CAPÍTULO VIII

Pontos Notáveis do Triângulo

I. Baricentro — Medianas

115. As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

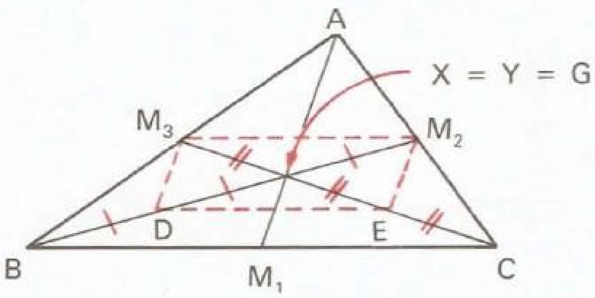
Hipótese | *Tese*

$$\overline{AM_1},\ \overline{BM_2},\ \overline{CM_3} \text{ são medianas} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ \overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\} \\ 2)\ \overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1},\ \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2}, \\ \quad \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3} \end{cases}$$

Demonstração

Seja X o ponto tal que:

$\overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{X\}$



Considerando os pontos médios D e E de $\overline{BX}$ e $\overline{CX}$, temos o que segue:

$$\left.\begin{array}{l}(\Delta ABC,\ \overline{AM_3} \equiv \overline{BM_3},\ \overline{AM_2} \equiv \overline{CM_2}) \Rightarrow \overline{M_2M_3} \,//\, \overline{BC} \text{ e } \overline{M_2M_3} = \dfrac{\overline{BC}}{2} \\ (\Delta XBC,\ \overline{XD} \equiv \overline{BD} \text{ e } \overline{XE} \equiv \overline{CE}) \Rightarrow \overline{DE} \,//\, \overline{BC} \text{ e } \overline{DE} = \dfrac{\overline{BC}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{M_2M_3} \,//\, \overline{DE} \text{ e } \overline{M_2M_3} \equiv \overline{DE} \Rightarrow M_2M_3DE \text{ é paralelogramo} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\overline{DX} \equiv \overline{XM_2} \Rightarrow \overline{BX} = 2 \cdot \overline{XM_2} & (1) \\ \overline{EX} \equiv \overline{XM_3} \Rightarrow \overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3} & (2)\end{cases}$$

Logo, a mediana $\overline{BM_2}$ intercepta a mediana $\overline{CM_3}$ num ponto X tal que:

$$\overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3}$$

Tomando-se as medianas $\overline{AM_1}$ e $\overline{CM_3}$ e sendo Y o ponto tal que:

$$\overline{AM_1} \cap \overline{CM_3} = \{Y\},$$

de modo análogo concluímos que:

$$\overline{CY} = 2 \cdot \overline{YM_3} \quad (3) \qquad \text{e} \qquad \overline{AY} = 2 \cdot \overline{YM_1} \quad (4)$$

De (2) e (3), decorre que $X = Y$.

Chamando este ponto $X = Y$ de G e considerando (1), (2) e (4), temos:

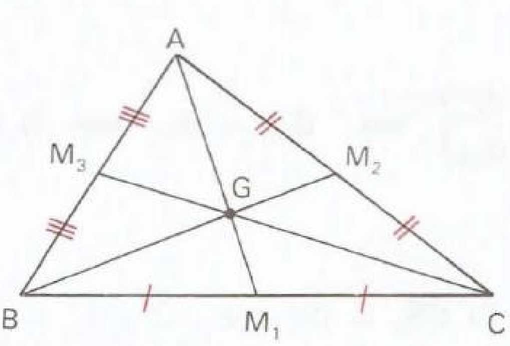
$$\overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\} \text{ e}$$

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1}, \quad \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2}, \quad \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3}$$

116. Baricentro — definição

O ponto de interseção (ou ponto de encontro, ou ponto de concurso) das três medianas de um triângulo é o *baricentro* do triângulo.

G é o baricentro do ΔABC.



$$\overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\}$$

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1}, \ \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2}, \ \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3}$$

$$\overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AM_1}, \ \overline{BG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BM_2}, \ \overline{CG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{CM_3}$$

$$\overline{GM_1} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AM_1}, \ \overline{GM_2} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BM_2}, \ \overline{GM_3} = \frac{1}{3} \cdot \overline{CM_3}$$

Nota: O baricentro é o centro de gravidade do triângulo.

