

Nama : Novita Indriyati  
NIM : 23030130020  
Kelas : Pendidikan Matematika A 2023

## Fungsi-fungsi Geometri

---

### Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

`defaultd:=textheight()*1.5`: nilai asli untuk parameter `d`  
`setPlotrange(x1,x2,y1,y2)`: menentukan rentang `x` dan `y` pada bidang

### koordinat

`setPlotRange(r)`: pusat bidang koordinat  $(0,0)$  dan batas-batas

### sumbu-x dan y adalah -r sd r

`plotPoint (P, "P")`: menggambar titik `P` dan diberi label "`P`"  
`plotSegment (A,B, "AB", d)`: menggambar ruas garis `AB`, diberi label

### "AB" sejauh d

`plotLine (g, "g", d)`: menggambar garis `g` diberi label "`g`" sejauh `d`  
`plotCircle (c, "c",v,d)`: Menggambar lingkaran `c` dan diberi label "`c`"  
`plotLabel (label, P, V, d)`: menuliskan label pada posisi `P`

### Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

`turn(v, phi)`: memutar vektor `v` sejauh `phi`  
`turnLeft(v)`: memutar vektor `v` ke kiri  
`turnRight(v)`: memutar vektor `v` ke kanan  
`normalize(v)`: normal vektor `v`  
`crossProduct(v, w)`: hasil kali silang vektor `v` dan `w`.  
`lineThrough(A, B)`: garis melalui `A` dan `B`, hasilnya `[a,b,c]` sdh.

### $ax+by=c$ .

`lineWithDirection(A,v)`: garis melalui `A` searah vektor `v`  
`getLineDirection(g)`: vektor arah (gradien) garis `g`  
`getNormal(g)`: vektor normal (tegak lurus) garis `g`  
`getPointOnLine(g)`: titik pada garis `g`  
`perpendicular(A, g)`: garis melalui `A` tegak lurus garis `g`  
`parallel (A, g)`: garis melalui `A` sejajar garis `g`  
`lineIntersection(g, h)`: titik potong garis `g` dan `h`  
`projectToLine(A, g)`: proyeksi titik `A` pada garis `g`  
`distance(A, B)`: jarak titik `A` dan `B`  
`distanceSquared(A, B)`: kuadrat jarak `A` dan `B`  
`quadrance(A, B)`: kuadrat jarak `A` dan `B`  
`areaTriangle(A, B, C)`: luas segitiga `ABC`  
`computeAngle(A, B, C)`: besar sudut  $\angle ABC$

angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut  $\angle ABC$   
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r  
getCircleCenter(c): pusat lingkaran c  
getCircleRadius(c): jari-jari lingkaran c  
circleThrough(A,B,C): lingkaran melalui A, B, C  
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB  
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkaran c  
circleCircleIntersections (c1, c2): titik potong lingkaran c1 dan

c2

planeThrough(A, B, C): bidang melalui titik A, B, C

### Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y  
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan

y dengan titik A pada

sisi positif (kanan/atas) garis  
quad(A,B): kuadrat jarak AB  
spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni

$\sin(\alpha)^2$  dengan

alpha sudut yang menghadap sisi a.  
crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga

dengan panjang sisi a, b, c.

triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang membentuk

suatu segitiga

doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread  $2\phi$ , dengan

$sa = \sin(\phi)^2$  spread a.

---

## Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

## Fungsi-fungsi Geometri

---

### Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

`defaultd:=textheight()*1.5`: nilai asli untuk parameter `d`  
`setPlotrange(x1,x2,y1,y2)`: menentukan rentang `x` dan `y` pada bidang

#### koordinat

`setPlotRange(r)`: pusat bidang koordinat  $(0,0)$  dan batas-batas

#### sumbu-x dan y adalah -r sd r

`plotPoint (P, "P")`: menggambar titik `P` dan diberi label "`P`"  
`plotSegment (A,B, "AB", d)`: menggambar ruas garis `AB`, diberi label

#### "AB" sejauh d

`plotLine (g, "g", d)`: menggambar garis `g` diberi label "`g`" sejauh `d`  
`plotCircle (c, "c", v, d)`: Menggambar lingkaran `c` dan diberi label "`c`"  
`plotLabel (label, P, V, d)`: menuliskan label pada posisi `P`

### Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

`turn(v, phi)`: memutar vektor `v` sejauh `phi`  
`turnLeft(v)`: memutar vektor `v` ke kiri  
`turnRight(v)`: memutar vektor `v` ke kanan  
`normalize(v)`: normal vektor `v`  
`crossProduct(v, w)`: hasil kali silang vektor `v` dan `w`.  
`lineThrough(A, B)`: garis melalui `A` dan `B`, hasilnya `[a,b,c]` sdh.

$ax+by=c$ .

`lineWithDirection(A,v)`: garis melalui A searah vektor  $v$   
`getLineDirection(g)`: vektor arah (gradien) garis  $g$   
`getNormal(g)`: vektor normal (tegak lurus) garis  $g$   
`getPointOnLine(g)`: titik pada garis  $g$   
`perpendicular(A, g)`: garis melalui A tegak lurus garis  $g$   
`parallel (A, g)`: garis melalui A sejajar garis  $g$   
`lineIntersection(g, h)`: titik potong garis  $g$  dan  $h$   
`projectToLine(A, g)`: proyeksi titik A pada garis  $g$   
`distance(A, B)`: jarak titik A dan B  
`distanceSquared(A, B)`: kuadrat jarak A dan B  
`quadrance(A, B)`: kuadrat jarak A dan B  
`areaTriangle(A, B, C)`: luas segitiga ABC  
`computeAngle(A, B, C)`: besar sudut  $\angle ABC$   
`angleBisector(A, B, C)`: garis bagi sudut  $\angle ABC$   
`circleWithCenter (A, r)`: lingkaran dengan pusat A dan jari-jari  $r$   
`getCircleCenter(c)`: pusat lingkaran  $c$   
`getCircleRadius(c)`: jari-jari lingkaran  $c$   
`circleThrough(A,B,C)`: lingkaran melalui A, B, C  
`middlePerpendicular(A, B)`: titik tengah AB  
`lineCircleIntersections(g, c)`: titik potong garis  $g$  dan lingkaran  $c$   
`circleCircleIntersections (c1, c2)`: titik potong lingkaran  $c1$  dan

c2

`planeThrough(A, B, C)`: bidang melalui titik A, B, C

#### Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

`getLineEquation (g,x,y)`: persamaan garis  $g$  dinyatakan dalam  $x$  dan  $y$   
`getHesseForm (g,x,y,A)`: bentuk Hesse garis  $g$  dinyatakan dalam  $x$  dan

$y$  dengan titik A pada

sisi positif (kanan/atas) garis  
`quad(A,B)`: kuadrat jarak AB  
`spread(a,b,c)`: Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi  $a,b,c$ , yakni

$\sin(\alpha)^2$  dengan

$\alpha$  sudut yang menghadap sisi  $a$ .  
`crosslaw(a,b,c,sa)`: persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga

dengan panjang sisi  $a, b, c$ .

`triplespread(sa, sb, sc)`: persamaan 3 spread  $sa, sb, sc$  yang membentuk

suatu segitiga

`doublespread(sa)`: Spread sudut rangkap Spread  $2\phi$ , dengan

$sa = \sin(\phi)^2 \text{ spread } a$ .

## Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

---

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang tetapkan tiga poin dan plot mereka.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik  
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");  
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Kemudian tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB  
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC  
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri meliputi fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format garis adalah  $[a,b,c]$ , yang mewakili garis dengan persamaan  $ax+by=c$ .

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1, 2, 2]
```

Hitunglah garis tegak lurus yang melalui A pada BC.

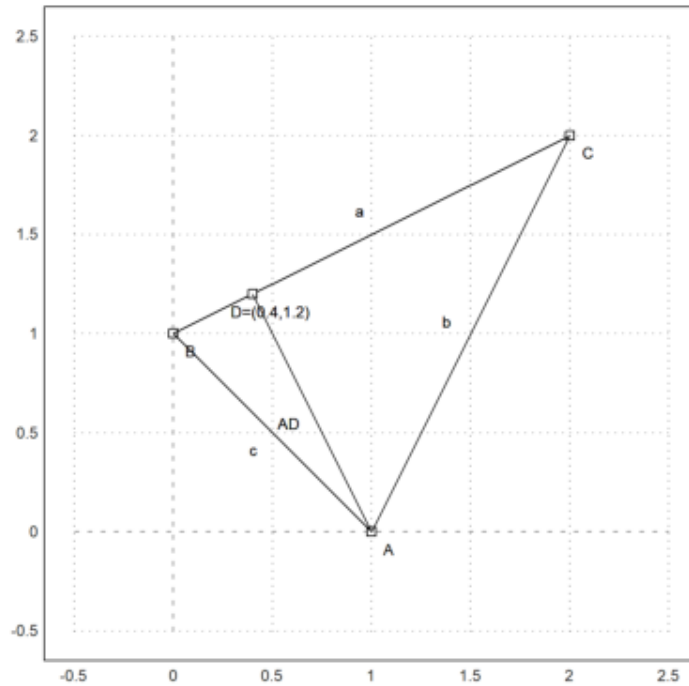
```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

Dan persimpangannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Plot itu.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan  
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

1.5

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langsung dengan fungsi
```

1.5

Cara lain menghitung luas segitiga ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

1.5

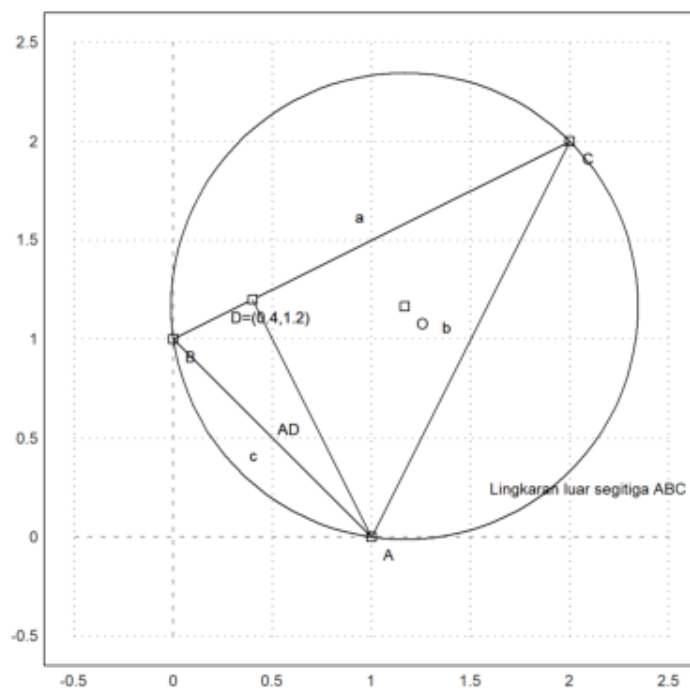
## Sudut di C

```
>degprint (computeAngle (B,C,A) )
```

36°52'11.63''

Sekarang lingkaran luar segitiga.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC  
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar  
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c  
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"  
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

```
[1.16667, 1.16667]  
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB  
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB  
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

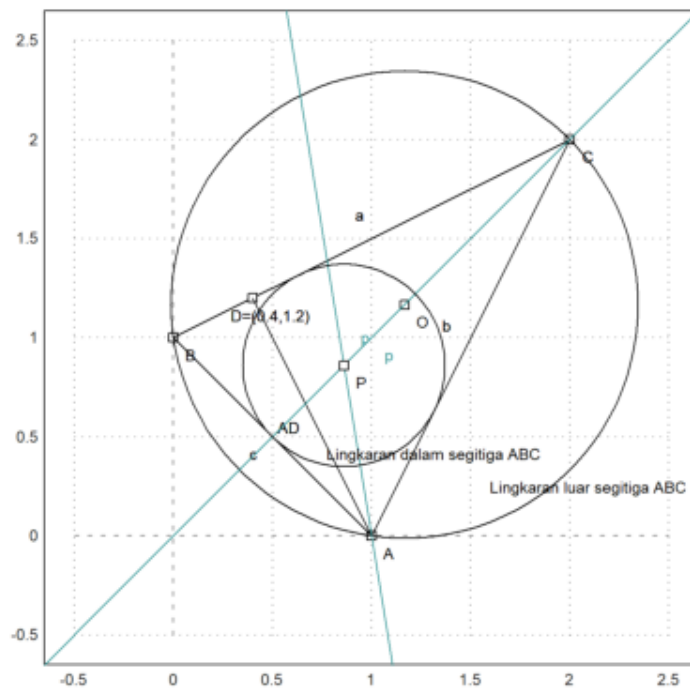
```
[0.86038, 0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut  
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya  
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

0.509653732104

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dal
```



## Latihan

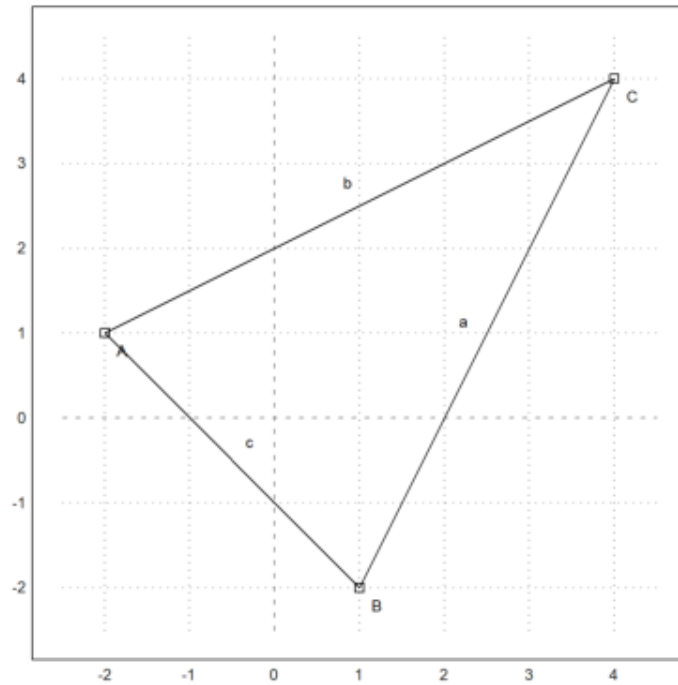
1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

```
>setPlotRange(-2.5,4.5,-2.5,4.5);  
>A=[-2,1]; plotPoint(A,"A");  
>B=[1,-2]; plotPoint(B,"B");  
>C=[4,4]; plotPoint(C,"C");
```

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut.

```
>plotSegment(A,B,"c")  
>plotSegment(B,C,"a")  
>plotSegment(A,C,"b")  
>aspect(1):
```





3. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

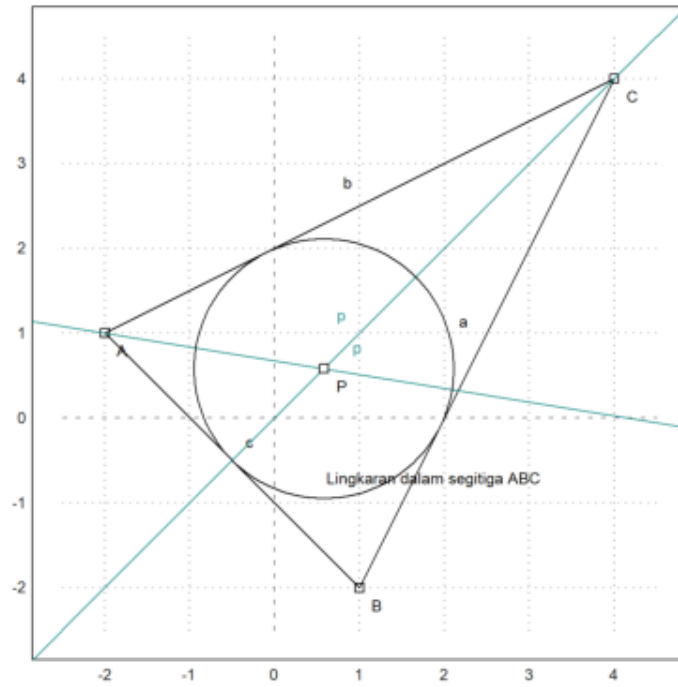
```
>l=angleBisector(A,C,B);
>g=angleBisector(C,A,B);
>P=lineIntersection(l,g)
```

```
[0.581139, 0.581139]
```

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1);
>plotPoint(P,"P");
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

```
1.52896119631
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"):
```

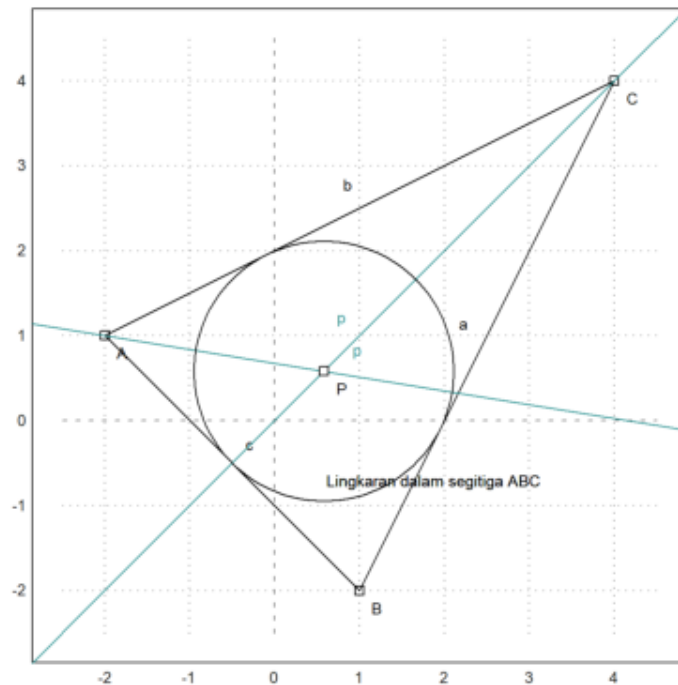


Jadi, terbukti bahwa garis bagi sudut yang ketiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.  
 4. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))
```

1.52896119631

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"):
```



Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.

File `geometri.e` menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, kita dapat menggunakan perhitungan simbolis sekarang.

```
>A := [1,0]; B := [0,1]; C := [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi memberikan perhitungan simbolis.

```
>c := lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 2, 2]
```

Kita bisa mendapatkan persamaan garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$-x + 2y = 2$$

$$\left[ y = 1 + \frac{x}{2} \right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$(-1 + x_1) y - x y_1 = -y_1$$

```
>h := perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

```
[2, 1, 2]
```

```
>Q := lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

```
2 6  
[-, -]  
5 5
```

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[ \frac{2}{5}, \frac{6}{5} \right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc = circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[ \frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3\sqrt{2}} \right]$$

```
>r=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$\frac{5}{3\sqrt{2}}$$

1.178511301977579

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P = lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 ga
```

$$\left[ \frac{2 + \sqrt{2}\sqrt{5}}{6}, \frac{2 + \sqrt{2}\sqrt{5}}{6} \right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

```
[0.86038, 0.86038]
```

## Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga dapat memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

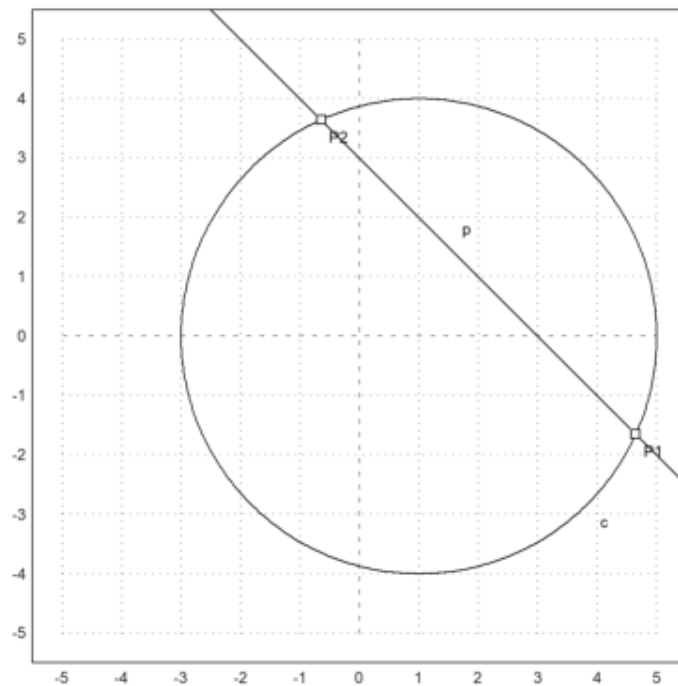
```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);  
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);  
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik potong.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);  
>P1, P2,
```

```
[4.64575, -1.64575]  
[-0.645751, 3.64575]
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



Begitu pula di Maxima.

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l := lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

```
[[2 + √7, 1 - √7], [2 - √7, 1 + √7]]
```

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap busur yang sama adalah sama besar.

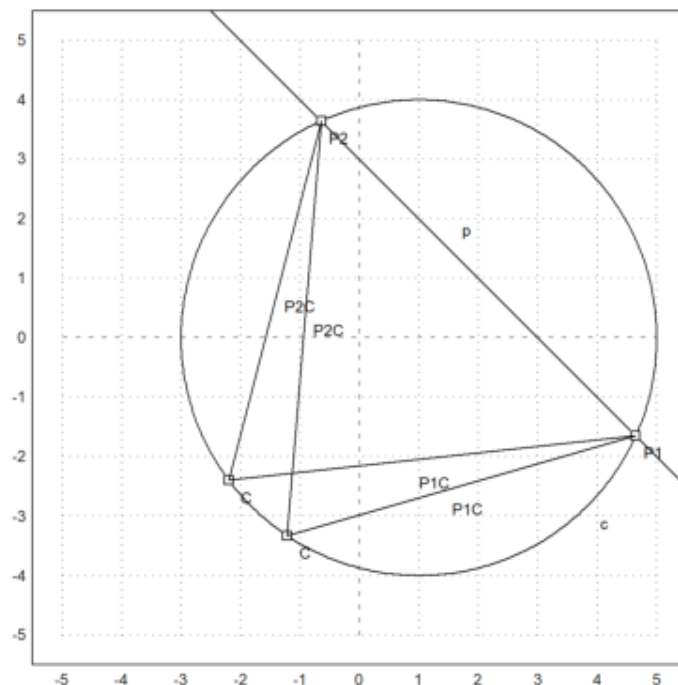
```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);  
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);  
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

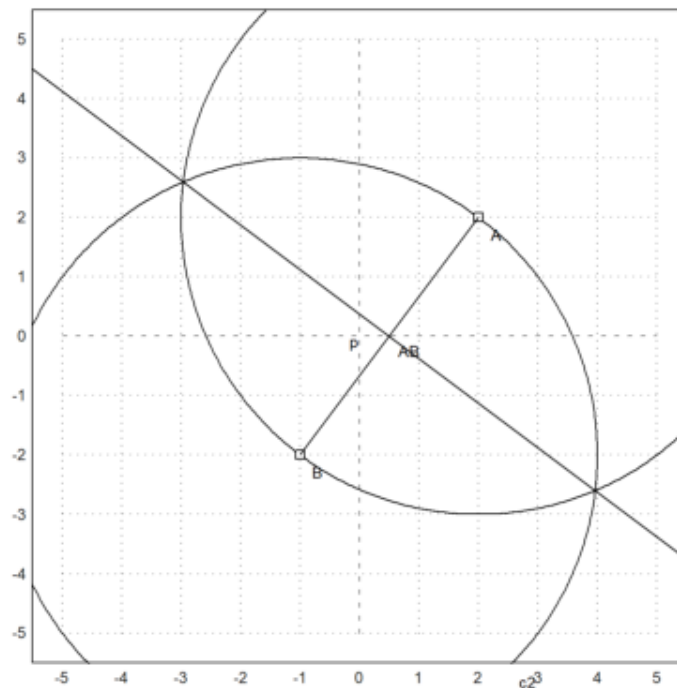
```
>insimg;
```



Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melalui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l);
```



Selanjutnya, kami melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup terlibat. Tetapi kita dapat menyederhanakannya, jika kita memecahkan y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[ y = \frac{-a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (-2a_1 + 2b_1)x}{-2a_2 + 2b_2} \right]$$

Ini memang sama dengan tegak lurus tengah, yang dihitung dengan cara yang sama sekali berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[ y = \frac{-a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (-2a_1 + 2b_1)x}{-2a_2 + 2b_2} \right]$$

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[ y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2 + (-a_2 + b_2)x}{-a_1 + b_1} \right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1 - a_1)}{(b_2 - a_2)} \times \frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = -1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

### Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = (a+b+c)/2,$$

Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c^2.$$

```
>sol &= solve([x^2+y^2=b^2, (x-a)^2+y^2=c^2], [x,y])
```

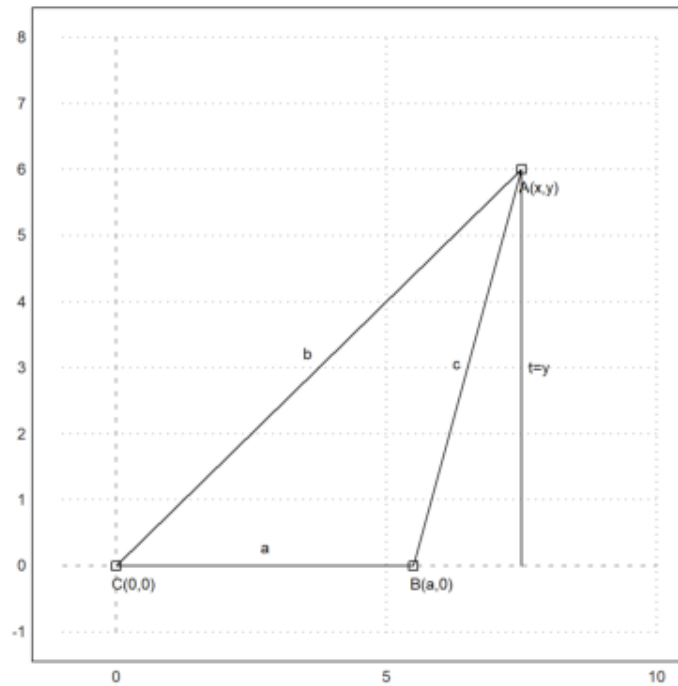
[ ]



```

>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)"); ...
>plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15); ...
>plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25);
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):

```



```

>sol &= solve([x^2+y^2=b^2, (x-a)^2+y^2=c^2], [x,y])

```

[ ]

Ekstrak solusi y.

```

>ysol &= y with sol[2][2]; $ysol

```

Maxima said:  
part: invalid index of list or matrix.  
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:  
ysol &= y with sol[2][2]; \$ysol ...  
^

Kami mendapatkan rumus Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H(9,16,[1,0,4]) = \frac{9 |ysol|}{2}$$

```
>$'Luas=H(3,4,5) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 3, 4, 5
```

$$Luas = \frac{9 |ysol|}{2}$$

Tentu saja, setiap segitiga persegi panjang adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
Variable or function ysol not found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
H:
  useglobal; return 9*abs(ysol)/2
Error in:
H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5 ...
^
```

Dan juga jelas, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan dua sisi 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (
```

```
Variable or function ysol not found.
Error in expression: 9*abs(ysol)/2
%ploteval:
  y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
  s=%ploteval(g$,t,args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
  dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

Kasus umum juga berfungsi.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c) ...
^
```

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana  $b+c=d$  untuk beberapa konstanta  $d$ . Diketahui bahwa ini adalah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

```
Maxima said:  
part: invalid index of list or matrix.  
-- an error. To debug this try: debugmode(true);  
  
Error in:  
s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1 ...  
      ^
```

Dan buat fungsi ini.

