí vyřešit numerickými methodami Geova Gebra a díky ní si můžeme vykreslit například průběh okamžité obvodové vejchylky a porovnat ho s dokonalou sinusoidou linearizovaného modelu. Současně můžeme spočítat hodnotu periody methodou **aritmético-geometrického průměru**[1].

Toto všecičko můžeme prozkoumat ve fantas-magorickém apletu v GeoGebře. Čummež na obrázek 14, kde je také odkaz na aplet.

V horní části vlevo je kmitající kulička kyvadla.

- **Červené** kyvadlo odpovídá skutečnému pohybu (nelineární aproximace)
- **Zelené** kyvadlo odpovídá linearizovanému modelu (lineární aproximace).

V horní části vpravo jsou časové průběhy úhlové výchylky $\alpha(t)$ pro **červené** a **zelené** kyvadlo.

Vidíme, že se **červené** (reálné) kyvadlo opožďuje za **zeleným**, pač má větší periodu.

Ve spodní části apletu jsou ovládací prvky. Zleva doprava:

- volba zobrazení **lineární** a **nelineární** aproximace
- vztahy pro periody **lineární** a **nelineární** aproximace
- volby počáteční úhlové výchylky α_m
- volba pro srovnání **nelineární** aproximace se sinusoidou – odchylka **červeného** průběhu od **modré** sinusoidy se začne projevovat výrazněji až pro úhly α_m blížíící se ke 180° .
- jezdec pro nastavení času
- tlačítka pro vynulování času a pro spuštění a vypnutí animace



- hodnoty použité délky kyvadla a tíhového ztychlení (pro 45° zeměpisné šířky).

Co lze pozorovat:

- Nastavme $\alpha_m = 5^\circ$. Vidíme, že mezi **červeným** a **zeleným** modelem není takřka rozdíl.

$$T_0 = 2,0064 \text{ s} \quad T = 2,0074 \text{ s} \quad T_0 \doteq T$$

Červené i **zelené** kyvadlo splývají, jejich pohyb je téměř synchronizován, časové průběhy okamžité úhlové výchylky pro obě kyvadla v podstatě splývají. **Červená** křivka je nerozeznatelná od sinusoidy (je to vidět také když zaškrtneme modré zaškrtačkové políčko).

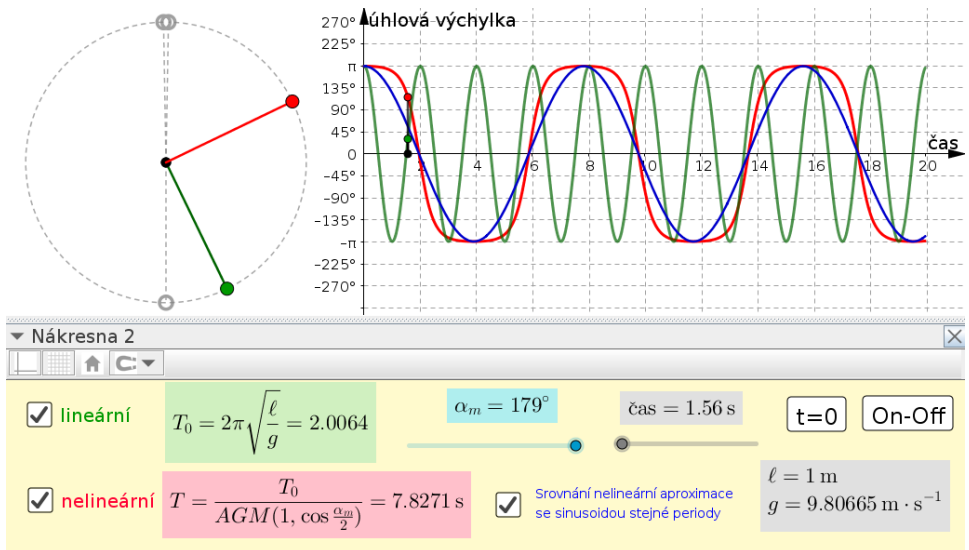
- Roste-li α_m nad hodnotu 5° , začínají být rozdíly mezi červeným a zeleným modelem čím dál tím větší. Perioda červeného modelu roste, kyvadla jsou čím dál tím více rozsynchronizovaná.

Není-li úhel α_m ještě příliš velký, není odchylka nelineárního modelu o sinusového průběhu (modré zaškrtačkové tlačítko) příliš patrná, ale pro hodnoty α_m blížíící se k 180° je rozdíl již velice markantní.