II. Incentro — Bissetrizes internas

117. As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo.

Sendo o ΔABC de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, e $\overline{AB} = c$,

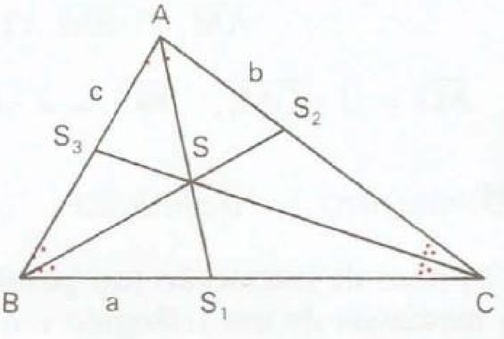
Hipótese — *Tese*

$$\overline{AS_1}, \overline{BS_2}, \overline{CS_3} \text{ são bissetrizes internas} \implies \begin{cases} 1)\ \overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\} \\ 2)\ d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c} \end{cases}$$

Demonstração

Seja S o ponto tal que:

$$\overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\}$$



Temos:

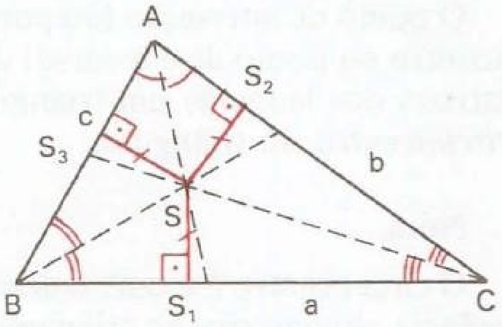
$$\left.\begin{array}{l} S \in \overline{BS_2} \implies d_{S,a} = d_{S,c} \\ S \in \overline{CS_3} \implies d_{S,a} = d_{S,b} \end{array}\right\} \implies d_{S,b} = d_{S,c} \implies S \in \overline{AS_1}.$$

Logo,

1º) $\overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\}$ e 2º) $d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c}$

118. *Incentro — definição*

O ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das três bissetrizes internas de um triângulo é o *incentro* do triângulo.



S é o incentro do ΔABC.

$\overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\}$

$d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c}$

Nota

O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

III. Circuncentro — Mediatrizes

119. As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.

Sendo o ΔABC,

Hipótese		*Tese*
m_1, m_2, m_3 mediatrizes de $\overline{BC}, \overline{AC}$ e $\overline{AB}$	$\Longrightarrow$	$\begin{cases} 1)\ m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\} \\ 2)\ \overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} \end{cases}$

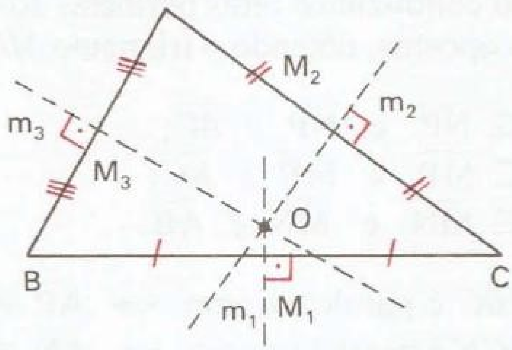
Demonstração

Seja *O* o ponto tal que:

$$m_2 \cap m_3 = \{O\}$$

$$\left.\begin{array}{l} O \in m_2 \Longrightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OC} \\ O \in m_3 \Longrightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OB} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow OB \equiv OC \Longrightarrow O \in m_1$$

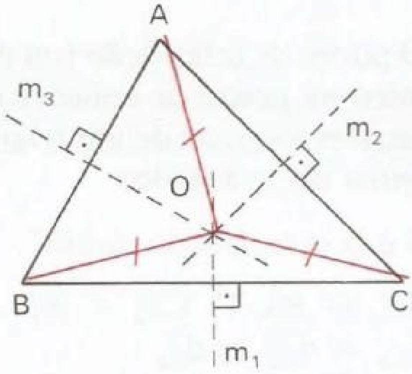


Logo,

1) $m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\}$ e 2) $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$.

120. *Circuncentro — definição*

O ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das mediatrizes dos lados de um triângulo é o *circuncentro* do triângulo.

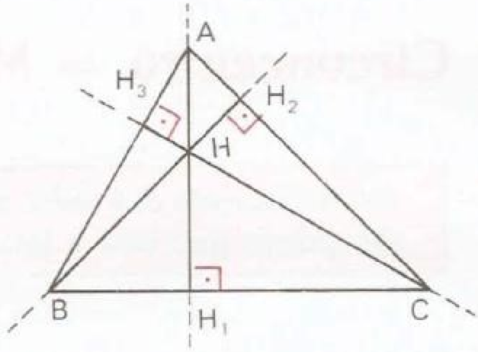


Nota

O circuncentro é o centro de circunferência circunscrita ao triângulo.