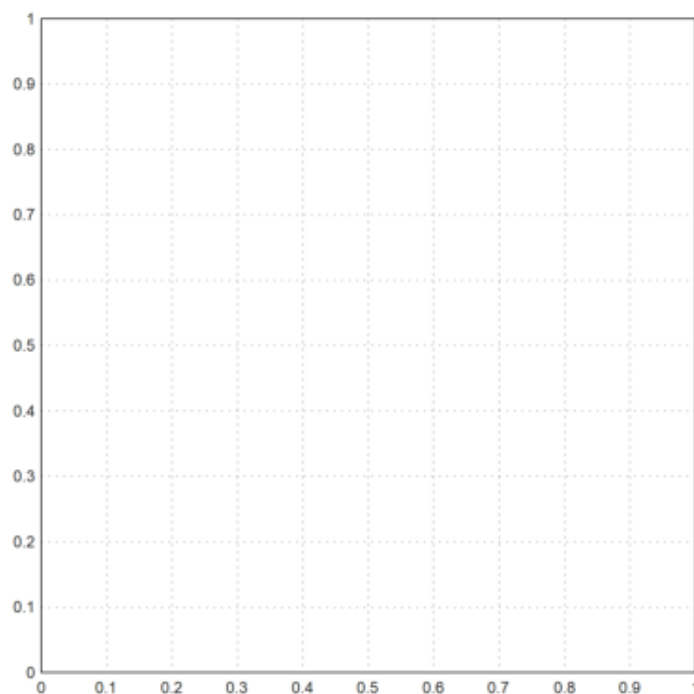
```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)
```

0

0

Sekarang kita bisa menggambar setnya. Sisi  $b$  bervariasi dari 1 hingga 4. Diketahui bahwa kita mendapatkan elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu.

$$\frac{(x - x_m)^2}{u^2} + \frac{(y - y_m)^2}{v^2} = 1,$$

di mana  $(x_m, y_m)$  adalah pusat, dan  $u$  dan  $v$  adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$\frac{405}{4 - 8u + 4u^2}$$

Kita lihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk  $x=0$ . Jadi luas segitiga dengan  $a+b+c=d$  maksimal jika segitiga sama sisi. Kami ingin menurunkan ini secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

Maxima said:

```
diff: second argument must be a variable; found 9
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
... H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns ...
^
```

Kami mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusinya  $a=b=c=d/3$ .

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

Maxima said:

```
solve: all variables must not be numbers.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
$solve(eqns,[a,b]) ...
^
```

Ada juga metode Lagrange, memaksimalkan  $H(a,b,c)^2$  terhadap  $a+b+c=d$ .

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
> diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

Maxima said:

```
diff: second argument must be a variable; found 9
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
... la, diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la]) ...
^
```

Kita bisa membuat plot situasinya

Pertama-tama atur poin di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

```
Maxima said:  
part: invalid index of list or matrix.  
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
Error in:  
A &= at([x,y],sol[2]); $A ...  
                ^
```

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

[0,0]

[9,0]

Kemudian atur rentang plot, dan plot titik-titiknya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...  
>a=4; b=3; c=2; ...  
>plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...  
>plotPoint(mxmeval("A"),"A");
```

```
Variable a1 not found!  
Use global variables or parameters for string evaluation.  
Error in Evaluate, superfluous characters found.  
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.  
mxmeval:  
  return evaluate(mxm(s));  
Error in:  
... otPoint(mxmeval("C"),"C"); plotPoint(mxmeval("A"),"A"): ...  
                ^
```

Plot segmen.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...  
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...  
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```

```
Variable a1 not found!  
Use global variables or parameters for string evaluation.  
Error in Evaluate, superfluous characters found.  
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.  
mxmeval:  
  return evaluate(mxm(s));
```

```
Error in:
plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); plotSegment(mxmeval("B ...
^
```

Hitung tegak lurus tengah di Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan pusat lingkaran.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

Kami mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{81 - 18 a_1 + a_1^2 + a_2^2}}{2 |a_2|}$$

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>plotPoint(U()); ...
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```

```
Variable a2 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in ^
Error in expression: [a/2, (a2^2+a1^2-a*a1)/(2*a2)]
Error in:
plotPoint(U()); plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmev ...
^
```

Menggunakan geometri, kami memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk radiusnya. Kami dapat memeriksa, apakah ini benar dengan Maxima. Maxima akan memfaktorkan ini hanya jika kita kuadratkan.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2 | factor
```

$$\left[ \frac{a_2^2 + a_1^2}{a_2^2}, 0, \frac{16 (a_2^2 + a_1^2)}{a_2^2} \right]$$

**Contoh 4: Garis Euler dan Parabola**

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari sembarang segitiga yang tidak sama sisi. Ini adalah garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk orthocenter, circumcenter, centroid, titik Exeter dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Untuk demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolis.

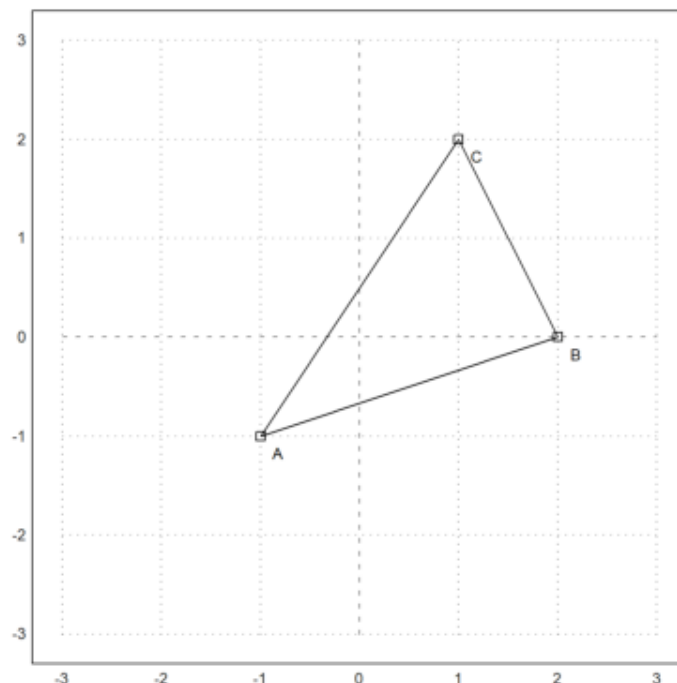
```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kami menyiapkan area plot, dan menambahkan titik ke sana. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menambahkan sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```



Berikut adalah luas segitiga, menggunakan rumus determinan. Tentu saja, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

$$[- 1, 3, - 2]$$

Dan juga dapatkan rumus untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3y - x = -2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Memasukkan titik menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%, [x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}}$$
$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita hitung lingkaran luar ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$\left(y - \frac{5}{14}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{14}\right)^2 = \frac{325}{98}$$

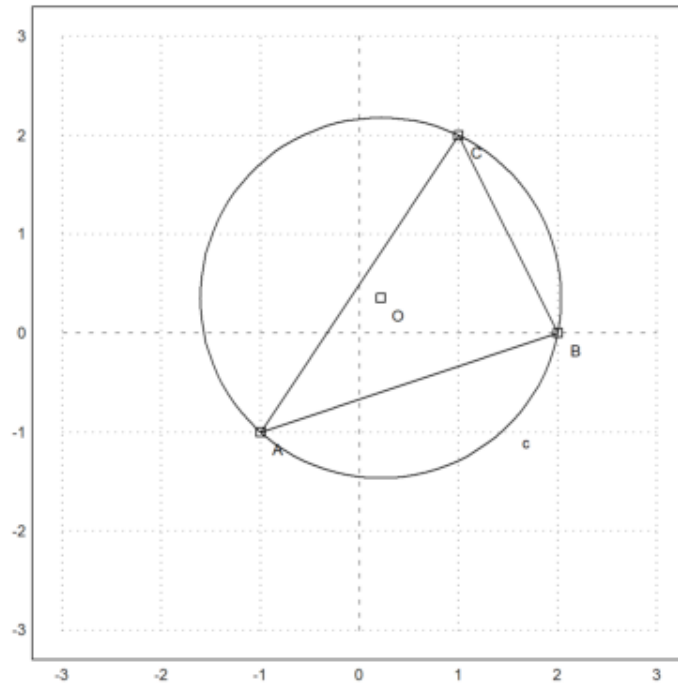
```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14}, \frac{5}{14}\right]$$

Gambarkan lingkaran dan pusatnya. Cu dan U adalah simbolis. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```





Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (orthocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
> perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[ \frac{11}{7}, \frac{2}{7} \right]$$

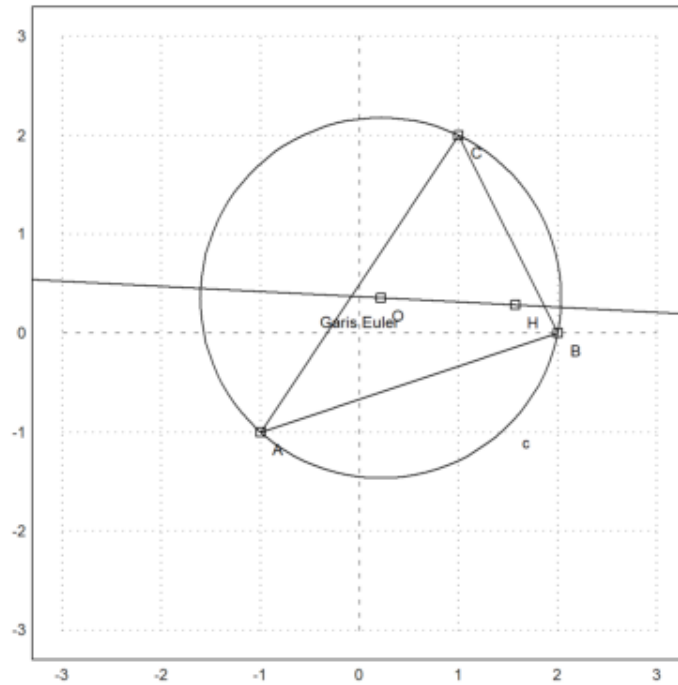
Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19y}{14} - \frac{x}{14} = -\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kami.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

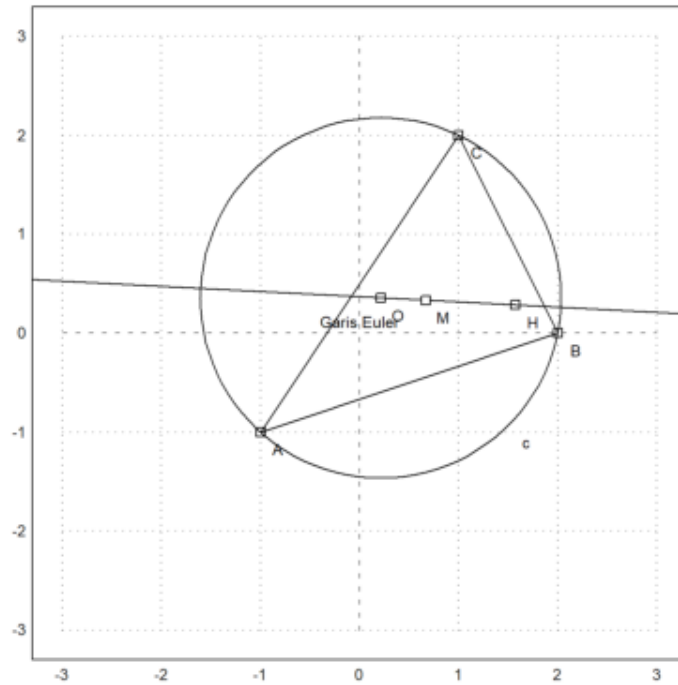


Pusat gravitasi harus berada di garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(e1,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```



Teorinya memberitahu kita  $MH=2*MO$ . Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

2

Fungsi termasuk fungsi untuk sudut juga.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right)$$

60°15'18.43''

Persamaan untuk pusat incircle tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[ \frac{\left(2^{\frac{3}{2}} + 1\right) \sqrt{5} \sqrt{13} - 15 \sqrt{2} + 3}{14}, \frac{(\sqrt{2} - 3) \sqrt{5} \sqrt{13} + 5 \cdot 2^{\frac{3}{2}} + 5}{14} \right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi untuk jari-jari lingkaran yang tertulis.

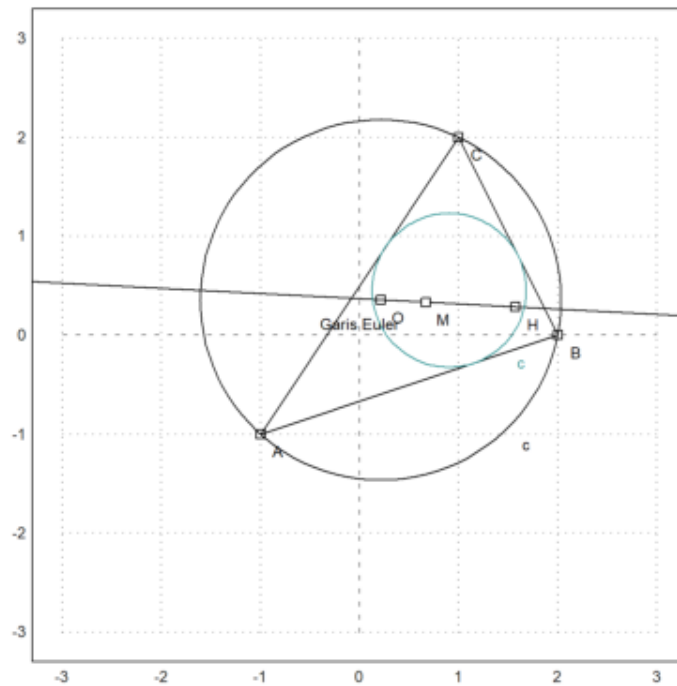
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{(-41\sqrt{2}-31)\sqrt{5}\sqrt{13}+115\sqrt{2}+614}}{7\sqrt{2}}$$

```
>LD &= circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



## Parabola

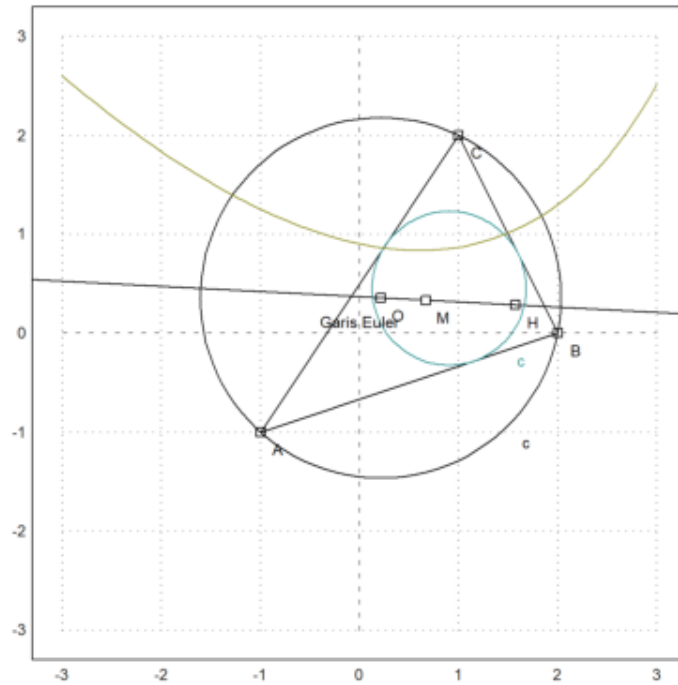
Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3y-x+2}{\sqrt{10}} - \sqrt{(2-y)^2 + (1-x)^2} = 0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



Ini seharusnya menjadi beberapa fungsi, tetapi pemecah default Maxima hanya dapat menemukan solusinya, jika kita kuadratkan persamaannya. Akibatnya, kami mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

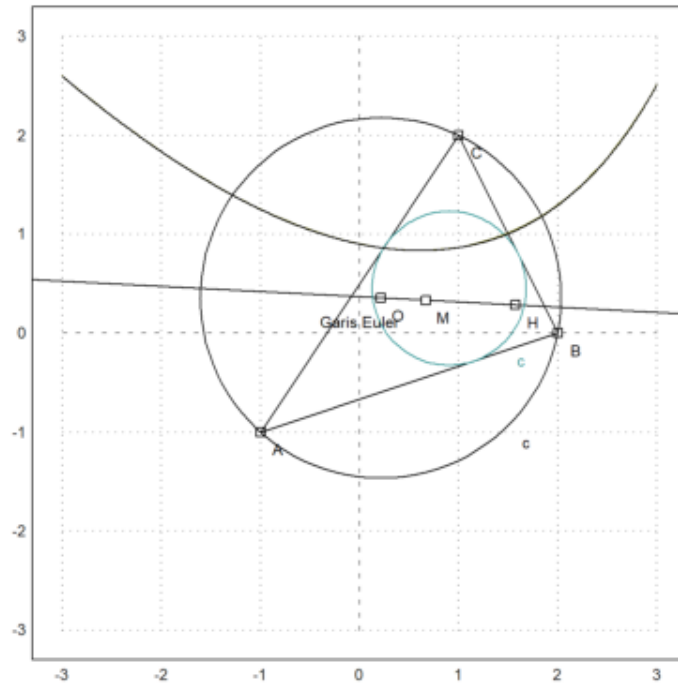
$$\begin{aligned} [y = -3x - \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26, \\ y = -3x + \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26] \end{aligned}$$

Solusi pertama adalah

maxima: akar[1]

Menambahkan solusi pertama ke plot menunjukkan, bahwa itu memang jalan yang kita cari. Teorinya memberi tahu kita bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```



```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x) // fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g(x) = -3x - \sqrt{70}\sqrt{9-2x} + 26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$\sqrt{1503 - 54\sqrt{11}\sqrt{70}}$$

2.135605779339061

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[ \frac{80 - 3\sqrt{11}\sqrt{70}}{10}, \frac{20 - \sqrt{11}\sqrt{70}}{10} \right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jarak T ke AB
```

$$\sqrt{1503 - 54\sqrt{11}\sqrt{70}}$$

2.135605779339061

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

## Contoh 5: Trigonometri

### Rasional

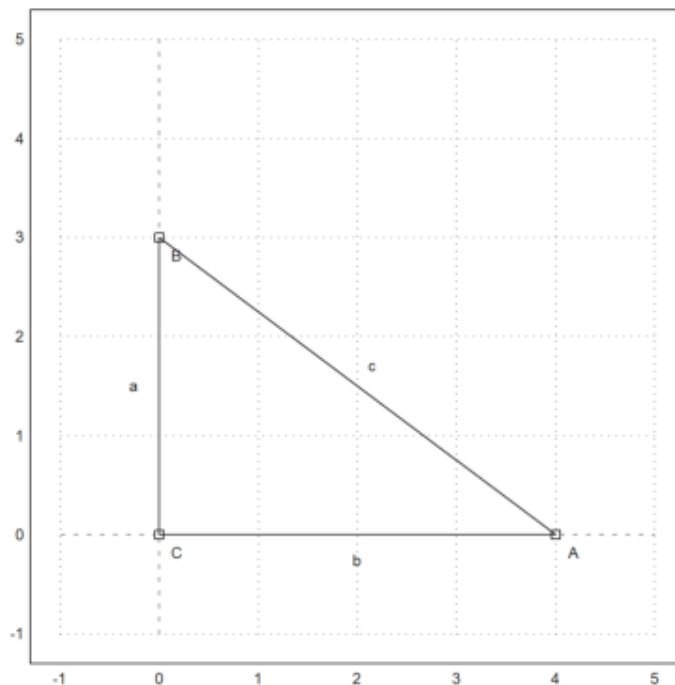
---

Intinya adalah bahwa perhitungan rasional simbolis sering kali menghasilkan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang hanya mengevaluasi perkiraan numerik.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kami menggunakan segitiga perseg panjang dengan proporsi Mesir terkenal 3, 4 dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk merencanakan geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

```
>C:= [0,0]; A:= [4,0]; B:= [0,3]; ...  
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...  
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...  
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...  
>insimg(30);
```



Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana  $w_a$  adalah sudut di A. Cara yang biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan mengambil invers dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak kira-kira.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

36°52'11.63''

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama trigonometri rasional adalah kuadran, yang menggantikan jarak. Sebenarnya, itu hanya jarak kuadrat. Berikut ini,  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  menunjukkan kuadrat dari sisi-sisinya.

Teorema Pythagoras menjadi  $a+b=c$ .

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

25 = 25

Pengertian kedua dari trigonometri rasional adalah penyebaran. Spread mengukur pembukaan antar baris. Ini adalah 0, jika garis-garisnya sejajar, dan 1, jika garis-garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat sinus sudut antara dua garis.

Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai:

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana  $a$  dan  $c$  adalah kuadrat dari sembarang segitiga siku-siku dengan salah satu sudut di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$\frac{9}{25}$

Ini lebih mudah dihitung daripada sudut, tentu saja. Tetapi Anda kehilangan properti bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita dapat mengonversi nilai perkiraan untuk sudut  $w_a$  menjadi sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

9/25

Hukum kosinus trigonometri klasik diterjemahkan menjadi "hukum silang" berikut.

$$(c + b - a)^2 = 4bc(1 - s_a)$$



Di sini  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  adalah kuadrat dari sisi-sisi segitiga, dan  $sa$  adalah penyebaran sudut  $A$ . Sisi  $a$ , seperti biasa, berhadapan dengan sudut  $A$ .

Hukum ini diimplementasikan dalam file geometri.e yang kami muat ke Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$\left[ \left( bb - aa + \frac{7}{6} \right)^2, \left( bb - aa + \frac{7}{6} \right)^2, \left( bb - aa + \frac{5}{3\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \left[ \frac{14 bb (1 - saa)}{3}, \frac{14 bb (1 - saa)}{3}, \frac{5 \cdot 2^{\frac{3}{2}} bb (1 - saa)}{3} \right]$$

Dalam kasus kami, kami mendapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari spread di  $A$ . Untuk melakukan ini, kita buat crosslaw untuk kuadran  $a$ ,  $b$ , dan  $c$ , dan selesaikan untuk spread yang tidak diketahui  $sa$ .

Anda dapat melakukannya dengan tangan dengan mudah, tetapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasilnya, kami sudah memilikinya.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$1024 = 1600 (1 - x)$$

$$\left[ x = \frac{9}{25} \right]$$

Kita sudah tahu ini. Definisi spread adalah kasus khusus dari crosslaw.

Kita juga dapat menyelesaikan ini untuk umum  $a,b,c$ . Hasilnya adalah rumus yang menghitung penyebaran sudut segitiga yang diberikan kuadrat dari ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[ \left[ \frac{168 bb x + 36 bb^2 + (-72 aa - 84) bb + 36 aa^2 - 84 aa + 49}{36}, \frac{168 bb x + 36 bb^2 + (-72 aa - 84) bb + 36 aa^2 - 84 aa + 49}{36}, \frac{168 bb x + 36 bb^2 + (-72 aa - 84) bb + 36 aa^2 - 84 aa + 49}{36} \right] \right]$$

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometri.e dari Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi

$$a, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, yang tidak begitu mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a, a, 4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

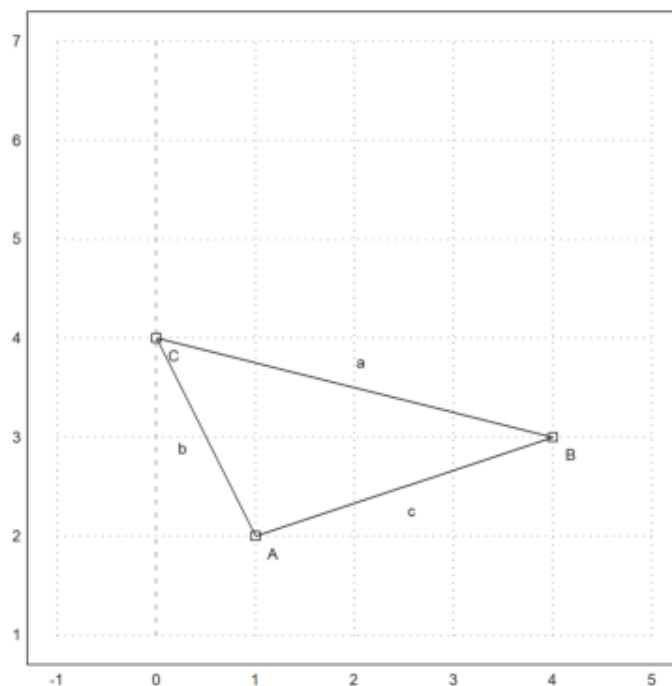
67°47'32.44''

## Contoh lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih maju.

Kami mengatur tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A:= [1,2]; B:= [4,3]; C:= [0,4]; ...  
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...  
>plotPoint(A, "A"); plotPoint(B, "B"); plotPoint(C, "C"); ...  
>plotSegment(B,A, "c"); plotSegment(A,C, "b"); plotSegment(C,B, "a"); ...  
>insimg;
```



Menggunakan Pythagoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Saya pertama kali menggunakan jarak fungsi file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga mengandung fungsi untuk kuadran antara dua titik.

