Teoría – Tema 3

Teoría - 5 - Optimizar la pendiente de la recta tangente a la función

Optimizar la pendiente de la recta tangente a la función f(x)

Son muy típicos los enunciados de problemas donde se pide "obtener el punto donde la pendiente de la recta tangente a la función se hace máxima o se hace mínima".

Cuando veamos esta frase, vamos a tomar como norma **sustituir la expresión "pendiente de la recta tangente a la función" por la palabra "derivada"** (haciendo uso de la interpretación geométrica de la derivada).

De esta forma, el ejercicio quedaría: "obtener el punto donde la derivada se hace máxima o donde la derivada se hace mínima". Es decir, tenemos que maximizar o minimizar la función derivada. Un problema de optimización trabajando con la ecuación de la función derivada.

Ejemplo 1 resuelto

Sea la función $f(x)=\frac{x}{e^x}$ **definida en toda la recta real. Determina el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es mínima.**

La pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada. Por lo tanto, si me preguntan cuando la pendiente es mínima es lo mismo que calcular cuándo la función derivada es mínima.

¿Y qué significa minimizar una función? Derivarla e igualarla a cero, ¿verdad?

¿Y si debo minimizar la función derivada? Pues derivo la función derivada e igualo a cero. Es decir, hacemos la segunda derivada igual a cero. Moraleja: minimizar o maximizar la pendiente de la recta tangente, es aplicar la condición necesaria de punto de inflexión.

$f(x)=\frac{x}{e^x} \rightarrow f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$ → Para evitar liarnos con tantas primas ' de la derivada, vamos a llamar a la primera derivada $f'(x)=g(x)=\frac{1-x}{e^x}$ → Y ahora simplemente obtenemos el mínimo relativo de $g(x)$. Un problema que hemos resuelto miles de veces.

$g'(x)=0 \rightarrow g'(x)=\frac{-e^x-(1-x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-1-(1-x)}{e^x}=\frac{-2+x}{e^x} \rightarrow -2+x=0 \rightarrow x=2 \rightarrow$ punto crítico de la función $g(x)$.

Aplicamos la condición suficiente de la segunda derivada para ver si es un mínimo relativo.

$$g''(x)=\frac{e^x-(-2+x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{1-(-2+x)}{e^x}=\frac{3-x}{e^x} \quad \rightarrow \quad g''(2)=\frac{3-2}{e^2}>0$$

$x=2$ es un mínimo relativo.

Obtenemos su imagen en la función de partida → $f(2)=\frac{2}{e^2}$ → $(2,\frac{2}{e^2})$ minimiza la pendiente de la recta tangente a la función.