IV. Ortocentro — Alturas

121. As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.

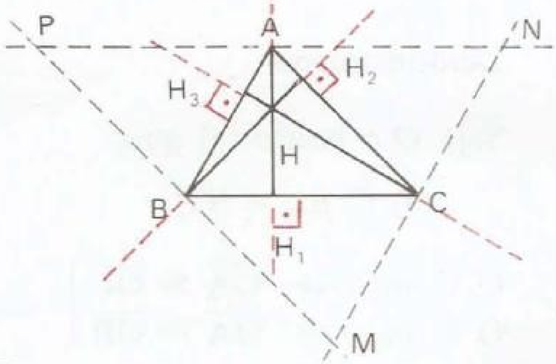


Sendo o ΔABC de alturas $\overline{AH_1}$, $\overline{BH_2}$, $\overline{CH_3}$,

Hipótese		*Tese*
$\overleftrightarrow{AH_1}, \overleftrightarrow{BH_2}, \overleftrightarrow{CH_3}$ retas que contêm as alturas	$\Rightarrow$	$\overleftrightarrow{AH_1} \cap \overleftrightarrow{BH_2} \cap \overleftrightarrow{CH_3} = \{H\}$

Demonstração

Pelos vértices A, B e C do triângulo conduzimos retas paralelas aos lados opostos, obtendo o triângulo MNP.



$A \in \overline{NP}$ e $\overline{NP} \parallel \overline{BC}$;
$B \in \overline{MP}$ e $\overline{MP} \parallel \overline{AC}$;
$C \in \overline{MN}$ e $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} APBC \text{ é paralelogramo} \Rightarrow \overline{AP} \equiv \overline{BC} \\ ABCN \text{ é paralelogramo} \Rightarrow \overline{AN} \equiv \overline{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ é ponto médio de } \overline{NP} \quad (1)$$

$$(\overleftrightarrow{AH_1} \perp \overline{BC},\ \overline{NP} \parallel \overline{BC}) \Rightarrow \overleftrightarrow{AH_1} \text{ é perpendicular a } \overline{NP} \quad (2)$$

De (1) e (2), decorre que:

A reta $\overleftrightarrow{AH_1}$ é mediatriz de NP.

Analogamente:

A reta $\overleftrightarrow{BH_2}$ é mediatriz de $\overline{MP}$. A reta $\overleftrightarrow{CH_3}$ é mediatriz de $\overline{MN}$.

Logo, considerando o ΔMNP, as mediatrizes $\overleftrightarrow{AH_1}$, $\overleftrightarrow{BH_2}$ e $\overleftrightarrow{CH_3}$ dos lados do triângulo interceptam-se num ponto, H.

$$\overleftrightarrow{AH_1} \cap \overleftrightarrow{BH_2} \cap \overleftrightarrow{CH_3} = \{H\}$$

122. *Ortocentro — definição*

O ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das retas suportes das alturas de um triângulo é o *ortocentro* do triângulo.

EXERCÍCIOS

274. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.
b) O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.
c) O incentro é interno ao triângulo.
d) O baricentro é interno ao triângulo.
e) O ortocentro é interno ao triângulo.
f) O circuncentro é interno ao triângulo.
g) O baricentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

275. Diga que triângulo satisfaz a condição dada nos casos:

a) o ortocentro e o baricentro são coincidentes;
b) o incentro e o circuncentro são coincidentes;
c) o ortocentro é um dos vértices;
d) o ortocentro é externo;
e) o circuncentro é externo;
f) o circuncentro está em um dos lados;
g) o ortocentro é um ponto interno.

276. Considere os segmentos constituídos pelas três alturas, pelas três medianas e pelas três bissetrizes internas de um triângulo. Quantos desses segmentos, dois a dois distintos, teremos:

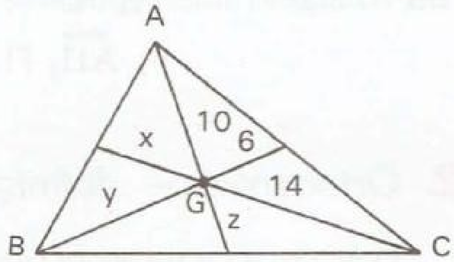
a) no triângulo equilátero;

b) no triângulo isósceles não equilátero;

c) no triângulo escaleno.