Dalam contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga itu bukan persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

10

5

17

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode biasa berdasarkan hasil kali titik dua vektor. Hasilnya adalah beberapa pendekatan floating point.

$$A = \langle 1, 2 \rangle \quad B = \langle 4, 3 \rangle, \quad C = \langle 0, 4 \rangle$$

$$\mathbf{a} = C - B = \langle -4, 1 \rangle, \quad \mathbf{c} = A - B = \langle -3, -1 \rangle, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \cos \beta$$

$$\cos \angle ABC = \cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}|} = \frac{12 - 1}{\sqrt{17} \sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17} \sqrt{10}}$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180) ()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10} \sqrt{17}}\right)$$

32.4711922908

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kami memasukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan menyelesaikan x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$4 = 200(1 - x)$$

$$\left[ x = \frac{49}{50} \right]$$

Yaitu, apa yang dilakukan oleh penyebaran fungsi yang didefinisikan dalam "geometry.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksanya. Itu menyelesaikan istilah  $\sin(\arccos(\dots))$  menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita memiliki spread di B, kita dapat menghitung tinggi  $h_a$  di sisi a. Ingat bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

Menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut telah dihasilkan dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadrat dan menyebar.

image: (20) Rational\_Geometry\_CaR.png

Menurut definisi, panjang  $h_a$  adalah akar kuadrat dari kuadratnya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berhadapan dengan kuadrat!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus determinan biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

## Rumus Bangau

---

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama kita hitung spread di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat ("quadrea"?), faktorkan dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{-c^4 - (-2b^2 - 2a^2)c^2 - b^4 + 2a^2b^2 - a^4}{4a^2c^2}$$
$$\frac{(-c+b+a)(c-b+a)(c+b-a)(c+b+a)}{16}$$

## Aturan Triple Spread

---

Kerugian dari spread adalah mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut yang sama.

Namun, tiga spread dari sebuah segitiga memenuhi aturan "triple spread" berikut.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sc + sb + sa)^2 = 2(sc^2 + sb^2 + sa^2) + 4sa sb sc$$

Aturan ini berlaku untuk setiap tiga sudut yang menambah 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Sejak menyebar

$$\alpha, \pi - \alpha$$

sama, aturan triple spread juga benar, jika

$$\alpha + \beta = \gamma$$

Karena penyebaran sudut negatif adalah sama, aturan penyebaran rangkap tiga juga berlaku, jika

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Misalnya, kita dapat menghitung penyebaran sudut  $60^\circ$ . Ini  $3/4$ . Persamaan memiliki solusi kedua, bagaimana pun, di mana semua spread adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x, x, x), x)
```

$$\left[ x = \frac{3}{4}, x = 0 \right]$$

Sebaran  $90^\circ$  jelas 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi  $90^\circ$ , sebarannya menyelesaikan persamaan sebaran rangkap tiga dengan a,b,1. Dengan perhitungan berikut kita mendapatkan a+b=1.

```
>$triplespread(x, y, 1), $solve(%, x)
```

$$(y + x + 1)^2 = 2(y^2 + x^2 + 1) + 4xy$$

$$[x = 1 - y]$$

Karena sebaran  $180^\circ$ -t sama dengan sebaran t, rumus sebaran rangkap tiga juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau selisih dua sudut lainnya.

Jadi kita dapat menemukan penyebaran sudut berlipat ganda. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kami membuat ini fungsi.

```
>$solve(triplespread(a, a, x), x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

$$[x = 4a - 4a^2, x = 0]$$

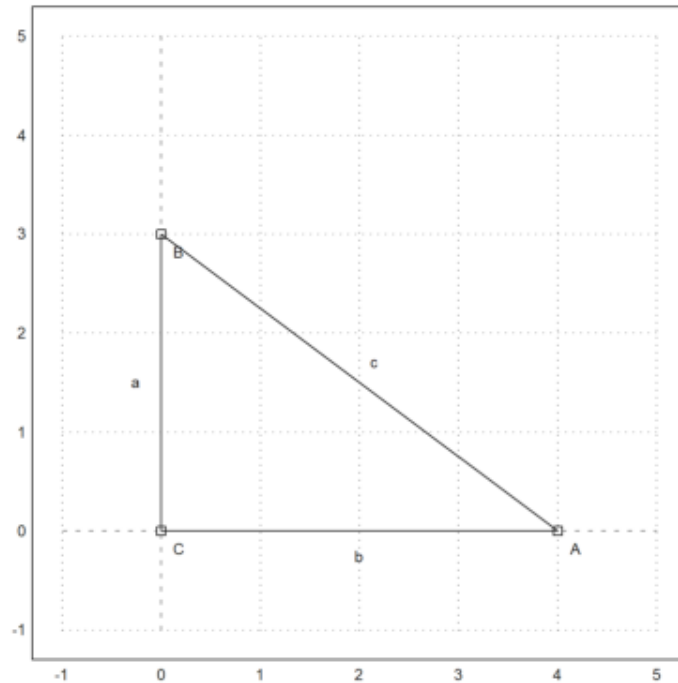
$$- 4 (a - 1) a$$

---

## Pembagi Sudut

Ini situasinya, kita sudah tahu.

```
>C:= [0,0]; A:= [4,0]; B:= [0,3]; ...  
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...  
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...  
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...  
>insimg;
```



Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Tetapi kita ingin menyelesaikannya untuk umum a,b,c.

```
>remvalue(a,b,c);
```

Jadi pertama-tama kita hitung penyebaran sudut yang dibagi dua di A, dengan menggunakan rumus sebaran rangkap tiga.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut terbelah 180°-wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\left(2x + \frac{a}{b+a}\right)^2 = 2\left(2x^2 + \frac{a^2}{(b+a)^2}\right) + \frac{4ax^2}{b+a}$$

$$\left[x = \frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b+2a}, x = \frac{\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b+2a}\right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b+2a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kami dapat mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

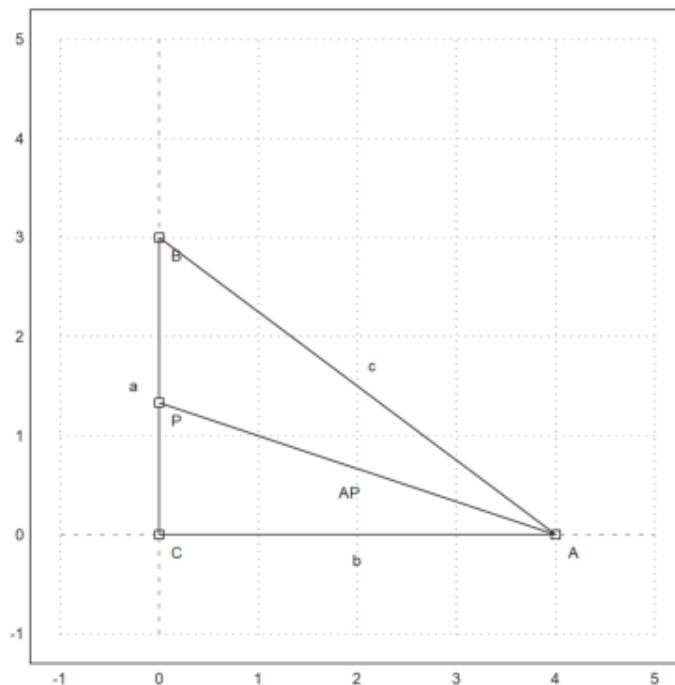
18°26'5.82''

Titik P adalah perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

[0, 1.33333]

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Mari kita periksa sudut dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

0.321750554397

0.321750554397

Sekarang kita hitung panjang garis bagi AP.

Kami menggunakan teorema sinus dalam segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AP}{\sin(w_c)}$$



berlaku dalam segitiga apa pun. Kuadratkan, itu diterjemahkan ke dalam apa yang disebut "hukum penyebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_c}$$

di mana a,b,c menunjukkan qudrances.

Karena spread CPA adalah  $1-sa^2$ , kita dapatkan darinya bisa  $1/b/(1-sa^2)$  dan dapat menghitung bisa (kuadran dari garis-bagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa^2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2b(b+a)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])"), distance(A,P))
```

4.21637021356

4.21637021356

Kita juga dapat menghitung P menggunakan rumus spread.

```
>py&=factor(ratsimp(sa^2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b(\sqrt{b}\sqrt{b+a}-b-a)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

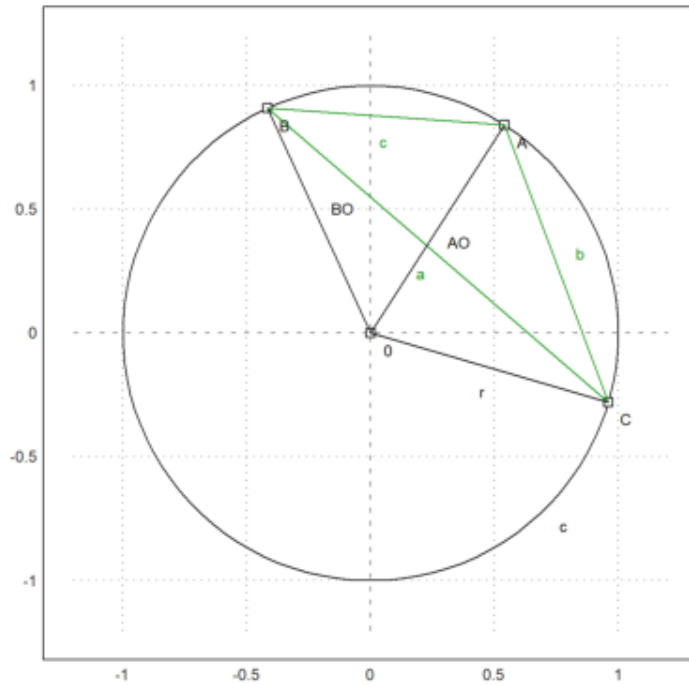
1.33333333333

## Sudut Akord

---

Perhatikan situasi berikut.

```
>setPlotRange(1.2); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>color(1); O:=[0,0]; plotPoint(O,"O"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```



Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran rangkap tiga untuk sudut-sudut di pusat O untuk r. Jadi kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari pericircle dalam hal kuadrat dari sisi.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa nol kompleks, yang kita abaikan.

```
>remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$\frac{abc}{c^2 - 2bc + a(-2c - 2b) + b^2 + a^2}$$

Kita dapat menjadikannya sebagai fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk poin A,B,C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Jari-jarinya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

Faktanya, spread CBA hanya bergantung pada  $b$  dan  $c$ . Ini adalah teorema sudut chord.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Sebenarnya spreadnya adalah  $b/(4r)$ , dan kita melihat bahwa sudut chord dari chord  $b$  adalah setengah dari sudut pusat.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

$$0$$

## Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

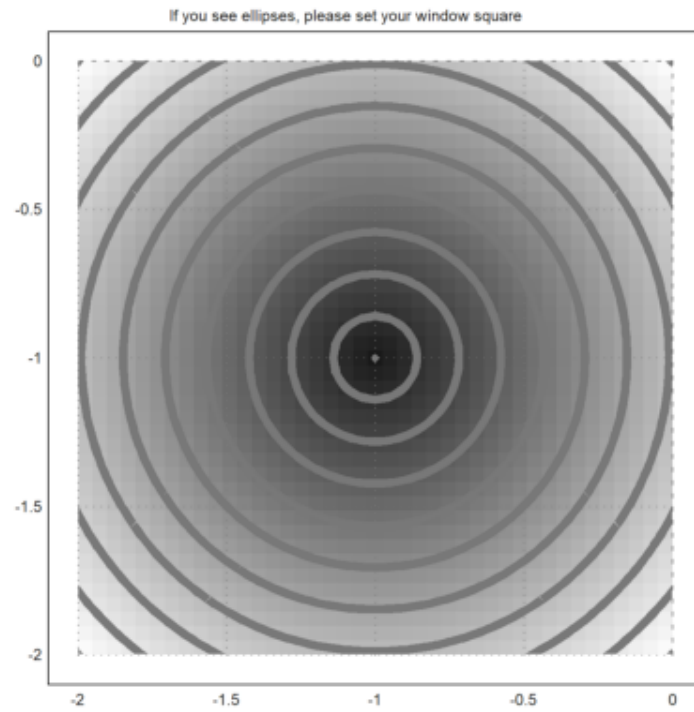
---

### Catatan awal

---

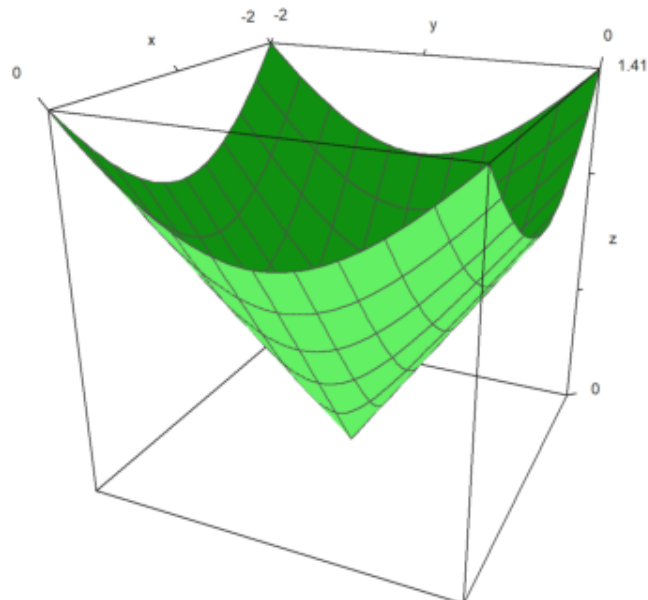
Fungsi yang, ke titik  $M$  di bidang, menetapkan jarak  $AM$  antara titik tetap  $A$  dan  $M$ , memiliki garis level yang agak sederhana: lingkaran berpusat di  $A$ .

```
>&remvalue();  
>A=[-1,-1];  
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)  
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...  
>title="If you see ellipses, please set your window square");
```



dan grafiknya juga agak sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1", xmin=-2, xmax=0, ymin=-2, ymax=0) :
```

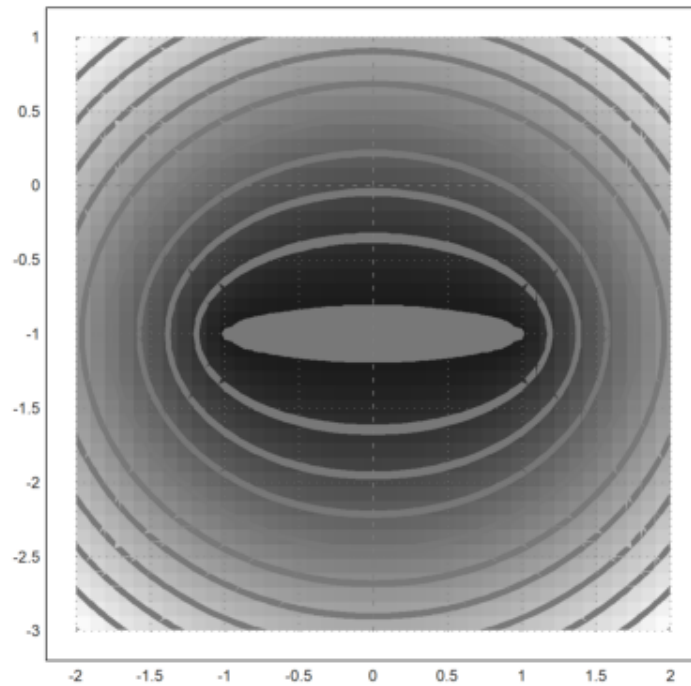


Tentu saja minimal 0 dicapai di A.

Dua poin

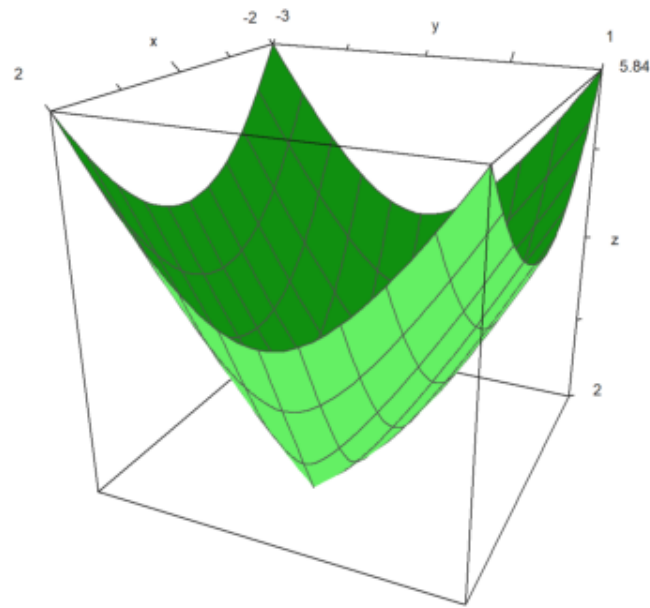
Sekarang kita lihat fungsi  $MA+MB$  dimana  $A$  dan  $B$  adalah dua titik (tetap). Ini adalah "fakta yang diketahui" bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah  $A$  dan  $B$ ; kecuali untuk  $AB$  minimum yang konstan pada segmen  $[AB]$ :

```
>B=[1, -1];  
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)  
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



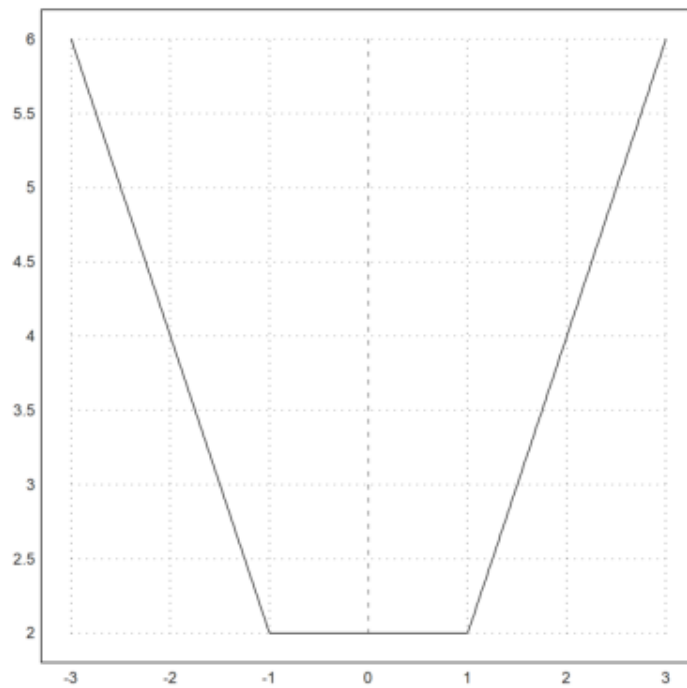
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Pembatasan garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)", xmin=-3, xmax=3) :
```



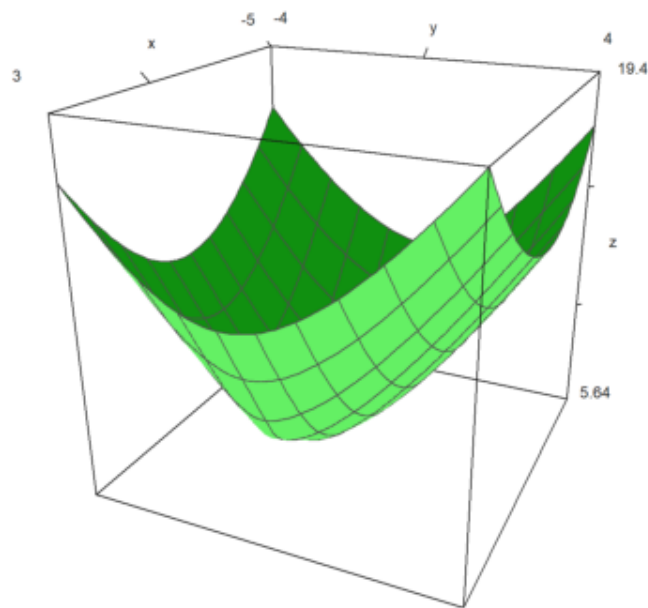
Tiga poin

Sekarang hal-hal yang kurang sederhana: Ini sedikit kurang terkenal bahwa  $MA+MB+MC$  mencapai minimum pada satu titik pesawat tetapi untuk menentukan itu kurang sederhana:

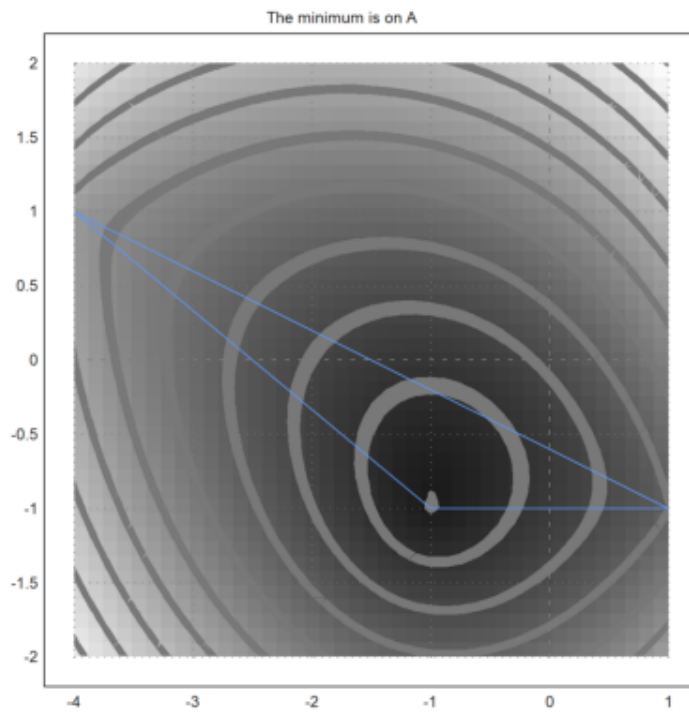
1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari  $120^\circ$  (katakanlah di A), maka minimum dicapai pada titik ini (misalnya  $AB+AC$ ).

Contoh:

```
>C=[-4,1];  
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)  
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);  
>insimg;
```

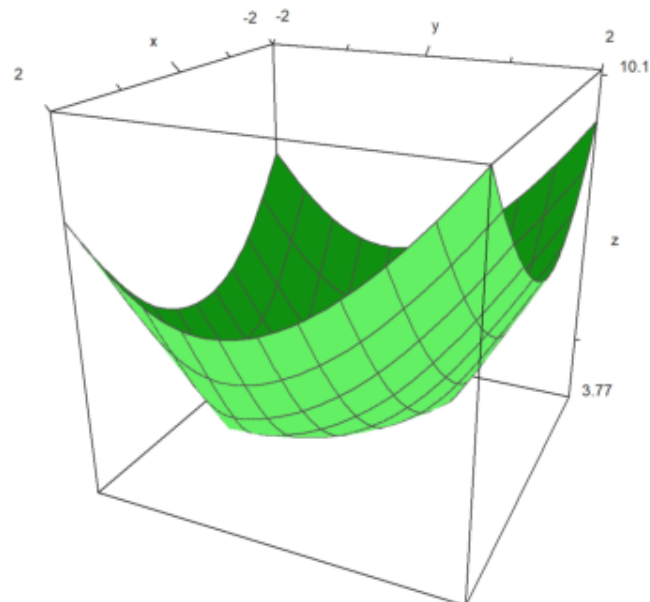