Je jasné, že pro úhly nad 90° by kulička na provázku padala svisle dolů – museli bychom vzít místo provázku nějakou tuhou tyčku (nulové hmotnosti).

- Při $\alpha_m = 180^\circ$ jsme kuličku na tyčce umístili do labilní rovnovážné polohy – tam zůstane a **červené** kyvadlo nebude kmitat – čili perioda T bude nekonečná.

Zelené kyvadlo si samozřejmě kmitá, jakoby se nechumelilo, s tou svou nesmyslnou periodou $T_0 = 2,0064 \text{ s}$.



Obr. 15:

<https://www.geogebra.org/m/yubtcme3>



Výpočet periody: Je více způsobů, jak určit periodu nelineárního modelu. Jedním z nich je využití *aritmeticko-geometrického průměru* detailně popsaná zde[1] a zde[2].

Výpočet *aritmeticko-geometrického průměru* dvou čísel p a q je rekurzivní proces, kdy na vstupu máme tato dvě čísla jakožto nulté členy dvou nezávislých posloupností a_n a g_n , které jsou dány takto:

$$\begin{aligned} a_0 &= p & g_0 &= q \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + g_n}{2} & g_{n+1} &= \sqrt{a_n \cdot g_n} \end{aligned}$$

Tyto dvě posloupnosti rychle konvergují k témuž číslu (a_n je klesající a g_n rostoucí), které se nazývá *aritmeticko-geometrický průměr* a značí se $AGM(p, q)$.

Můžeme si s tím pohrát v apletu v GeoGebře, kde lze nastavovat různé hodnoty p, q :

<https://www.geogebra.org/m/nacqbfm2>

Z teorie plyne, že přesná hodnota periody nelineární aproximace kyvadla je dána jednoduchým vztahem:

$$T = \frac{T_0}{AGM(1, \cos \frac{\alpha_m}{2})}; \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (17)$$

Vidíme, že periodu linearizovaného modelu T_0 dělíme $A - G$ průměrem čísel 1 a $\cos \frac{\alpha_m}{2}$.

První iterace je

$$a_1 = \frac{1 + \cos \frac{\alpha_m}{2}}{2} \quad g_1 = \sqrt{1 \cdot \cos \frac{\alpha_m}{2}}$$



$$T_1(a) = \frac{2T_0}{1 + \cos \frac{\alpha_m}{2}} \qquad T_2(g) = \frac{T_0}{\sqrt{\cos \frac{\alpha_m}{2}}}$$

Aproximace $T_1(a)$ má relativní chybu menší než 1 % pro úhly do $96,11^\circ$. Proto ji můžeme s klidem použít pro účely laboratorního cvičení, kdy měříme tíhové zrychlení pomocí kyvadla.

Druhá iterace je

$$a_2 = \frac{1 + \cos \frac{\alpha_m}{2} + 2\sqrt{\cos \frac{\alpha_m}{2}}}{4} = \frac{(1 + \sqrt{\cos \frac{\alpha_m}{2}})^2}{4} \qquad g_2 = \dots$$

$$T_2(a) = \frac{4T_0}{(1 + \sqrt{\cos \frac{\alpha_m}{2}})^2} \qquad T_2(g) = \dots$$

A tak dále. Ještě si povšimněme případu $\alpha_m = 180^\circ$. Zde $\cos \frac{\alpha_m}{2}$ je zřejmě 0 a tudíž

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad g_1 = 0$$

$$T_1(a) = 2T_0 \qquad T_1(g) = \infty$$

Zřejmě posloupnost g_n jsou samé nuly a $T_n(g)$ samá nekonečna. A posloupnost a_n jde rychle k nule a tím pádem $T_n(a)$ jde k nekonečnu. To je v souladu s tím, že pro $\alpha_m = 180^\circ$ je kyvadlo v labilní rovnovážné poloze a perioda musí být nekonečná.

Jednotlivé iterace můžeme krástině nazřít v tomto apletu:

<https://www.geogebra.org/m/rddnawbp>



Odkazy

- [1] *A New and Wonderful Pendulum Period Equation*. URL: <http://www.leapsecond.com/hsn2006/pendulum-period-agm.pdf>.
- [2] *Arithmetic–geometric mean*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic%E2%80%93geometric_mean.
- [3] *Rovnice pro kyvadlo – odvození*. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_\(mechanics\)#Simple_gravity_pendulum](https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mechanics)#Simple_gravity_pendulum).
- [4] *The Pendulum and Galileo*. URL: <https://youtu.be/MpzaCCbX-z4>.