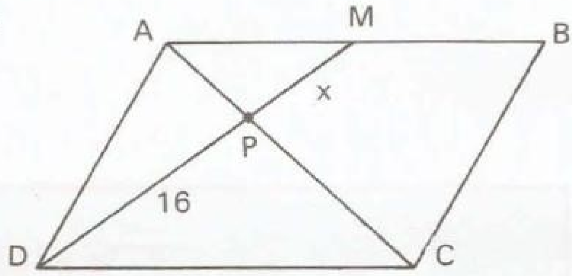
277. Sendo G o baricentro do triângulo ABC, determine x, y e z.

$AG = 10$
$BG = y$
$CG = 14$



278. Se o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo e M é ponto médio de AB, determine x.

$DP = 16$
$PM = x$



279. Sendo H o ortocentro de um triângulo ABC e $B\hat{H}C = 150°$, determine $\hat{A}$.

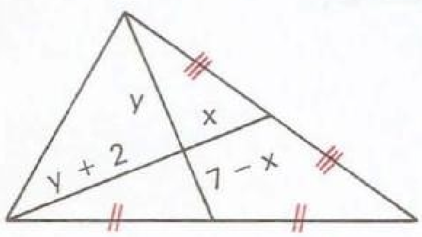
280. Se H é o ortocentro de um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$ e $B\hat{H}C = 50°$, determine os ângulos do triângulo.

281. Se P é o incentro de um triângulo ABC e $B\hat{P}C = 125°$, determine $\hat{A}$.

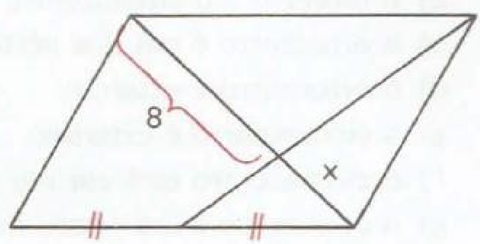
282. O circuncentro de um triângulo isósceles é interno ao triângulo e duas mediatrizes formam um ângulo de 50°. Determine os ângulos desse triângulo.

283. Considerando congruentes os segmentos com "marcas iguais", determine os valores das incógnitas nos casos:

a)



b) paralelogramo



284. Considerando os quatro pontos notáveis de um triângulo:

a) Quais os que podem ser externos ao triângulo?

b) Qual o que pode ser ponto médio de um lado?

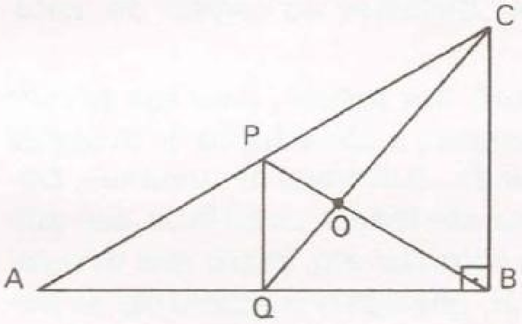
c) Qual o que pode ser vértice do triângulo?

285. Em um triângulo ABC, os ângulos A e B medem, respectivamente, $86°$ e $34°$. Determine o ângulo agudo formado pela mediatriz relativa ao lado $\overline{BC}$ e pela bissetriz do ângulo C.

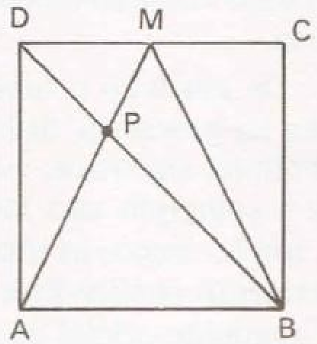
286. Em um triângulo ABC os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ medem, respectivamente, $70°$ e $60°$. Determine a razão entre os dois maiores ângulos formados pelas interseções das três alturas.

287. Determine as medidas dos três ângulos obtusos formados pelas mediatrizes de um triângulo equilátero.

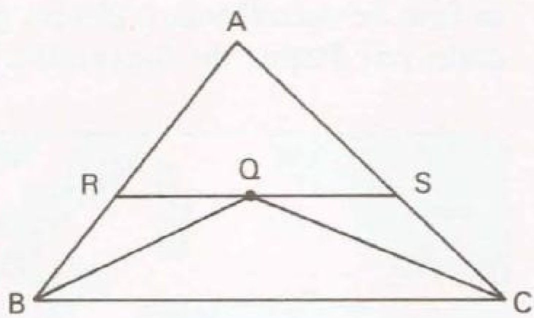
288. Na figura, Q é o ponto médio de $\overline{AB}$. $\overline{QP}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Sendo $\overline{AC} = 30\ cm$, determine $\overline{PO}$.