```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");  
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);  
>insimg;
```



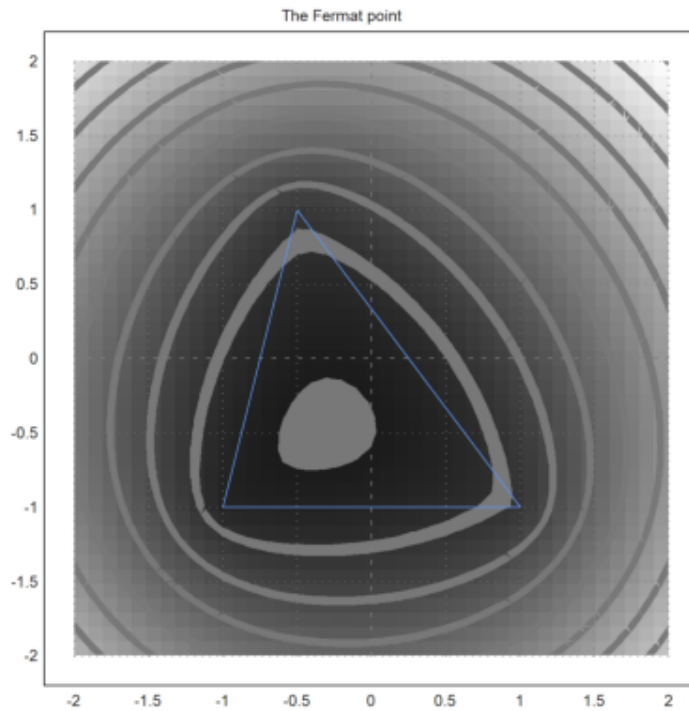
2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari  $120^\circ$ , minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (maka masing-masing  $120^\circ$ ):

```
>C=[-0.5, 1];
>plot3d("d3", xmin=-2, xmax=2, ymin=-2, ymax=2) :
```





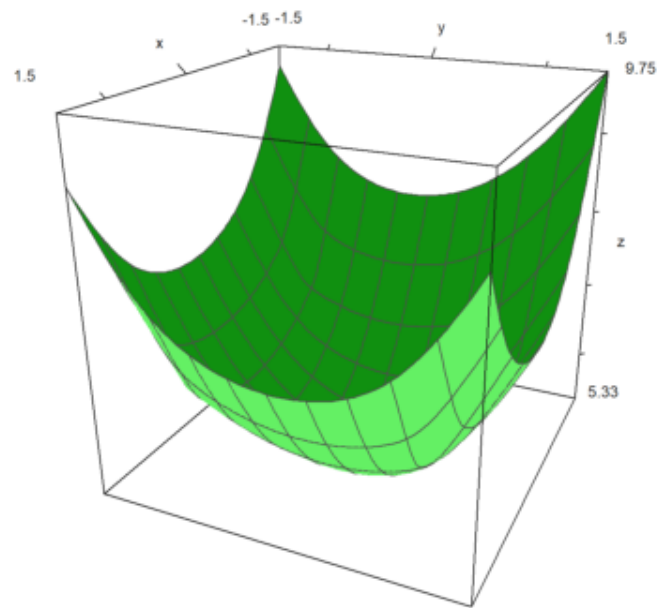
```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```



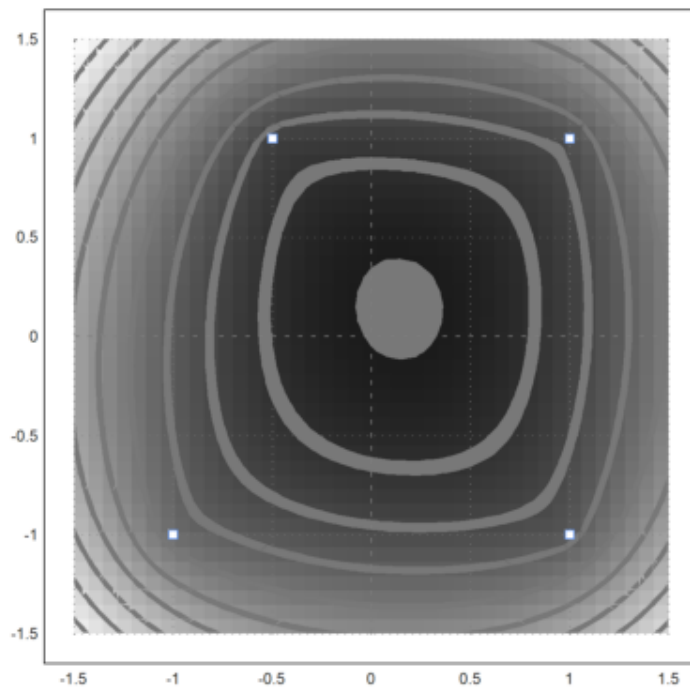
## Empat poin

Langkah selanjutnya adalah menambahkan 4 titik D dan mencoba meminimalkan  $MA+MB+MC+MD$ ; katakan bahwa Anda adalah operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus meletakkan antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```



```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```



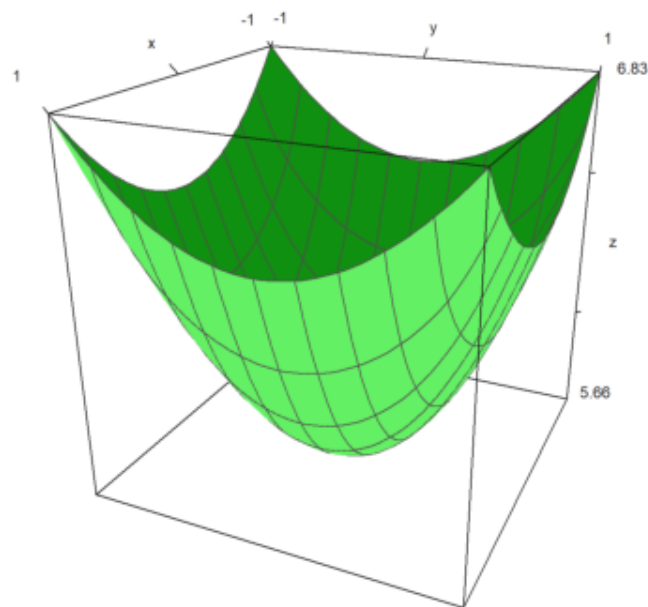
Masih ada minimum dan tidak tercapai di salah satu simpul A, B, C atau D:

```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

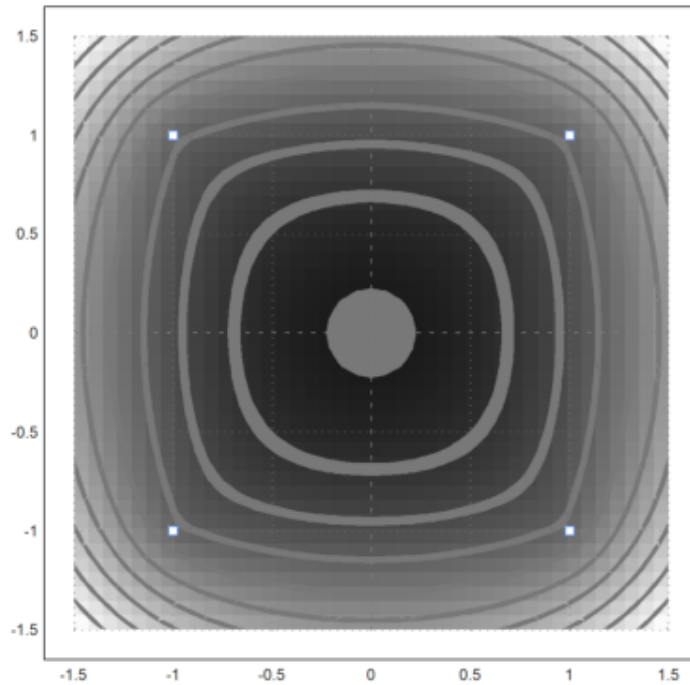
```
[0.142858, 0.142857]
```

Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal adalah rasional atau mendekati rasional...  
Sekarang ABCD adalah persegi, kami berharap bahwa titik optimal akan menjadi pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```



```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```



## Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe di jalur program.

Pertama kita hitung jari-jari bola.

Jika Anda melihat gambar di bawah, Anda melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kami menggunakan file geometri.e dari Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

$$[- a, 1, 0]$$

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

$$[- a, - 1, 0]$$

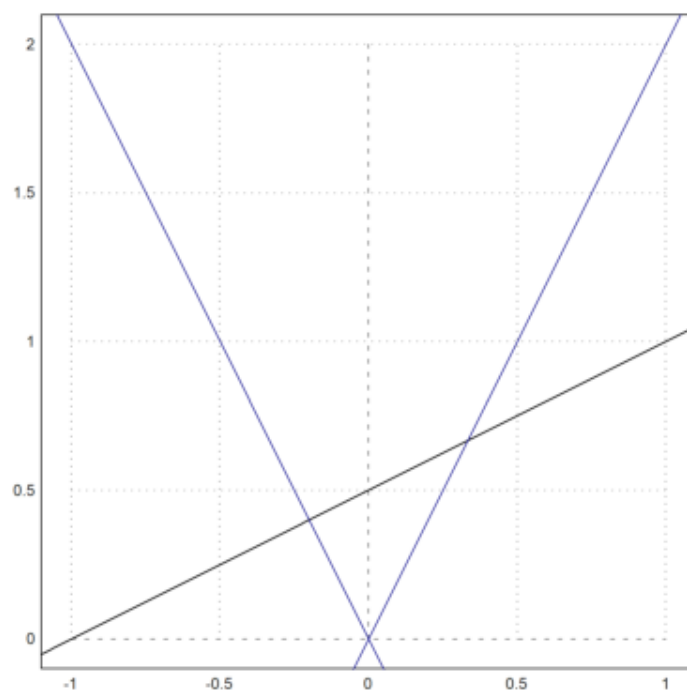
Kemudian saya baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

`[- 1, 2, 1]`

Kami merencanakan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);  
>color(black); plotLine(g(),"")  
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

`[0, u]`

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 u}{a^2 + 1} - u\right)^2 + \frac{a^2 u^2}{(a^2 + 1)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2 + \frac{(2u-1)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[ u = \frac{-\sqrt{5}\sqrt{a^2+1}+2a^2+2}{4a^2-1}, u = \frac{\sqrt{5}\sqrt{a^2+1}+2a^2+2}{4a^2-1} \right]$$

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

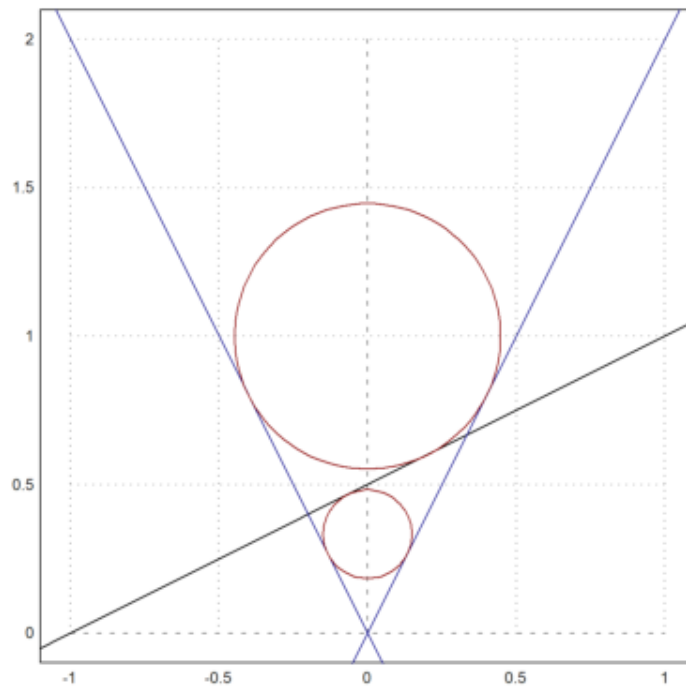
```
[0.333333, 1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071, 0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);  
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]), "");  
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]), "");  
>insimg;
```



## Plot dengan Povray

Selanjutnya kami merencanakan semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan menjalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return. Pertama kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe

Kami mengatur adegan dengan tepat.

```
>povstart (zoom=11, center=[0,0,0.5], height=10°, angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis dua bidang ke file Povray.

```
>writeln (povsphere ([0,0,u[1]], dd[1], povlook (red)));
>writeln (povsphere ([0,0,u[2]], dd[2], povlook (red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln (povcone ([0,0,0], 0, [0,0,a], 1, povlook (lightgray, 1)));
```

Kami menghasilkan bidang terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian kami menghasilkan dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus dari elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita hitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kita menghasilkan pita abu-abu, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.



```
>povend();
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Untuk mendapatkan Anaglyph ini kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali kemudian.

```
>function scene () ...
```

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda membutuhkan kacamata merah/sian untuk menghargai efek berikut.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
```

```
povanaglyph:
  povray(currentfile,w,h,aspect,exit);
```

## Contoh 8: Geometri Bumi

Dalam buku catatan ini, kami ingin melakukan beberapa perhitungan sferis. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam file "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat file itu terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kami menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut koordinat Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569, 1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan `sposprint` (cetak posisi spherical).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

```
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama kita menghitung vektor dari satu ke yang lain pada bola ideal. Vektor ini `[pos, jarak]` dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang  $7^\circ$ .

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo
```

```
65°20'26.60''
```

```
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang baik. Rutinitas berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik. Pada jarak yang begitu pendek hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km", // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
88.0114026318 km
```

Ada fungsi untuk heading, dengan mempertimbangkan bentuk elips bumi. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo);
```

```
180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam  $\text{asum}-\pi$ .

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2", // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

```
2116.02948749 km^2
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Sebuah vektor berisi heading dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kami menggunakan `vector`. Untuk menambahkan vektor ke posisi, kami menggunakan `sadd`.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
```

```
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kami mendapatkan pendekatan yang baik.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km", // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
431.565659488 km
```

Judulnya sama dengan judul yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Namun, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan heading dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, tetapi mengambil perkiraan jari-jari bumi di sepanjang jalan.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu kita tidak bisa berlayar dengan tujuan yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin menempuh jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti heading yang konstan!

Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kami jauh dari tujuan yang benar, jika kami menggunakan pos yang sama selama perjalanan kami.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh dari jarak, menggunakan pos ke Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
S 6°11.250' E 106°48.372'  
1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran garis lintang 30°, melainkan jalur terpendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

79.69°

Tapi, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kami menyesuaikannya pada 1/10 dari total jarak.

```
>p=P1; dist=esdist(P1,P2); ...  
> loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

79.69°  
81.67°  
83.71°  
85.78°  
87.89°  
90.00°  
92.12°  
94.22°  
96.29°  
98.33°

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti heading yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

0.203km

Kami mendapatkan perkiraan yang baik, jika kami menyesuaikan pos setelah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

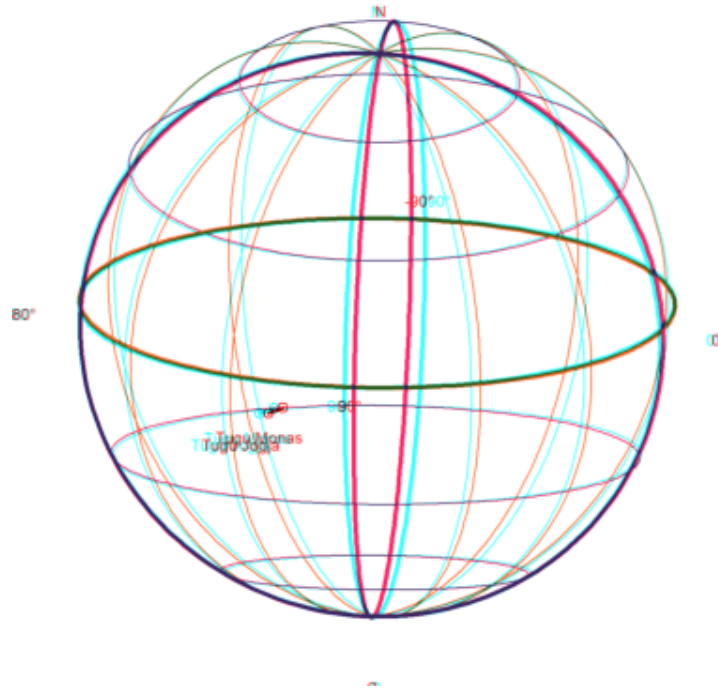
```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...  
> loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;  
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

0.000km



Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/sian.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```



---

## MENCOBA RUMUS-RUMUS PADA MATEI DI ATAS

---

### Geometri Simbolik

---

```
>A &= [2,0]; B &= [0,2]; C &= [3,3]; // menentukan tiga titik A, B, C  
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

$[-1, 3, 6]$

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$3y - x = 6$$

$$\left[ y = \frac{x}{3} + 2 \right]$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

$$[3, 1, 6]$$

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

$$\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -, & - \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[ \frac{6}{5}, \frac{12}{5} \right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{2^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[ \frac{7}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2^{\frac{3}{2}}} \right]$$

```
>r=&getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$\frac{5}{2^{\frac{3}{2}}}$$
$$1.767766952966368$$

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$$



```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P := lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2
```

$$\left[ \frac{\sqrt{2}\sqrt{10}+2}{4}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{10}+2}{4} \right]$$

```
>P() //
```

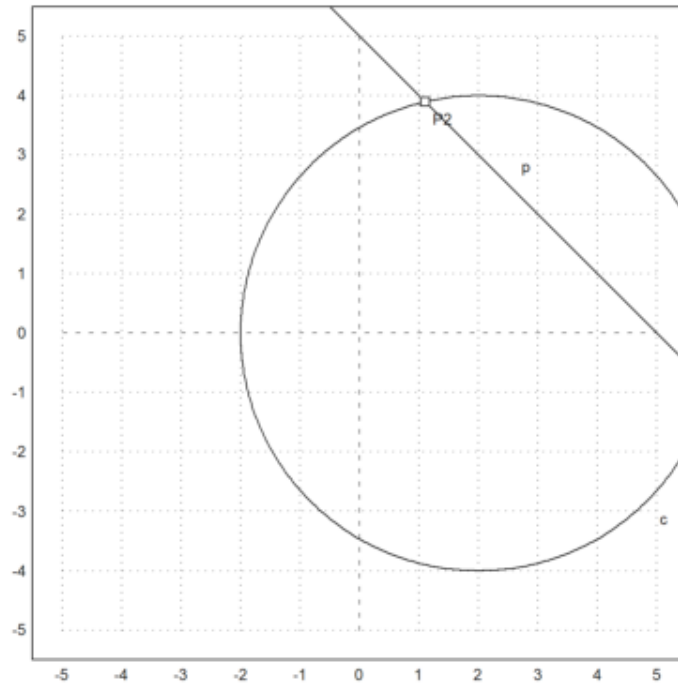
```
[1.61803, 1.61803]
```

## Garis dan Lingkaran yang berpotongan

```
>A := [2,0]; c=circleWithCenter(A,4);  
>B := [2,3]; C := [3,2]; l=lineThrough(B,C);  
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);  
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);  
>P1, P2,
```

```
[5.89792, -0.897916]  
[1.10208, 3.89792]
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



```
>c = circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[2, 0, 4]
```

```
>l = lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 5]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[ \left[ \frac{\sqrt{23}+7}{2}, \frac{3-\sqrt{23}}{2} \right], \left[ \frac{7-\sqrt{23}}{2}, \frac{\sqrt{23}+3}{2} \right] \right]$$

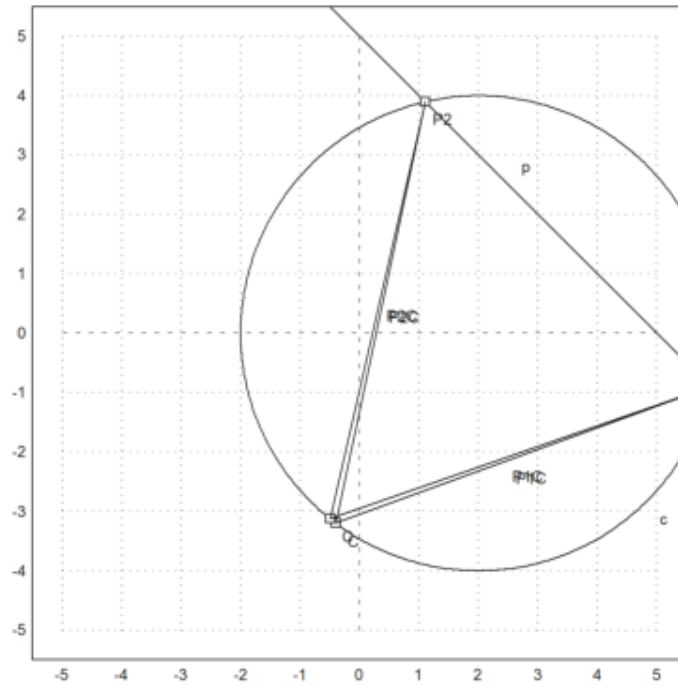
```
>C=A+normalize([-3,-4])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>deprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
57°58'20.06''
```

```
>C=A+normalize([-4,-5])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>deprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

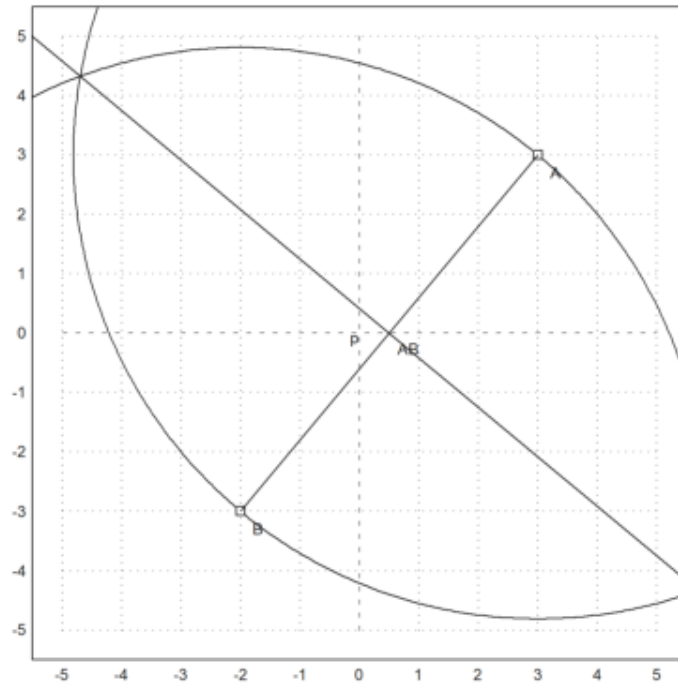
57°58'20.06''

```
>insimg;
```



**Garis Sumbu**

```
>A=[3,3]; B=[-2,-3];  
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));  
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));  
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);  
>l=lineThrough(P1,P2);  
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);  
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```



```

>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)

```

$$\left[ y = \frac{-(2b_1 - 2a_1)x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2b_2 - 2a_2} \right]$$

```

>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)

```

$$\left[ y = \frac{-(2b_1 - 2a_1)x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2b_2 - 2a_2} \right]$$

```

>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)

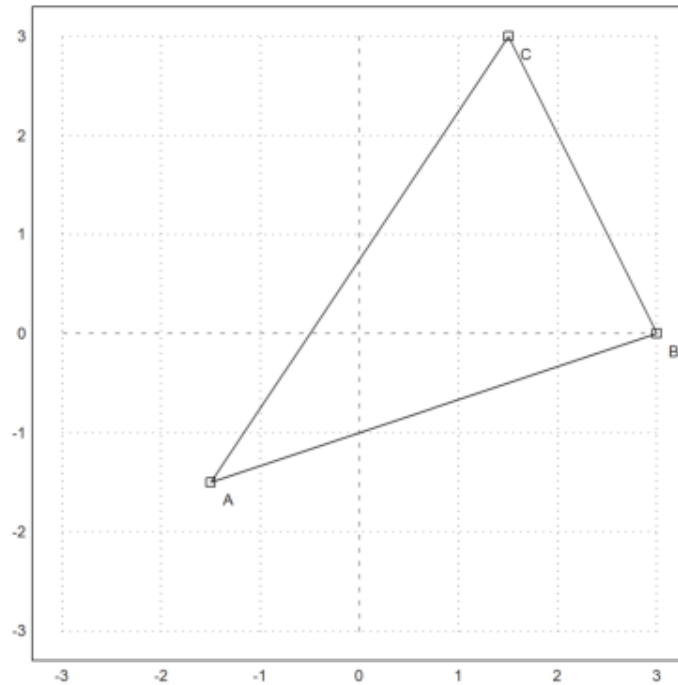
```

$$\left[ y = \frac{(b_2 - a_2)x - a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 - a_1} \right]$$

**Garis Euler dan Parabola**

```
>A:=[-1.5,-1.5]; B:=[3,0]; C:=[1.5,3];  
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```



```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{63}{8}$$

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

$$\left[-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right]$$

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$\frac{9y}{2} - \frac{3x}{2} = -\frac{9}{2}$$

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{\sqrt{2} \left( \frac{9y}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{9}{2} \right)}{3\sqrt{5}}$$
$$\frac{21}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{5}}$$

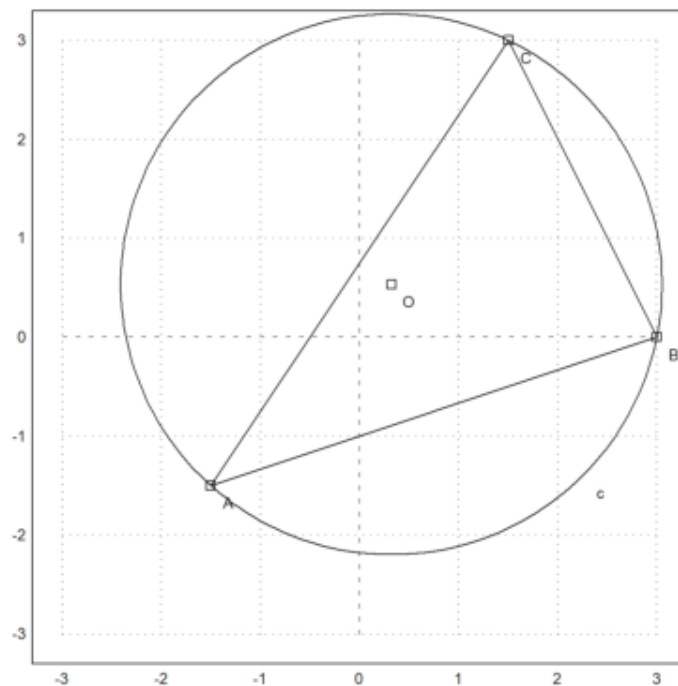
```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$\left( y - \frac{15}{28} \right)^2 + \left( x - \frac{9}{28} \right)^2 = \frac{2925}{392}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[ \frac{9}{28}, \frac{15}{28} \right]$$

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



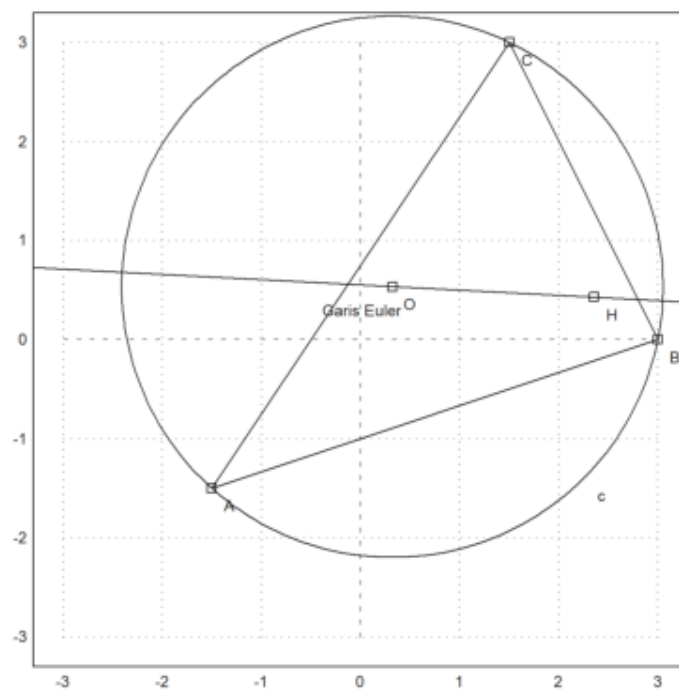
```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...  
> perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[ \frac{33}{14}, \frac{3}{7} \right]$$

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{57y}{28} - \frac{3x}{28} = -\frac{9}{8}$$

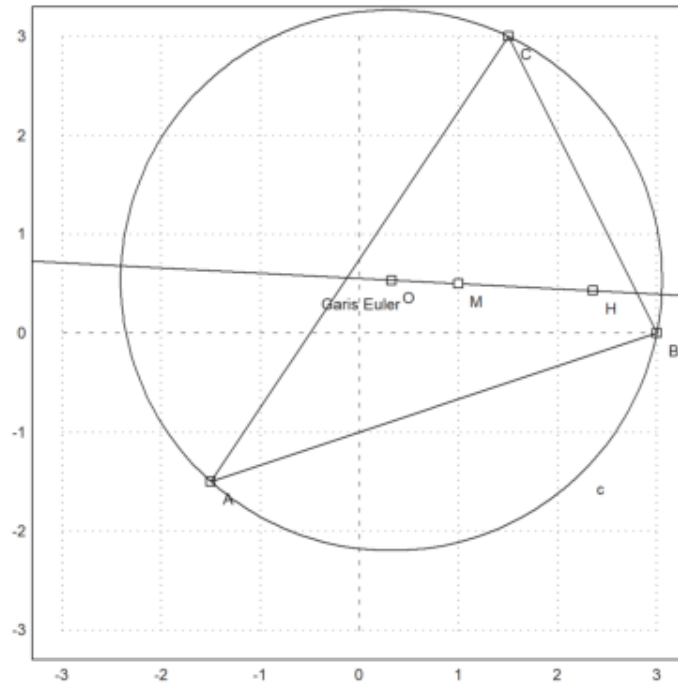
```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```



```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{9}{8} = -\frac{9}{8}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```



```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

2

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right)$$

60°15'18.43''

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B), angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[ \frac{\left(32^{\frac{3}{2}} + 3\right) \sqrt{5}\sqrt{13} - 45\sqrt{2} + 9}{28}, \frac{(3\sqrt{2} - 9) \sqrt{5}\sqrt{13} + 15 \cdot 2^{\frac{3}{2}} + 15}{28} \right]$$

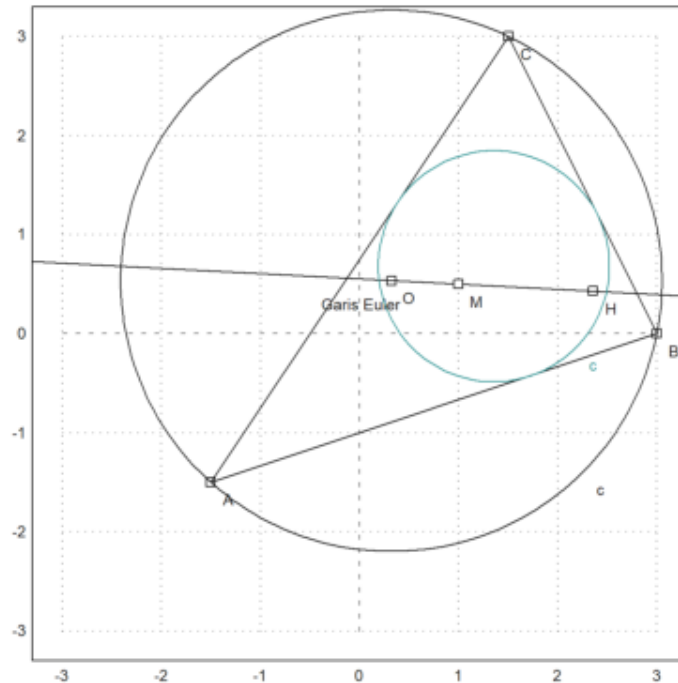
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{(-369\sqrt{2} - 279) \sqrt{5}\sqrt{13} + 1035\sqrt{2} + 5526}}{72^{\frac{3}{2}}}$$



```
>LD &= circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

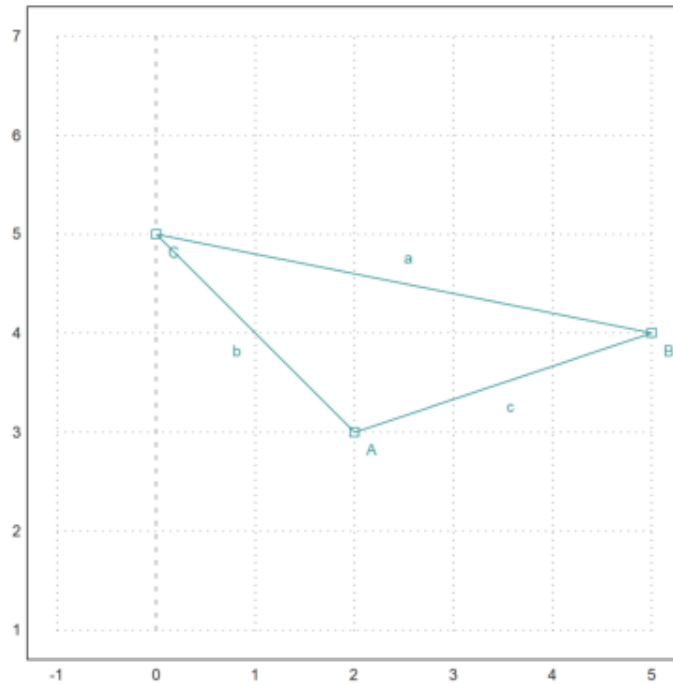
```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



---

### contoh lain dari materi trigonometri rasional

```
>A:= [2,3]; B:= [5,4]; C:= [0,5]; ...  
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...  
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...  
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...  
>insimg;
```



```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$10$$

$$8$$

$$26$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{14}{\sqrt{10}\sqrt{26}}\right)$$

$$29.7448812969$$

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$64 = 320(1 - x)$$

$$\left[ x = \frac{4}{5} \right]$$

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{16}{65}$$

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{16}{65}$$

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{32}{13}$$

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{2^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{13}}$$

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{26}}{\sqrt{13}}$$

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

4

**Aturan penyebaran 3 kali lipat**

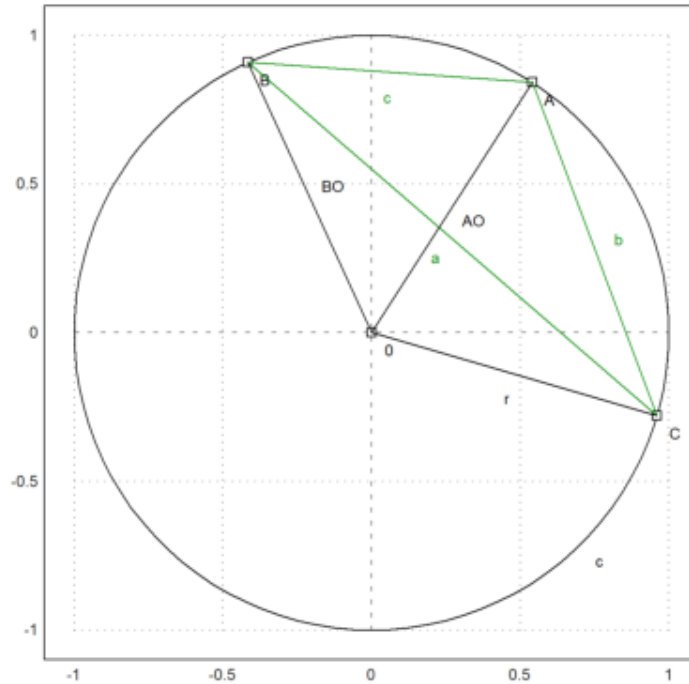
---

```
>setPlotRange(1); ...  
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...  
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...  
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
```

```

>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>color(1); O:=[0,0]; plotPoint(O,"0"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;

```



```

>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc

```

$$-\frac{abc}{c^2 - 2bc + a(-2c - 2b) + b^2 + a^2}$$

```

>function periradius(a,b,c) &= rabc;

```

```

>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);

```

```

>periradius(a,b,c)

```

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

$$0$$

## Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

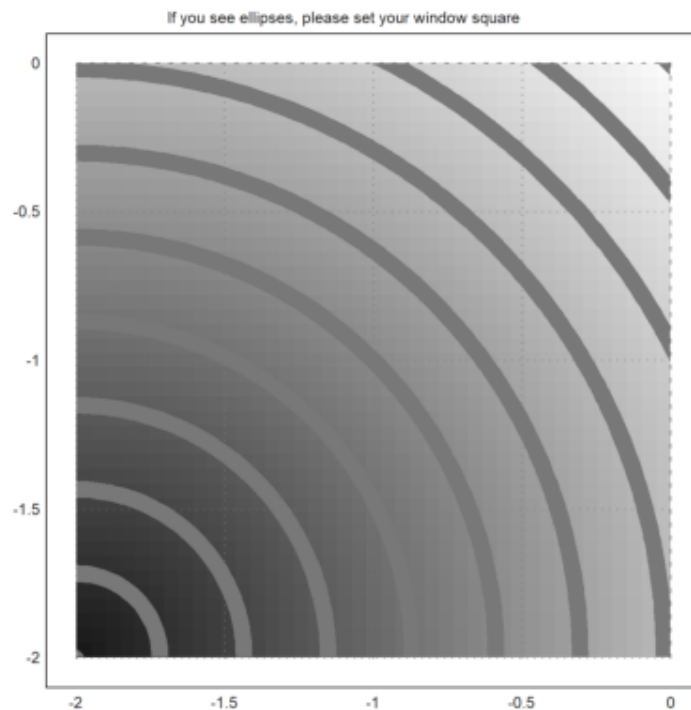
---

### Catatan awal

---

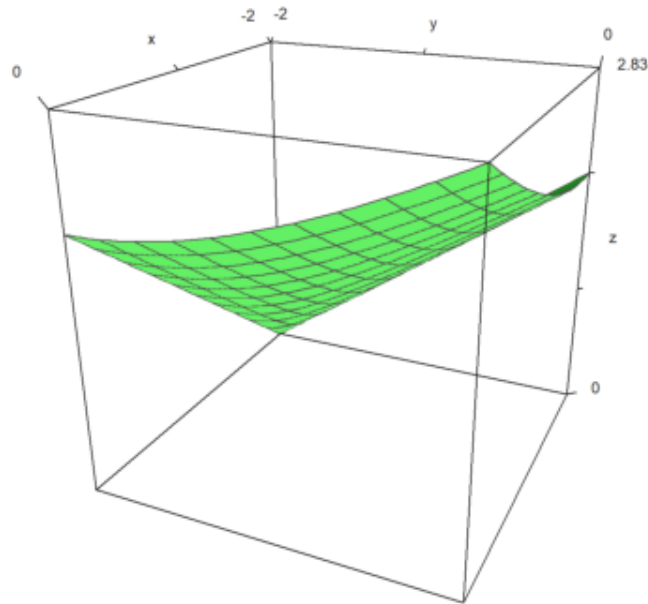
Fungsi yang, ke titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis level yang agak sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();  
>A=[-2,-2];  
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)  
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1,...  
>title="If you see ellipses, please set your window square");
```



dan grafiknya juga agak sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

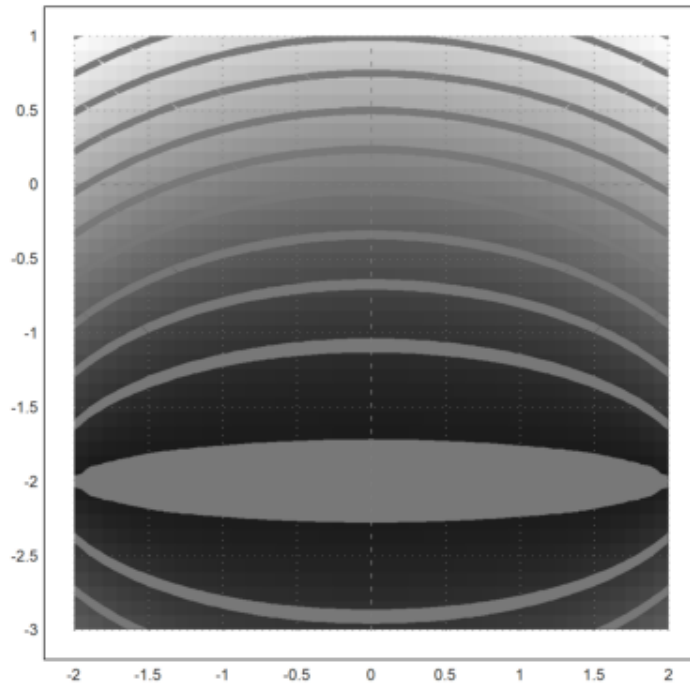


Ternyata setelah mencoba yang bisa hanya dengan memasukkan angka 1, karena ketika memakai angka 2, plot tidak membentuk kerucut diatas.

**Dua poin**

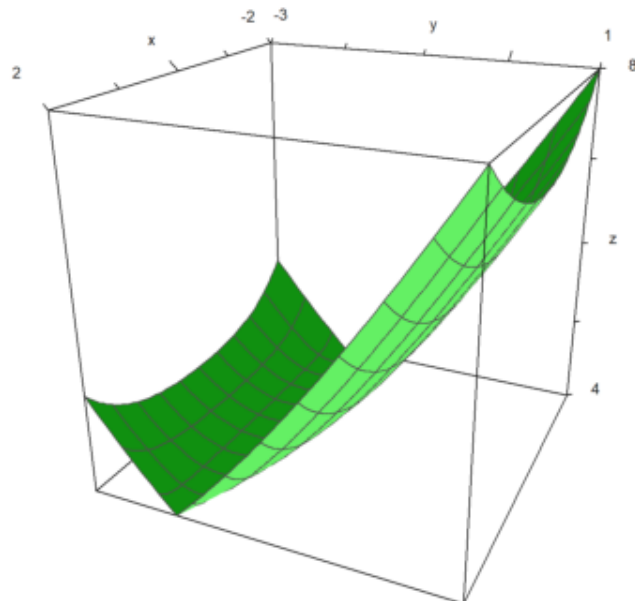
---

```
>B=[2,-2];  
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)  
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



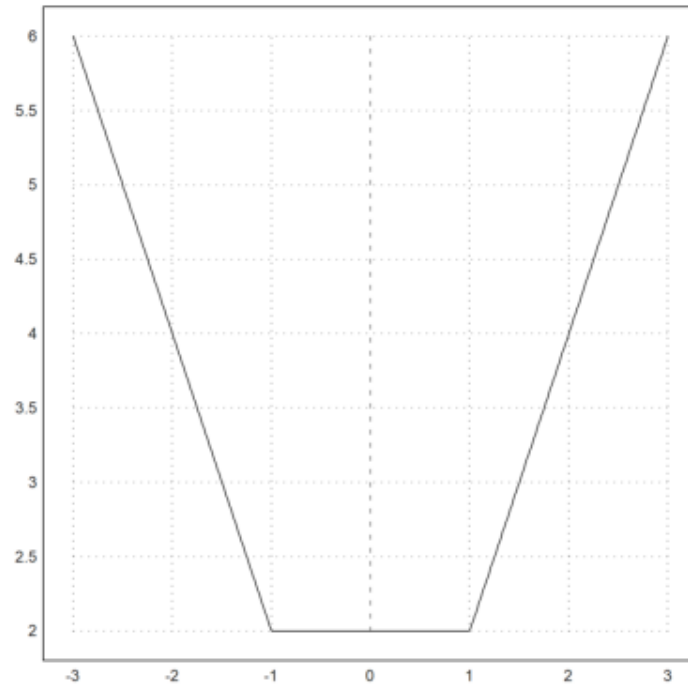
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2", xmin=-2, xmax=2, ymin=-3, ymax=1) :
```



Pembatasan garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

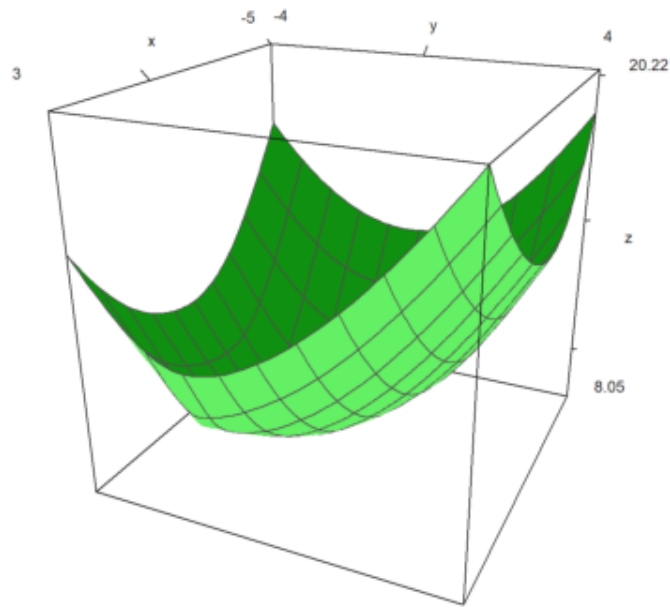


**Tiga poin**

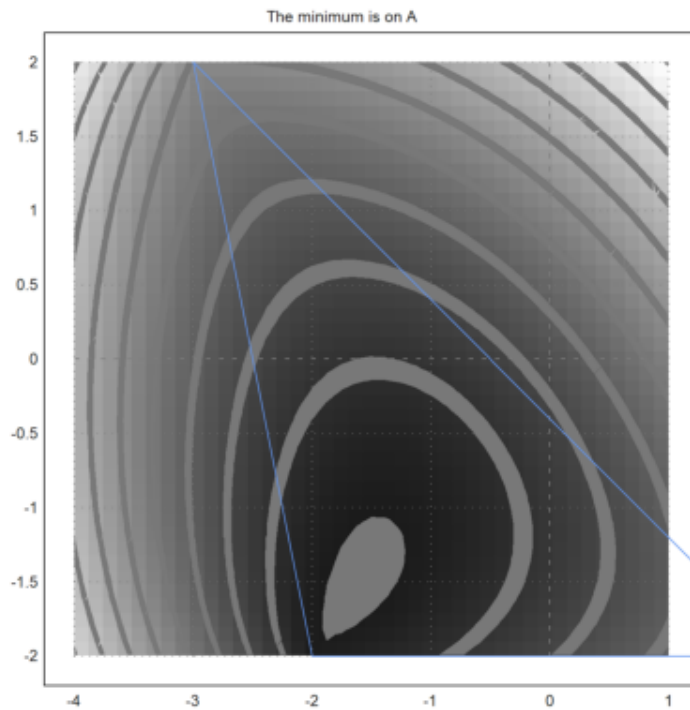
Contoh:

```
>C=[-3,2];  
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)  
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);  
>insimg;
```



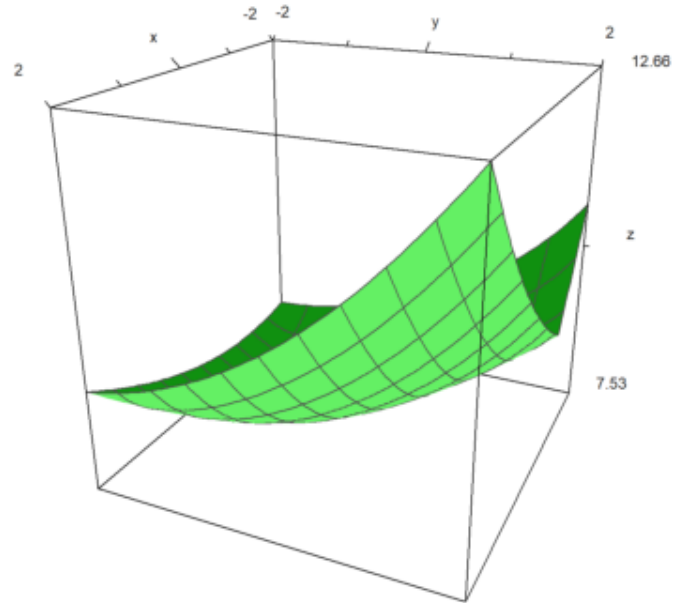


```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

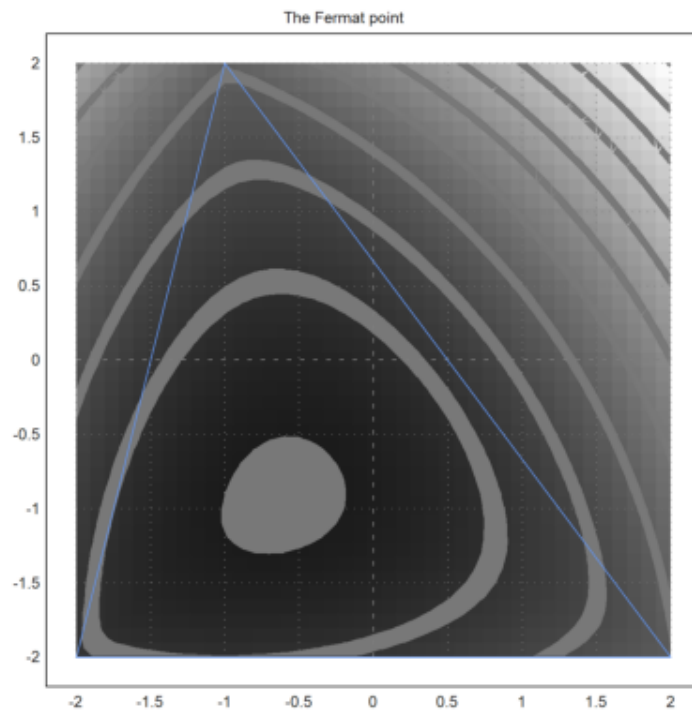


Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari  $120^\circ$ , minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (maka masing-masing  $120^\circ$ ):

```
>C=[-1,2];  
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```

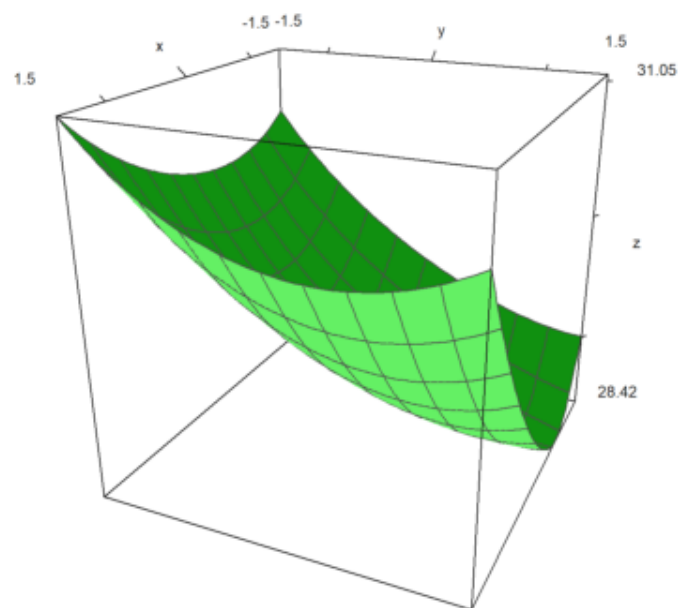