289. Na figura, $ABCD$ é retângulo, M é o ponto médio de $\overline{CD}$ e o triângulo ABM é equilátero. Sendo $\overline{AB} = 15$, calcule $\overline{AP}$.



290. Determine o perímetro do triângulo ARS da figura, onde $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $15\ cm$ e $18\ cm$, respectivamente, sendo $\overline{BQ}$ e $\overline{CQ}$ as bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo ABC e $\overline{RS}$ paralelo a $\overline{BC}$.



291. As três bissetrizes de um triângulo ABC se encontram num ponto O. Determine as medidas dos ângulos $A\hat{O}B$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ em função dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo.

Papus: o Epílogo da Geometria Grega

Hygino H. Domingues

A partir do século III a.C., Roma começa a se impor como potência militar imperialista. Em 156 a.C., após uma sucessão de conquistas, anexou a Grécia aos seus já vastos domínios. A mesma sorte teria o Egito em 31 a.C. Mas alguns anos antes os romanos já haviam intervindo neste país, valendo-se da disputa pelo poder entre Cleópatra e seu irmão. César, no ano 47 a.C., mandara incendiar a esquadra egípcia ancorada no porto de Alexandria. O fogo se alastrou e atingiu a biblioteca, consumindo cerca de 500 mil textos.

Apesar desses acontecimentos, Alexandria continuaria a ostentar por muito tempo a condição de capital cultural do mundo. Mas, por razões várias, aproximadamente por volta dessa época começa a declinar em intensidade sua pujança, inclusive no campo da matemática.

De um lado o modelo matemático dos gregos, com sua grande ênfase na geometria dedutiva, paralelamente à não-adoção de qualquer simbologia algébrica, estava se esgotando. Ademais, os romanos, embora a princípio não interferissem nas atividades científicas dos gregos, muito menos as incentivavam ou valorizavam, posto que só o conhecimento prático lhes interessasse. E, quando o cristianismo se tornou a religião oficial do Império Romano, essa isenção foi sendo abandonada, culminando com o fechamento das escolas gregas de filosofia no ano 529, incluindo a secular Academia de Platão, em Atenas. Nessa fase de decadência o último grande alento da matemática grega foi dado por Papus de Alexandria (c. 300 d.C.).

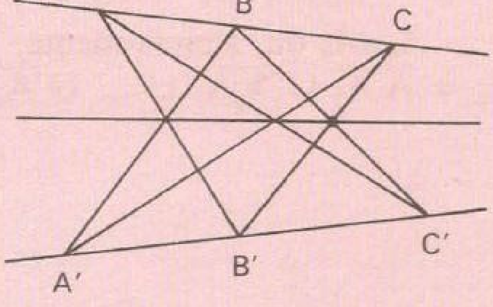
Papus provavelmente viveu e ensinou em Alexandria entre o final do século III e a primeira metade do século IV, conforme se deduz de comentário seu sobre o *Almagesto*, em que cita como episódio recente um eclipse do Sol ocorrido no ano 320. Dentre suas obras, apenas uma restou até nossos dias: a *Coleção Matemática*, em oito livros, dos quais o primeiro e parte do segundo se perderam.

Predominantemente uma obra de geometria, a grande importância da *Coleção Matemática* se assenta em três razões principais.

Uma delas se traduz nas preciosas informações históricas que inclui sobre a matemática grega; a outra, na tentativa de tornar mais acessível a geometria grega já conhecida, mediante novas demonstrações e lemas explanatórios; a última é a própria contribuição original de Papus, bastante significativa.

Um dos resultados de maior alcance deixados por Papus é conhecido hoje como *teorema de Guldin* — em homenagem a P. Guldin, que o redescobriu no século XVII. Esse teorema assegura que, se uma reta e uma curva fechada são coplanares e não se interceptam, o volume do sólido obtido girando-se a superfície delimitada pela curva em torno da reta é igual ao produto da área dessa superfície pelo comprimento da trajetória de seu centro de gravidade.

É digna de registro também a proposição 139, no livro VII, conhecida em geometria projetiva como *teorema de Papus*: "Se A, B e C são pontos de uma reta e A′, B′ e C′ pontos de outra, conforme a figura, então AB′ e A′B, AC′ e A′C, BC′ e B′C se encontram em três pontos colineares".



A Papus se deve ainda o conceito de *foco* e *diretriz* de uma cônica. É dele o teorema: "O lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão das distâncias a um ponto (foco) e uma reta (diretriz) é constante, é uma cônica".

Enfim, bem que Papus se empenhou para reerguer a geometria grega. Mas as forças inexoráveis da história estavam contra ele.