```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");  
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);  
>insimg;
```

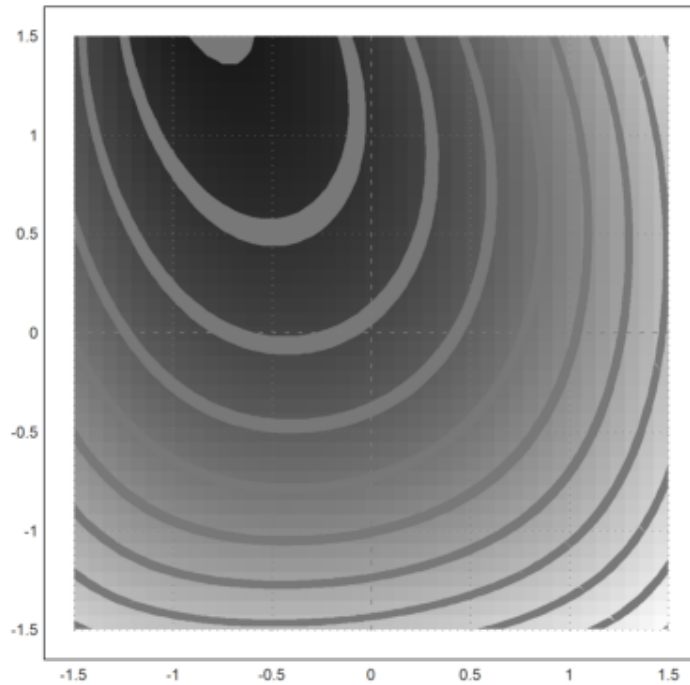


Langkah selanjutnya adalah menambahkan 4 titik D dan mencoba meminimalkan  $MA+MB+MC+MD$ ; katakan bahwa Anda adalah operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus meletakkan antenna sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[2,21];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```



```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```



### Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

```
>load geometry;
```

Pertama dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[2,a])
```

```
[- a, 2, 0]
```

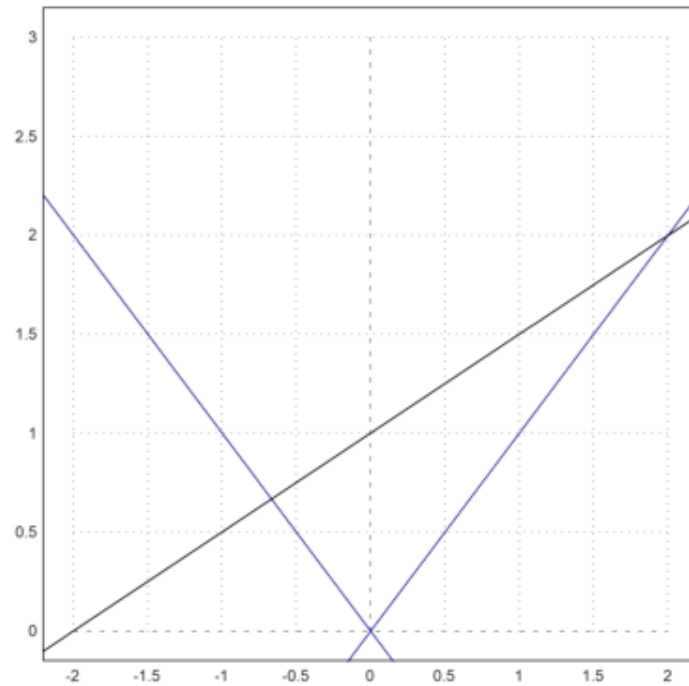
```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-2,a])
```

```
[- a, - 2, 0]
```

```
>g &= lineThrough([-2,0],[2,2])
```

```
[- 2, 4, 4]
```

```
>setPlotRange(-2,2,0,3);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

$[0, u]$

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 u}{a^2 + 4} - u\right)^2 + \frac{4 a^2 u^2}{(a^2 + 4)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+4}{5} - u\right)^2 + \frac{(2u-2)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[ u = \frac{-\sqrt{5}\sqrt{a^2+4}+a^2+4}{a^2-1}, u = \frac{\sqrt{5}\sqrt{a^2+4}+a^2+4}{a^2-1} \right]$$

Ada dua solusi.

```
>u := sol()
```

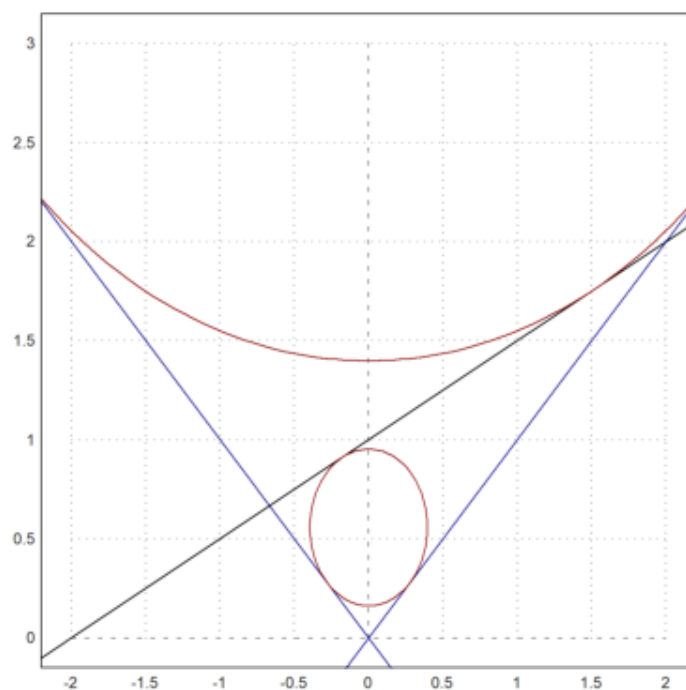
```
[0.558482, 4.77485]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.394906, 3.37633]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);  
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");  
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");  
>insimg;
```



1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat  $O$ ,  $n$ , dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n),  $r$ .

Petunjuk:

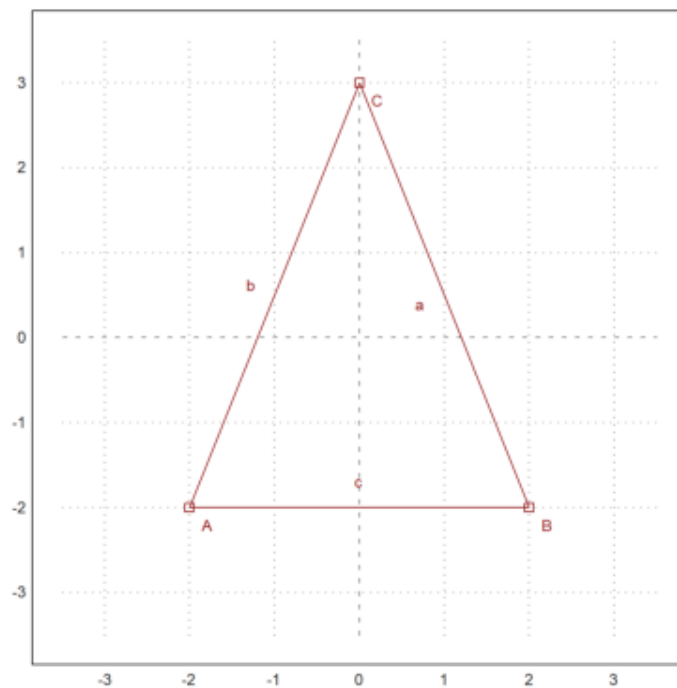
- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah  $(360/n)$ .
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan  $(360/n)$ .
- Untuk  $n$  ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk  $n$  genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

Penyelesaian :

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

```
>setPlotRange(-3.5,3.5,-3.5,3.5);  
>A=[-2,-2]; plotPoint(A,"A");  
>B=[2,-2]; plotPoint(B,"B");  
>C=[0,3]; plotPoint(C,"C");  
>plotSegment(A,B,"c");  
>plotSegment(B,C,"a");  
>plotSegment(A,C,"b");  
>aspect(1):
```

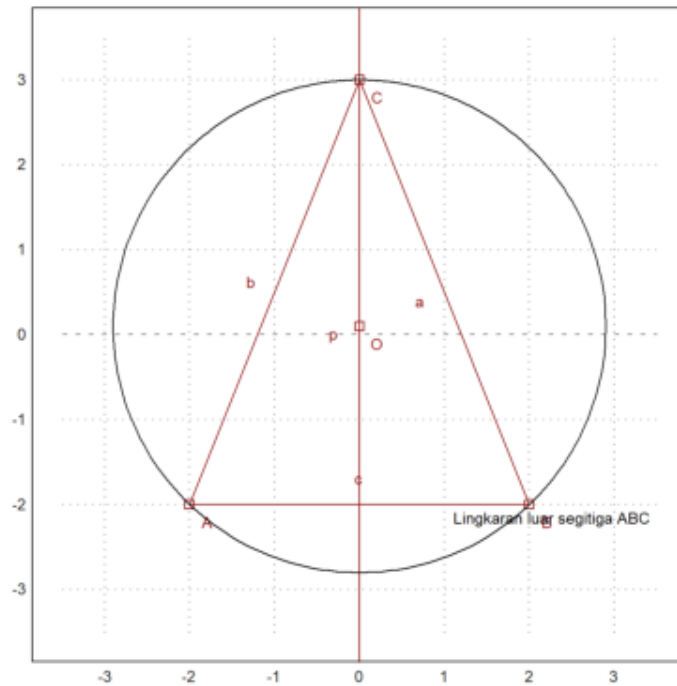


```
>c=circleThrough(A,B,C);  
>R=getCircleRadius(c);  
>O=getCircleCenter(c);
```

```

>plotPoint(O,"O");
>l=angleBisector(A,C,B);
>color(2); plotLine(l); color(1);
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):

```



2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:

- Misalkan persamaan parabolanya  $y = ax^2 + bx + c$ .
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

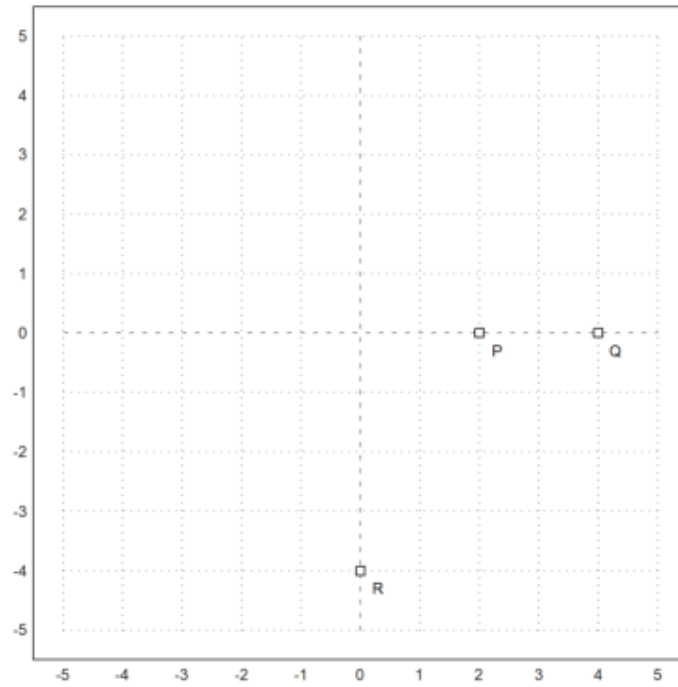
Penyelesaian :

```

>load geometry;
>setPlotRange(5); P=[2,0]; Q=[4,0]; R=[0,-4];
>plotPoint(P,"P"); plotPoint(Q,"Q"); plotPoint(R,"R"):

```





```
>sol &= solve([a+b=-c,16*a+4*b=-c,c=-4],[a,b,c])
```

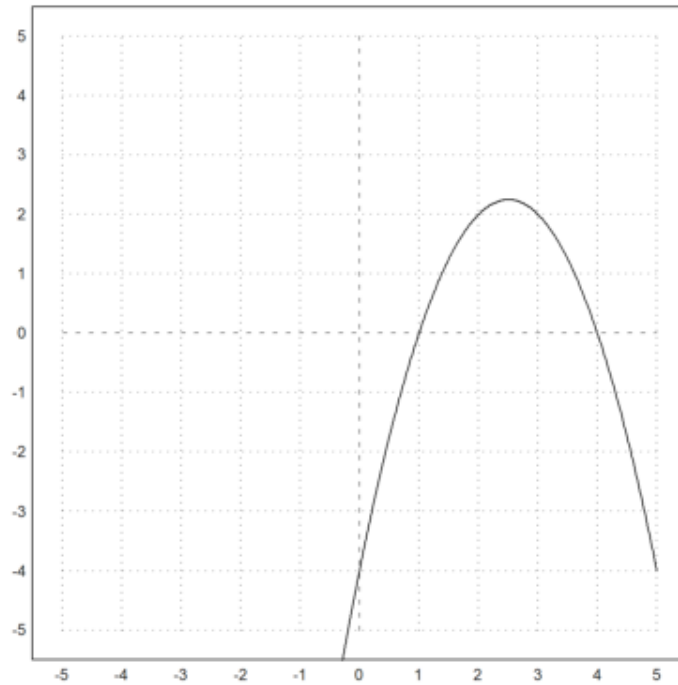
```
[[a = - 1, b = 5, c = - 4]]
```

Sehingga didapatkan nilai  $a = -1$ ,  $b = 5$  dan  $c = -4$

```
>function y&=-x^2+5*x-4
```

$$-x^2 + 5x - 4$$

```
>plot2d("-x^2+5*x-4",-5,5,-5,5):
```



3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung

(sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran dalamnya.

- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

Penyelesaian :

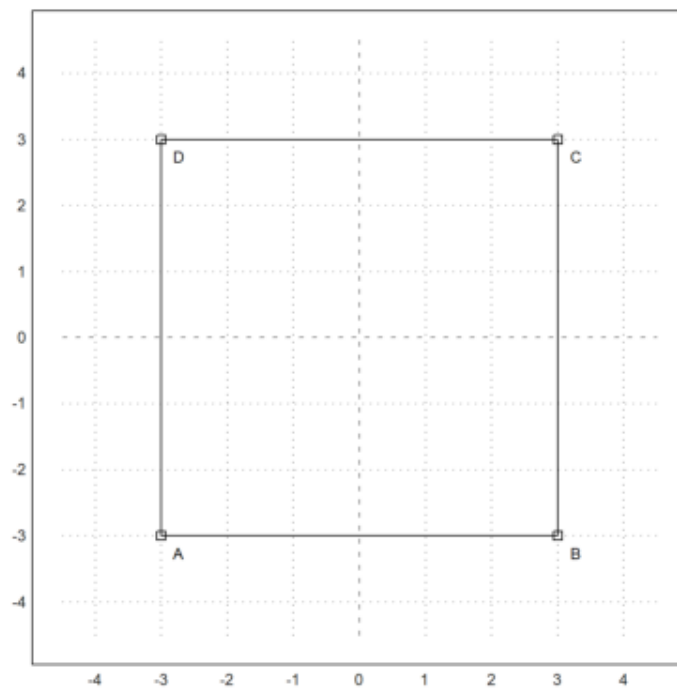
```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

```

>setPlotRange(-4.5,4.5,-4.5,4.5);
>A=[-3,-3]; plotPoint(A,"A");
>B=[3,-3]; plotPoint(B,"B");
>C=[3,3]; plotPoint(C,"C");
>D=[-3,3]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,"");
>plotSegment(B,C,"");
>plotSegment(C,D,"");
>plotSegment(A,D,"");
>aspect(1):

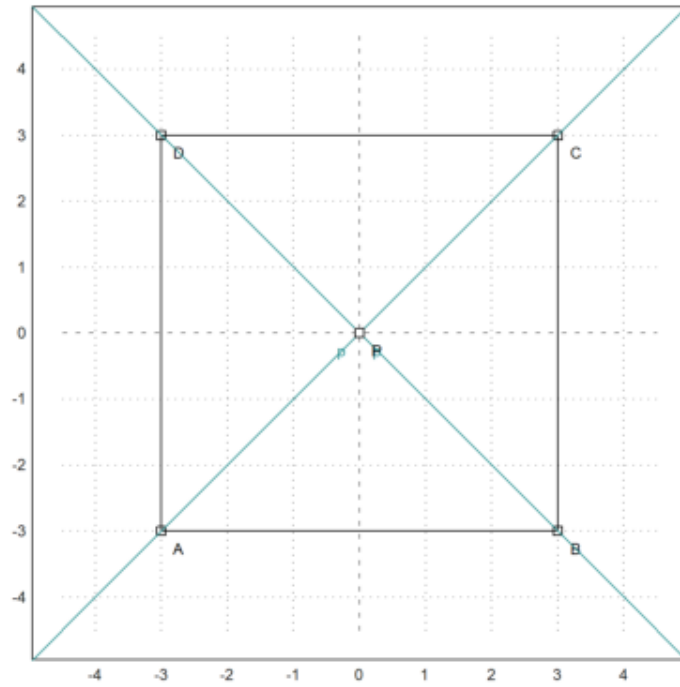
```



```

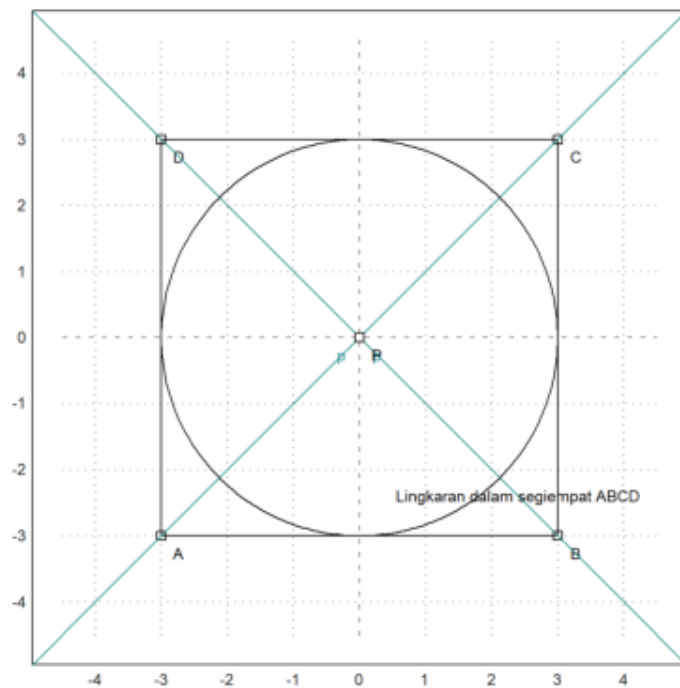
>l=angleBisector(A,B,C);
>m=angleBisector(B,C,D);
>P=lineIntersection(l,m);
>color(5); plotLine(l); plotLine(m); color(1);
>plotPoint(P,"P"):

```



Dari gambar diatas terlihat bahwa keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik yaitu titik P.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)));
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segiempat ABCD");
```



Dari gambar diatas, terlihat bahwa sisi-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yaitu lingkaran dalam segiempat.

Akan ditunjukkan bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

```
>AB=norm(A-B) //panjang sisi AB
```

6

```
>CD=norm(C-D) //panjang sisi CD
```

6

```
>AD=norm(A-D) //panjang sisi AD
```

6

```
>BC=norm(B-C) //panjang sisi BC
```

6

```
>AB.CD
```

36

```
>AD.BC
```

36

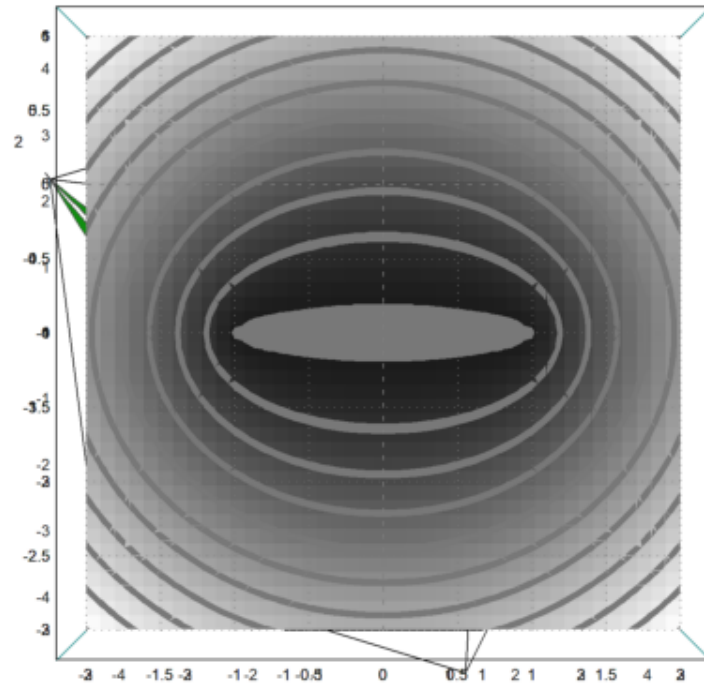
Terbukti bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama yaitu 36. Jadi dapat dipastikan bahwa segiempat tersebut merupakan segiempat garis singgung.

4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

Penyelesaian :

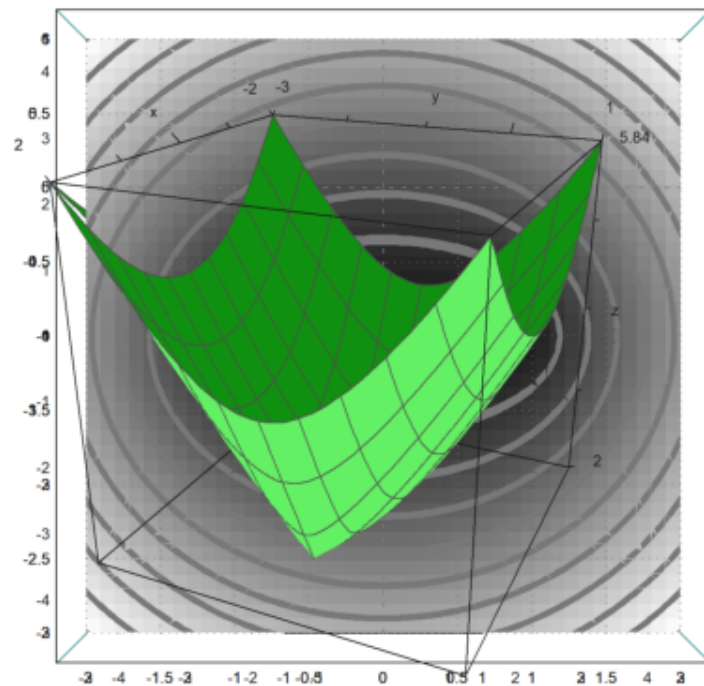
Diketahui kedua titik fokus P = [-1,-1] dan Q = [1,-1]

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];  
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)  
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)  
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



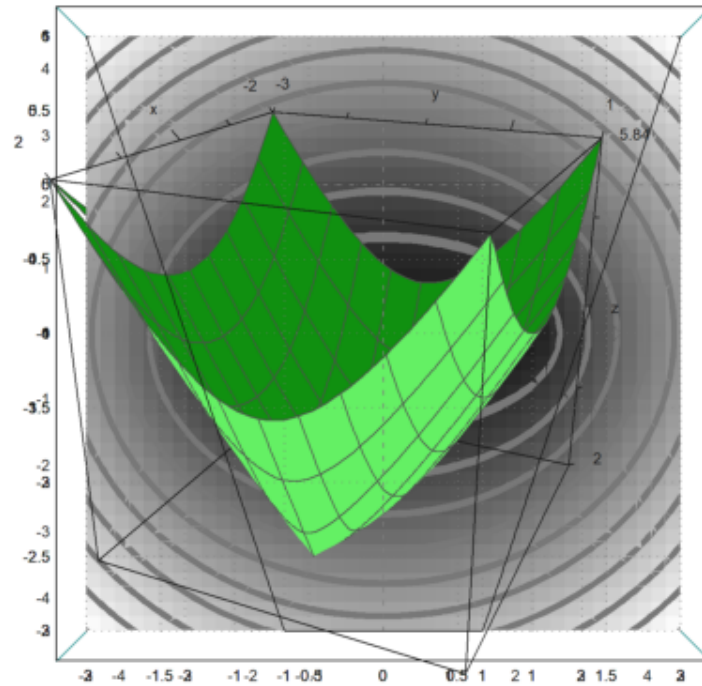
Grafik yang lebih menarik

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Batasan ke garis PQ

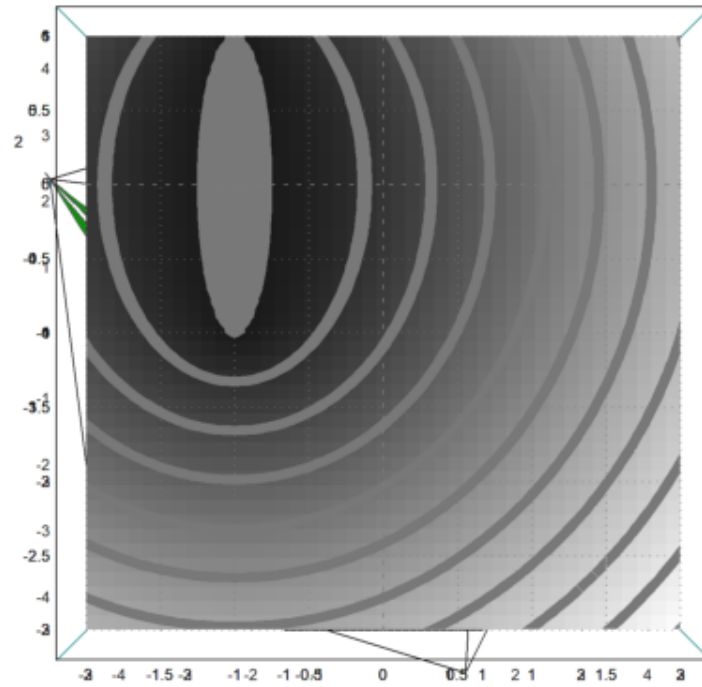
```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

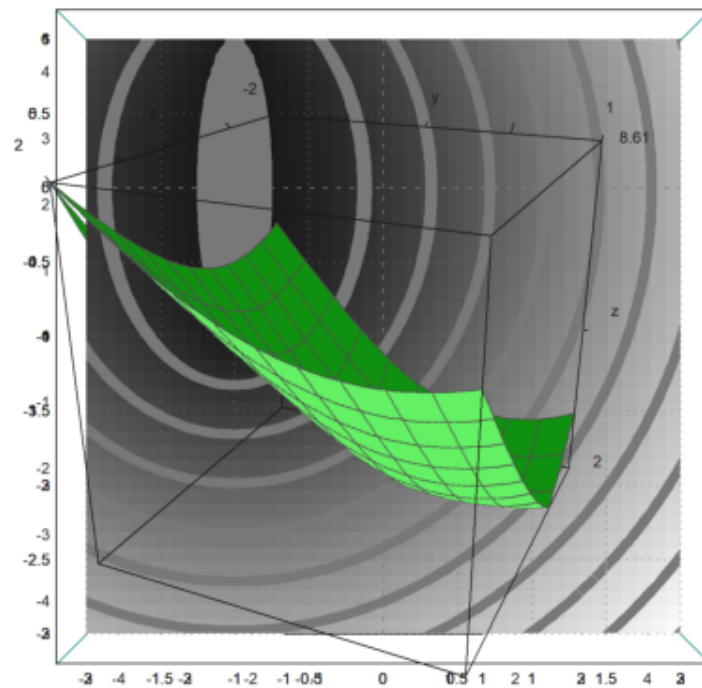
Penyelesaian :

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];  
>function d1(x,y):=sqrt((x-p[1])^2+(y-p[2])^2)  
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x+Q[1])^2+(y+Q[2])^2)  
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



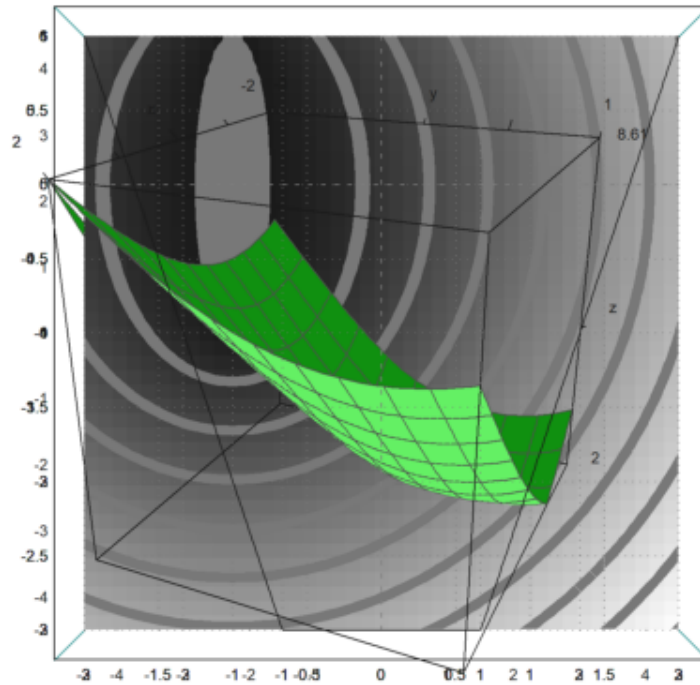
Grafik yang lebih menarik

```
>plot3d("d2", xmin=-2, xmax=2, ymin=-3, ymax=1) :
```



```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)", xmin=-3, xmax=3) :
```





## Materi tambahan dan Latihan

1. Tentukanlan persamaan dari parabola yang melalui 3 titik A (3,2), B (2,1), C(2,2) dan gambarkan parabolanya.
2. Tentukanlan persamaan dari parabola yang melalui 3 titik A (3,1), B (1,-1), C(3,-2) dan gambarkan parabolanya.
3. Tentukanlan persamaan dari parabola yang melalui 3 titik A (3,3), B (1,-2), C(5,3) dan gambarkan parabolanya.

Jawab:

Soal 1

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

```
>A &=[3,2]; B &=[2,1]; C &=[2,2];  
>r&=(lineThrough(A,B)); $r
```

$[1, -1, 1]$

```
>$getLineEquation(r, x, y); $solve(%, y)
```

$[y = -1 + x]$

```
>p &=getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$-\sqrt{(2-x)^2+(2-y)^2}-\frac{-1+x-y}{\sqrt{2}}=0$$

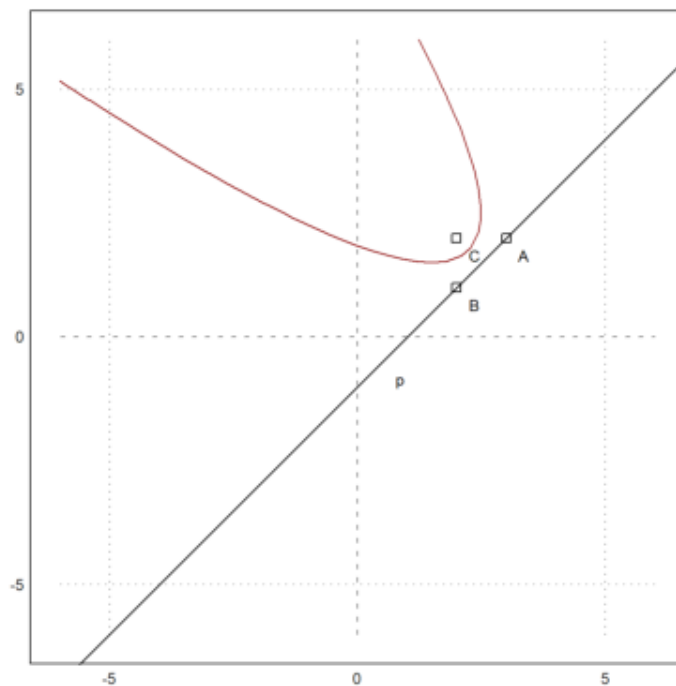
```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

```
[y = 5 - sqrt(2) sqrt(5 - 2 x) - x,  
y = 5 + sqrt(2) sqrt(5 - 2 x) - x]
```

Solusinya adalah:

$$y = -x + \sqrt{2}\sqrt{5-2x} + 5$$

```
>A=[3,2]; B=[2,1]; C=[2,2];  
>setPlotRange(6); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");  
>plotLine(lineThrough(A,B));  
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=2):
```



```
>reset;
```

## Soal 2

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

```
>A &=[3,1]; B &=[1,-1]; C &=[3,-2];  
>r&=(lineThrough(A,B)); $r
```

[2, -2, 4]

```
>$getLineEquation(r,x,y); $solve(%,y)
```

[y = -2 + x]

```
>p &=getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$-\sqrt{(3-x)^2 + (-2-y)^2} + \frac{-4 + 2x - 2y}{2^{\frac{3}{2}}} = 0$$

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

```
[y = - 2 - x - sqrt(6) sqrt(- 3 + 2 x),  
y = - 2 - x + sqrt(6) sqrt(- 3 + 2 x)]
```

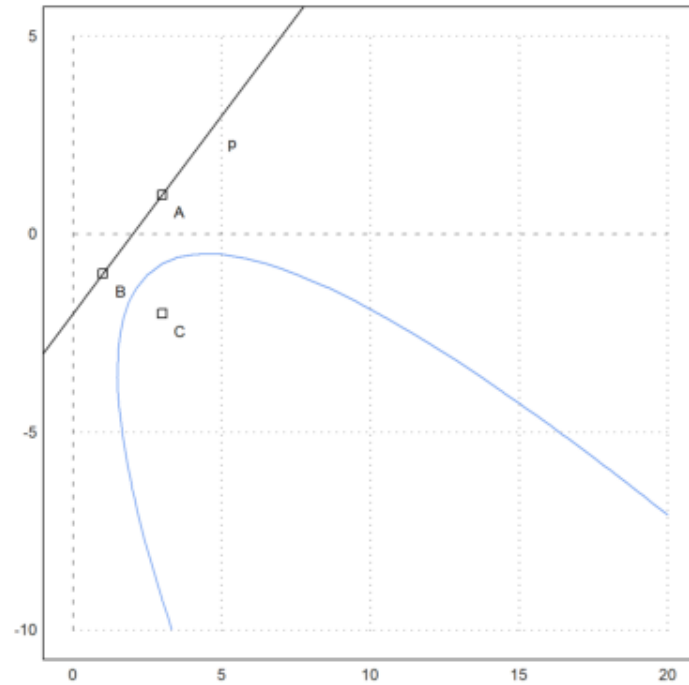
Solusinya adalah:

$$y = \sqrt{6}\sqrt{2x-3} - x - 2$$

```
>A=[3,1]; B=[1,-1]; C=[3,-2]
```

[3, -2]

```
>setPlotRange (0,20,-10,5); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C")  
>plotLine(lineThrough(A,B));  
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=12):
```



### Soal 3

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

```
>A &=[-3,3]; B &=[1,-2]; C &=[5,3];
>r&=(lineThrough(A,B)); $r
```

[5, 4, -3]

```
>$getLineEquation(r,x,y); $solve(%,y)
```

$$\left[ y = \frac{-3 - 5x}{4} \right]$$

```
>p &=getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$-\sqrt{(5-x)^2 + (3-y)^2} + \frac{3+5x+4y}{\sqrt{41}} = 0$$

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

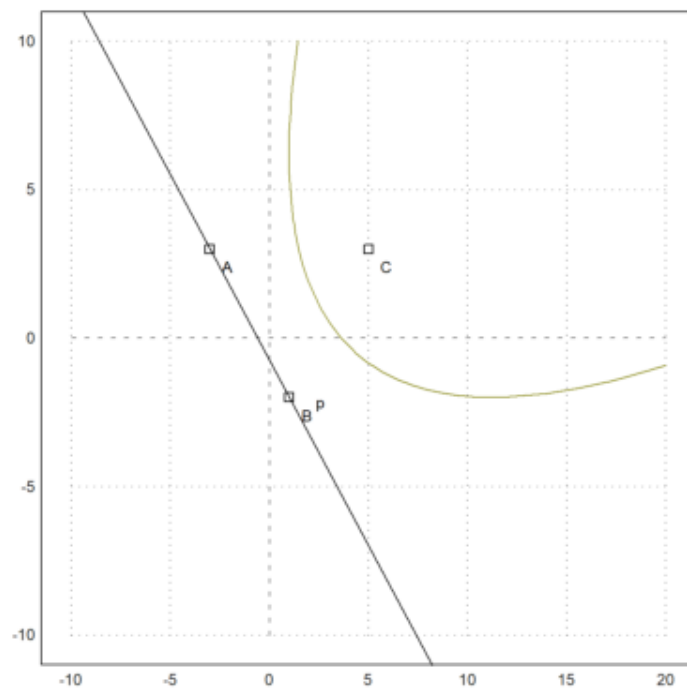
$$[y = \frac{27 - 4 \sqrt{41} \sqrt{-1 + x} + 4 x}{5},$$

$$y = \frac{27 + 4 \sqrt{41} \sqrt{-1 + x} + 4 x}{5}]$$

Solusinya adalah:

$$y = \frac{4x + 4\sqrt{41}\sqrt{x-1} + 27}{5}$$

```
>A=[-3,3]; B=[1,-2]; C=[5,3];
>setPlotRange (-10,20,-10,10); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
>plotLine(lineThrough(A,B));
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



```
>reset;
```

1. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik A(-2,2),B(-2,2),C(2,2)

```
>setPlotRange(4) //mendefinisikan batas bidang koordinat
```

```
[-4, 4, -4, 4]
```

```
>A = [-2,-2]; B = [-2,2]; C = [2,2]; // definisikan titik - titiknya
>&powerdisp:true
```

true

```
>$p1 := x^2+y^2+a*x+b*y+c=0 with [x=-2,y=-2] //Titik A
```

$$8 - 2a - 2b + c = 0$$

```
>$p2 := x^2+y^2+a*x+b*y+c=0 with [x=-2,y=2] //Titik B
```

$$8 - 2a + 2b + c = 0$$

```
>$p3 := x^2+y^2+a*x+b*y+c=0 with [x=2,y=2] //Titik C
```

$$8 + 2a + 2b + c = 0$$

```
>$p2 - p1
```

$$4b = 0$$

```
>$p3 - p2
```

$$4a = 0$$

```
>nilaic &= 8+2*a+2*b+c=0 with [a=0,b=0]
```

$$8 + c = 0$$

Dari perhitungan di atas didapat bahwa nilai  $a=0$ ,  $b=0$ ,  $c=-8$

```
>$pb := x^2+y^2+A*x+B*y+C=0 with [A=0,B=0,C=-8]
```

$$[5 - 3x + x^2 + y + y^2, 3 + 3x + x^2 - 2y + y^2] = 0$$

## Persamaan garis yang melalui dua titik

---

Persamaan garis yang melalui dua titik atau juga dikenal sebagai persamaan titik-dua-titik adalah cara umum untuk menggambarkan garis lurus dalam sistem koordinat. Untuk menentukan persamaan garis yang melalui dua titik tertentu, dua titik tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$

Setelah kita mendapatkan koordinat 2 titik tersebut, kita membuat garis yang melewati 2 titik tersebut, yaitu titik A dan B. Lalu kita cari persamaannya, sedemikian sehingga saat  $x_1$  disubstitusi ke persamaan maka menghasilkan nilai  $y_1$ , juga saat  $x_2$  disubstitusi ke persamaan maka didapat nilai  $y_2$  didapat dengan perintah EMT yaitu:

```
lineThrough(A,B);
```

setelah itu kita menggambar garis tersebut, dan dihitung persamaannya dengan menggunakan perintah:

```
getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y)
```

Contoh soal:

Diberikan 2 titik A dan B dengan koordinat sebagai berikut:

$$A(3, -2) \text{ dan } B(-2, 5)$$

Tentukan persamaan dari garis yang melewati titik A dan B!

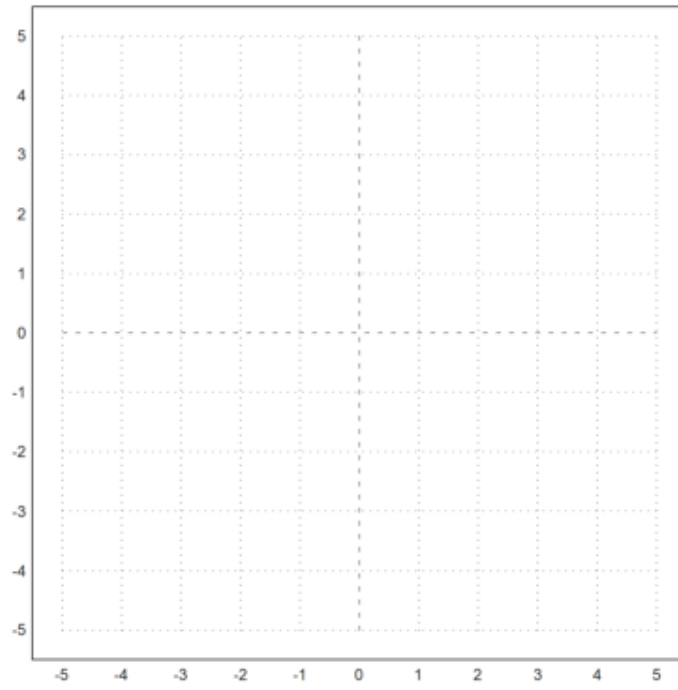
Penyelesaian :

Menggambar garis pada plot range

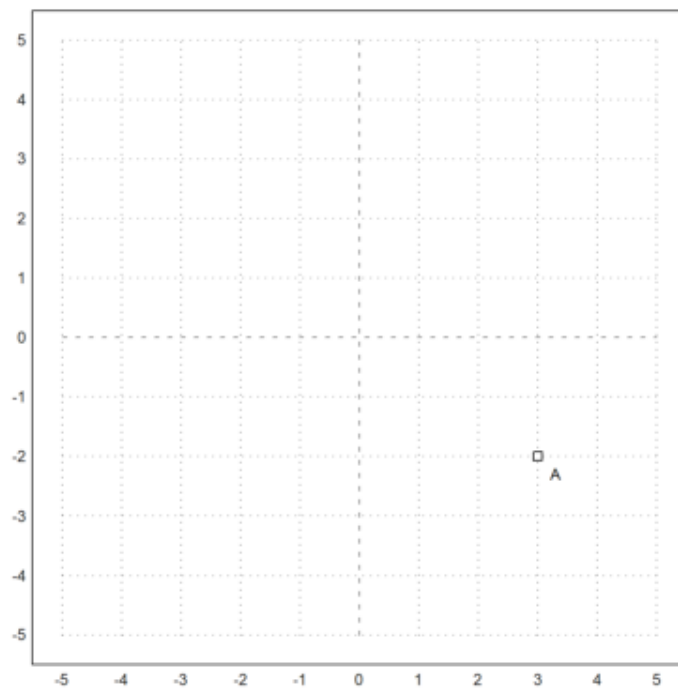
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(5):
```

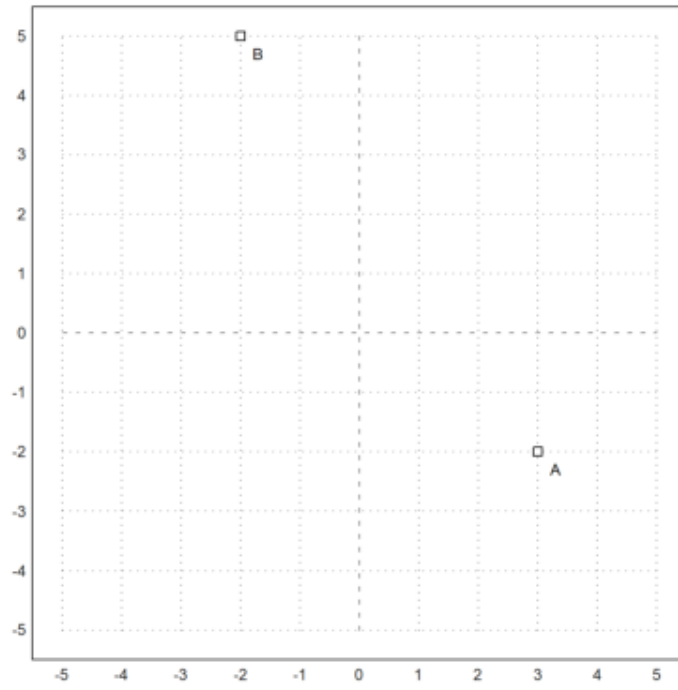


```
>A=[3,-2];  
>B=[-2,5];  
>plotPoint(A):
```

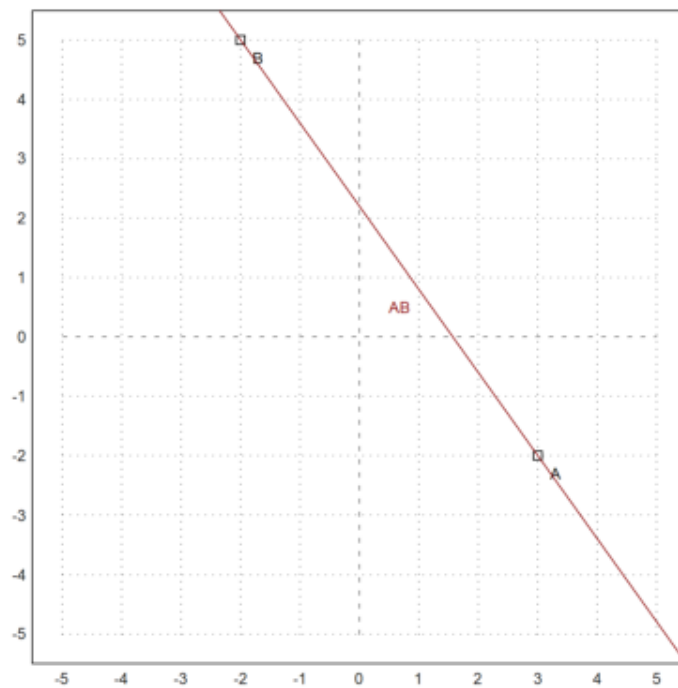


```
>plotPoint(B):
```





```
>color(2);  
>plotLine(lineThrough(A,B), "AB"):
```



```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis yang melalui titik A dan B

```
>A=[3, -2];  
>B=[-2, 5];  
>$getLineEquation(lineThrough(A, B), x, y)
```

$$-7x - 5y = -11$$

```
>$solve(%, y)
```

$$\left[ y = \frac{11 - 7x}{5} \right]$$

Rumus menentukan persamaan garis melalui dua titik

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Diketahui

$$A(3, -2) \text{ dan } B(-2, 5)$$

$$x_1 = 3, x_2 = -2, y_1 = -2, y_2 = 5$$

Penyelesaian

$$\frac{y - (-2)}{5 - (-2)} = \frac{x - 3}{-2 - 3}$$

$$\frac{y + 2}{7} = \frac{x - 3}{-5}$$

$$y = \frac{(x - 3)7}{-5} - 2$$

$$y = \frac{7x - 21 + 10}{-5}$$

$$y = \frac{7x - 11}{-5}$$

$$y = \frac{11 - 7x}{5}$$

---

**Persamaan garis sumbu**

Garis sumbu adalah garis yang membagi sisi menjadi dua bagian sama panjang dan tegak lurus. Garis sumbu dalam sebuah segitiga adalah garis lurus yang menghubungkan satu titik pada segitiga dengan sisi dihadapannya dan membagi sisi tersebut menjadi dua bagian sama panjang secara tegak lurus.

Contoh soal :

Terdapat

$$\triangle ABC, \text{ dengan } A(3, 4); B(-5, -4); \text{ dan } C(3, -4)$$

Tentukan persamaan garis sumbu dari ruas garis BC!

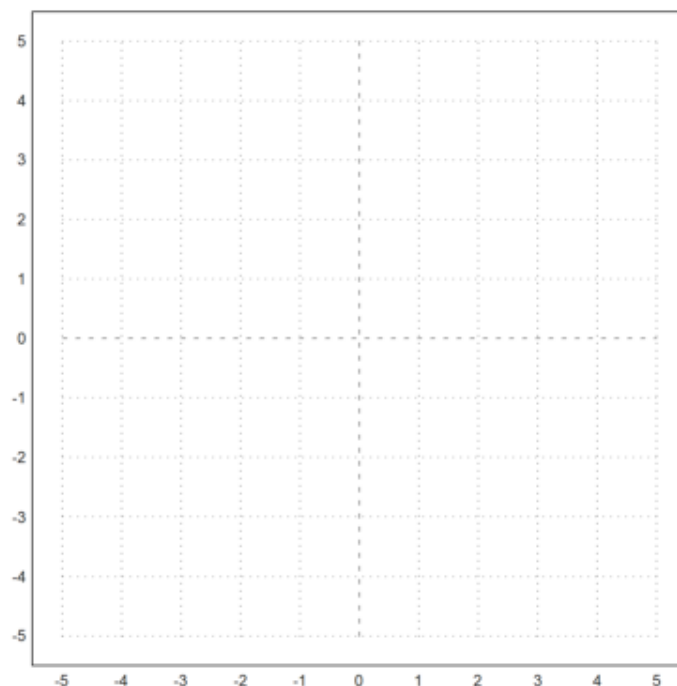
Penyelesaian :

Membuat plot garis sumbu segitiga

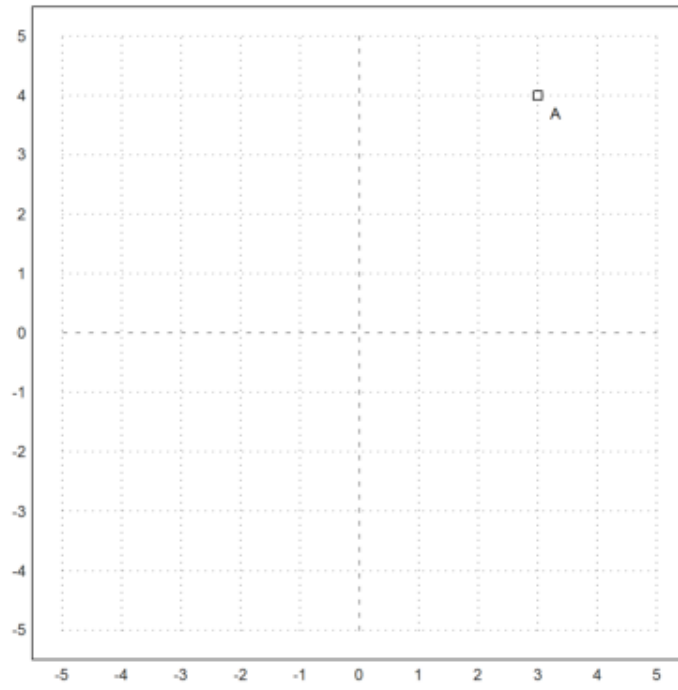
```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

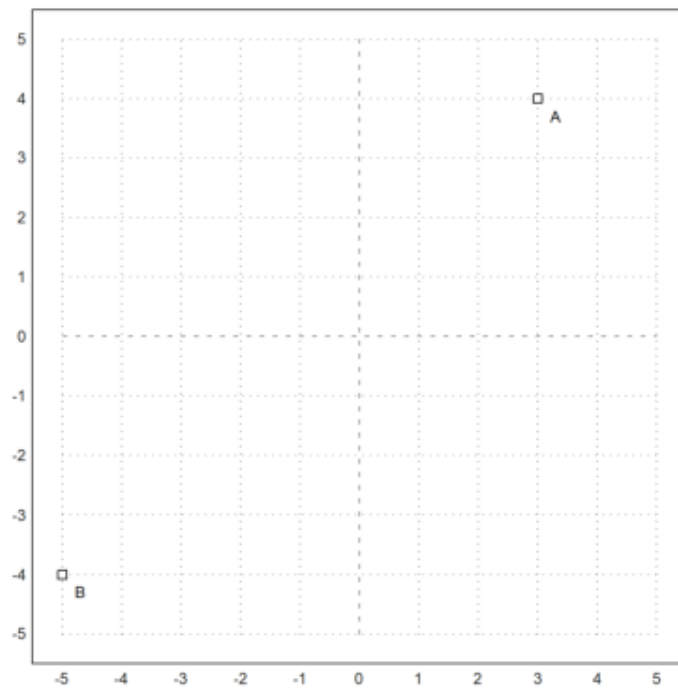
```
>setPlotRange(5) :
```



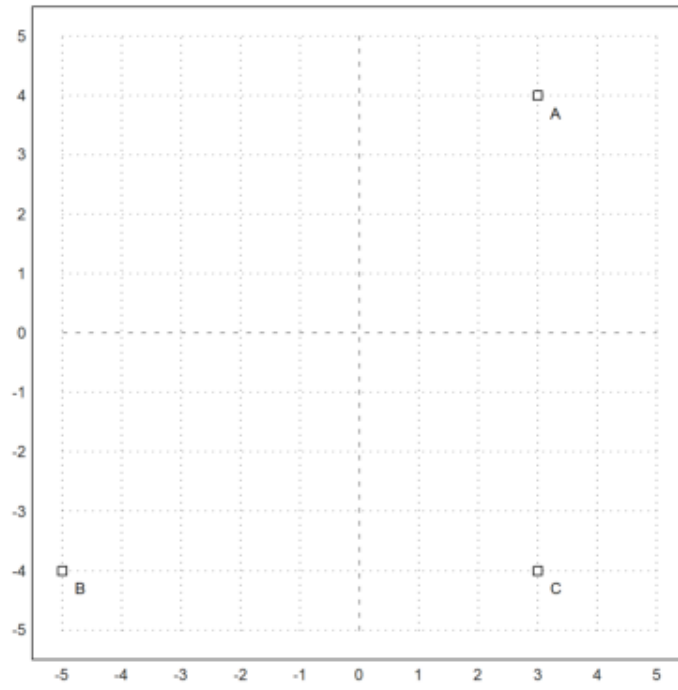
```
>A=[3,4]; plotPoint(A,"A") : // definisi dan gambar titik
```



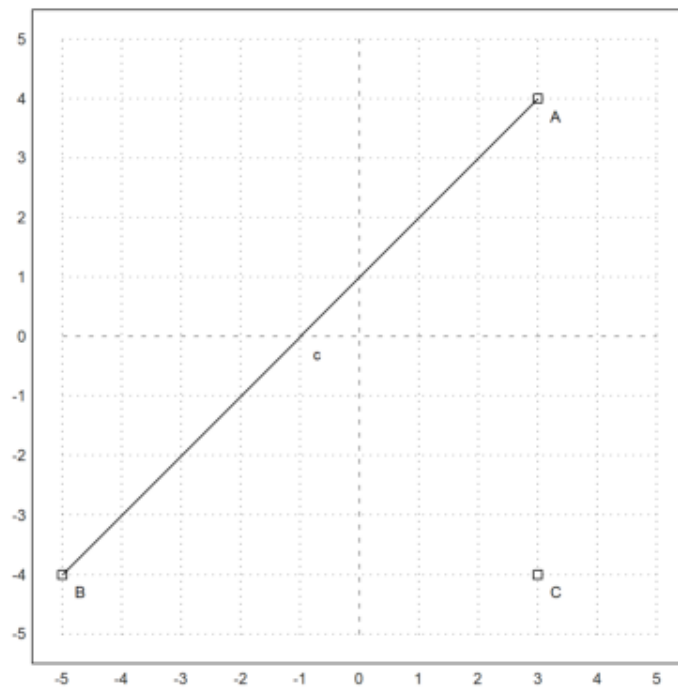
```
>B=[-5,-4]; plotPoint(B,"B"):
```



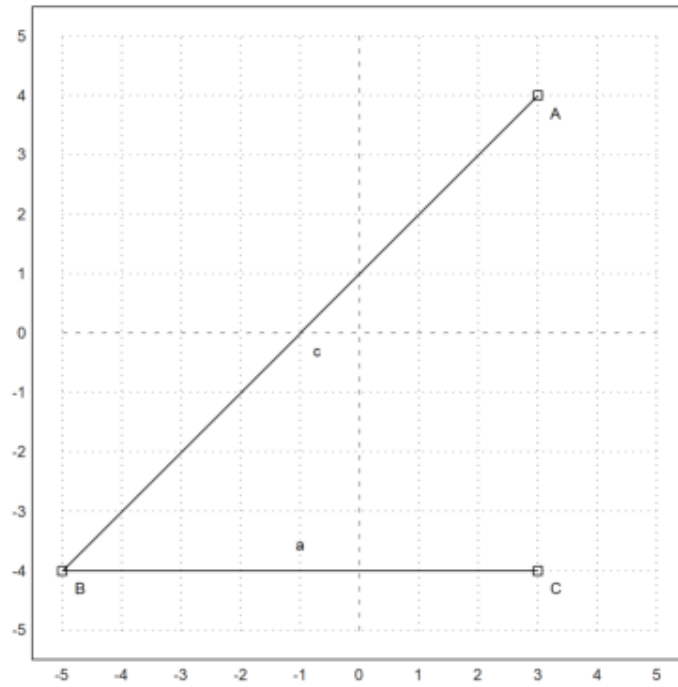
```
>C=[3,-4]; plotPoint(C,"C"):
```



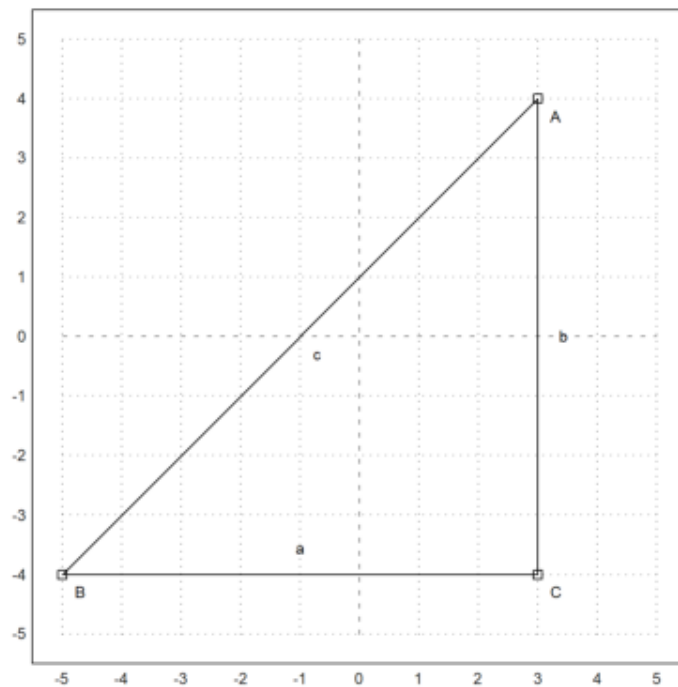
```
>plotSegment(A,B,"c"):
```



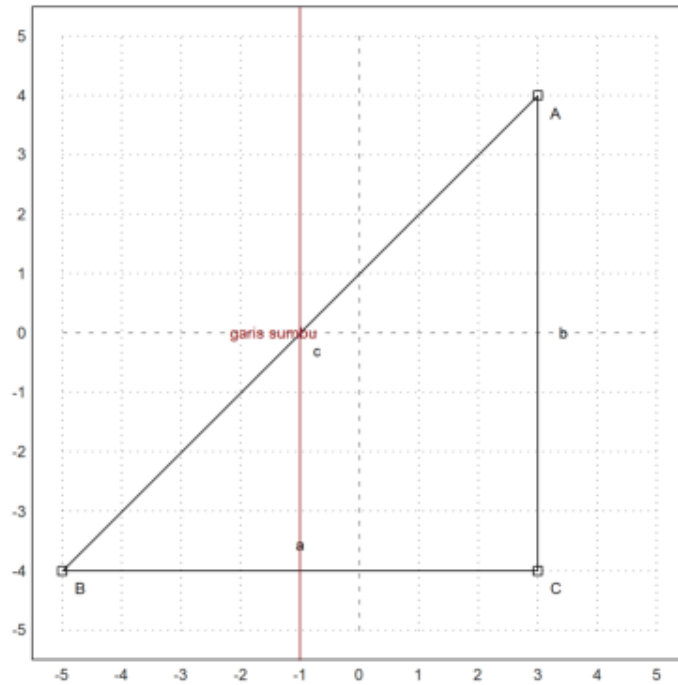
```
>plotSegment(B,C,"a"):
```



```
>plotSegment(A,C,"b") :
```



```
>color(2);  
>p=middlePerpendicular(B,C); plotLine(p,"garis sumbu") :
```



Mencari persamaan garis sumbunya

```
>color(1);
>B&=[-5,-4];
>C&=[3,-4];
>p&=middlePerpendicular(B,C)
```

$[-8, 0, 8]$

```
>$getLineEquation(p,x,y)
```

$-8x = 8$

```
>$solve(%,x)
```

$[x = -1]$

Garis sumbu segitiga melalui 2 titik yaitu

$(-1, -4)$  dan  $(-1, 0)$

$x_1 = -1, x_2 = -1, y_1 = -4, y_2 = 0$

$$\frac{y - (-4)}{0 - (-4)} = \frac{x - (-1)}{-1 - (-1)}$$

$$\frac{y + 4}{4} = \frac{x + 1}{0}$$

$$4(x + 1) = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

## Persamaan garis bagi sudut

---

Garis bagi sudut adalah garis yang membagi sudut menjadi dua sudut yang besarnya sama. Nama lain garis bagi dalam bahasa Inggris adalah angle bisector yang dapat dijelaskan sebagai garis yang memotong sudut sehingga sudut tersebut terbagi menjadi dua bagian yang sama besar.

Garis bagi segitiga adalah garis yang membagi sudut segitiga menjadi dua sudut sama besar.

Contoh soal:

Terdapat

$$\triangle ABC, \text{ dengan } A(1, 3); B(3, -4); \text{ dan } C(-4, -4)$$

Tentukan garis bagi dari sudut A dan persamaannya!

Penyelesaian:

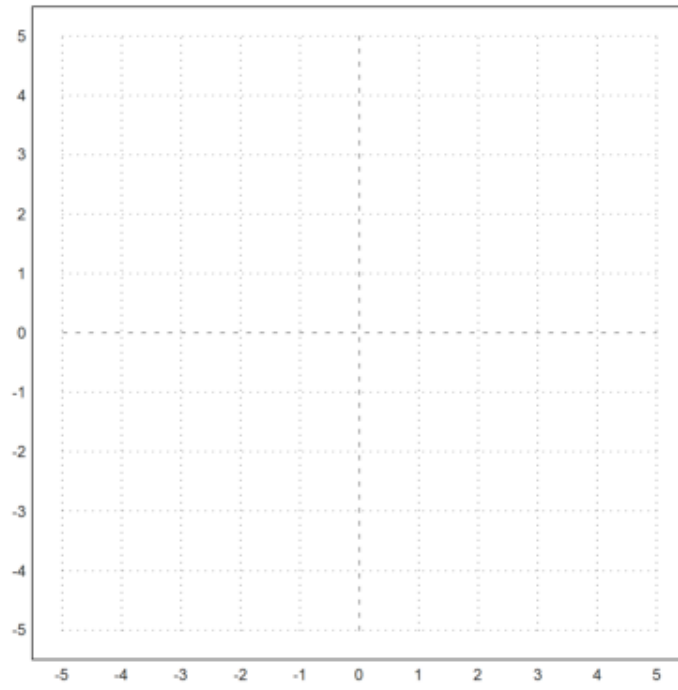
Membuat plot garis bagi segitiga

```
>load geometry
```

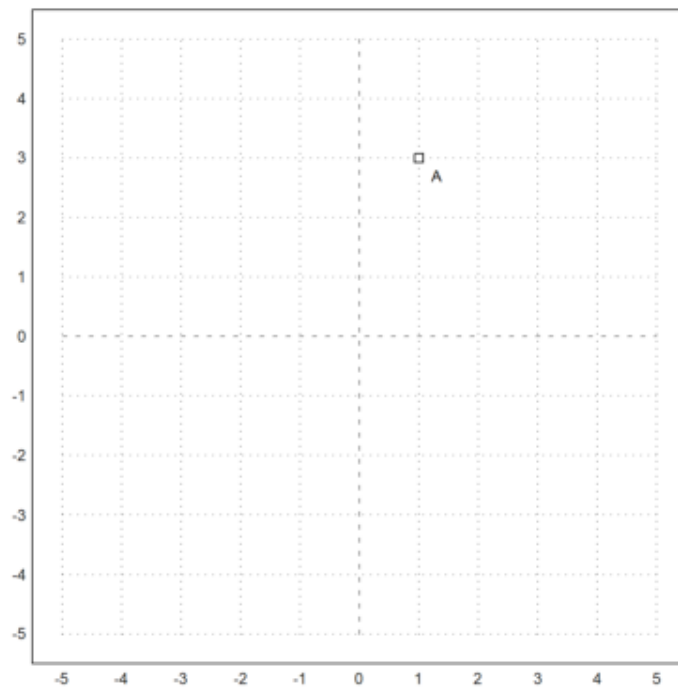
```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(5):
```

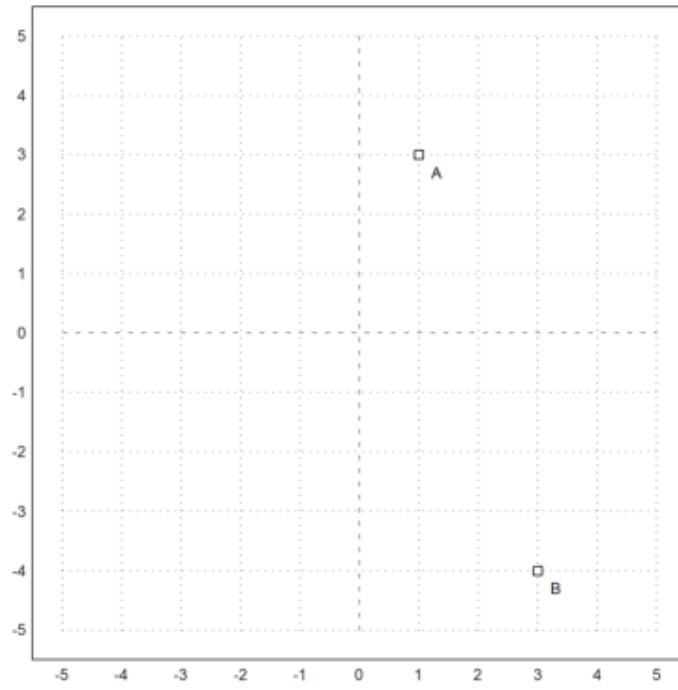




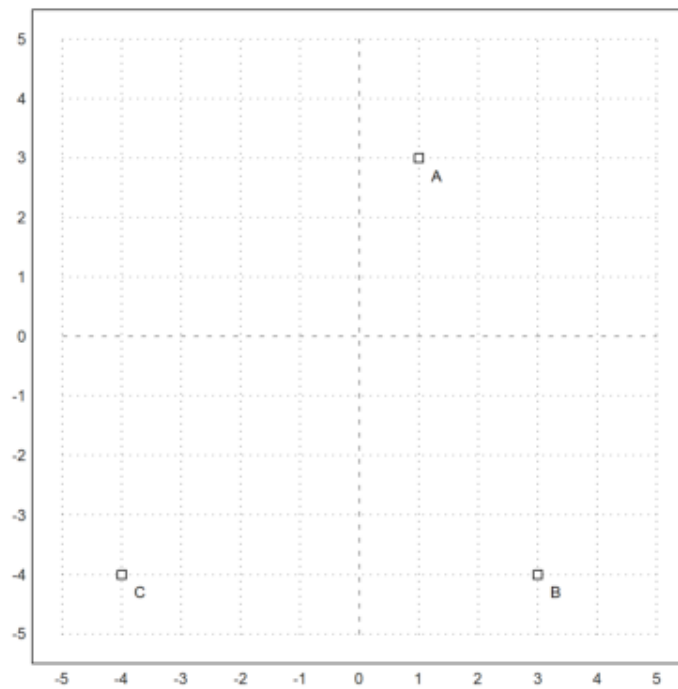
```
>A=[1,3]; plotPoint(A,"A"):
```



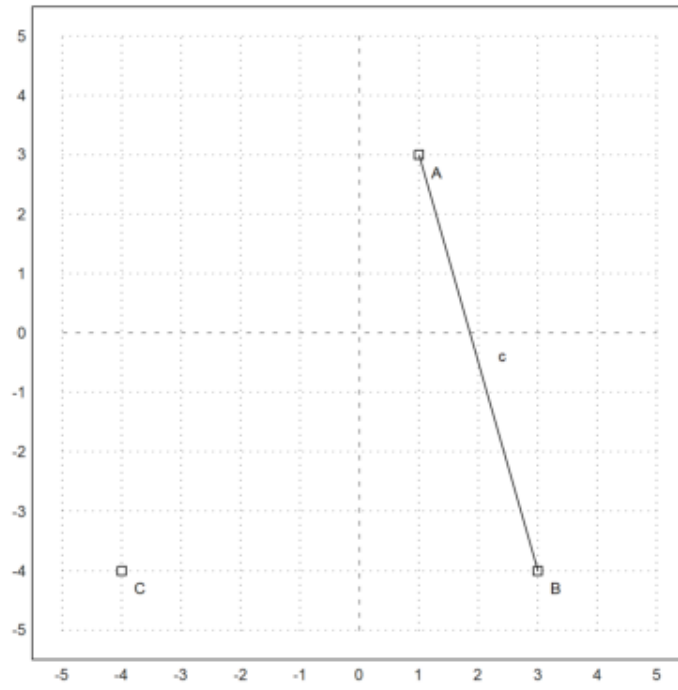
```
>B=[3,-4]; plotPoint(B,"B"):
```



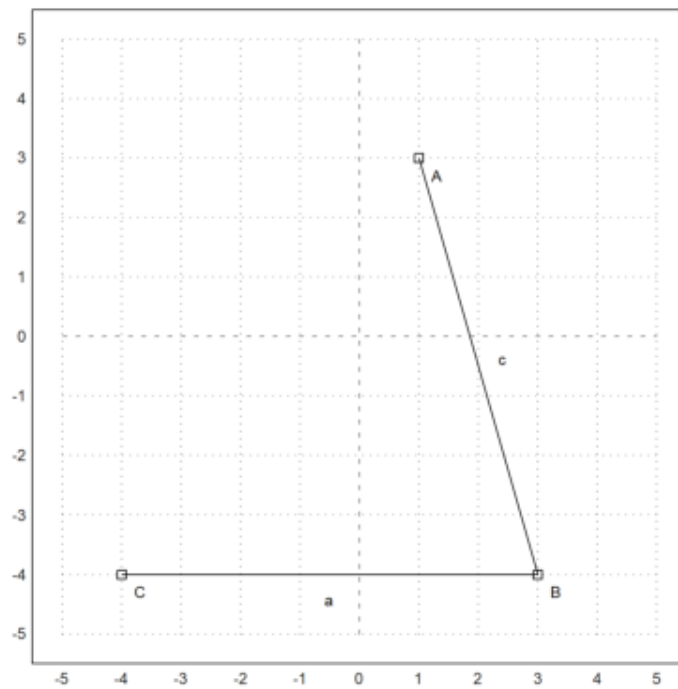
```
>C=[-4,-4]; plotPoint(C,"C"):
```



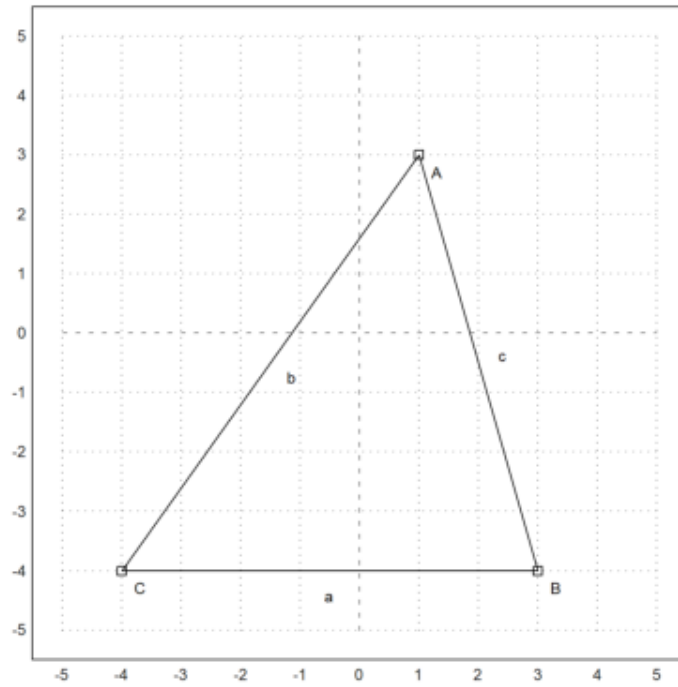
```
>plotSegment(A,B,"c"):
```



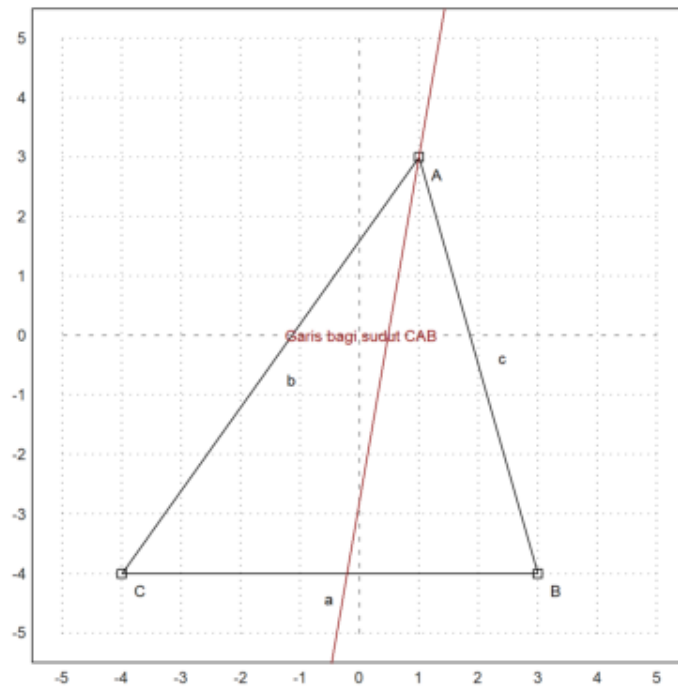
```
>plotSegment(B,C,"a"):
```



```
>plotSegment(A,C,"b"):
```



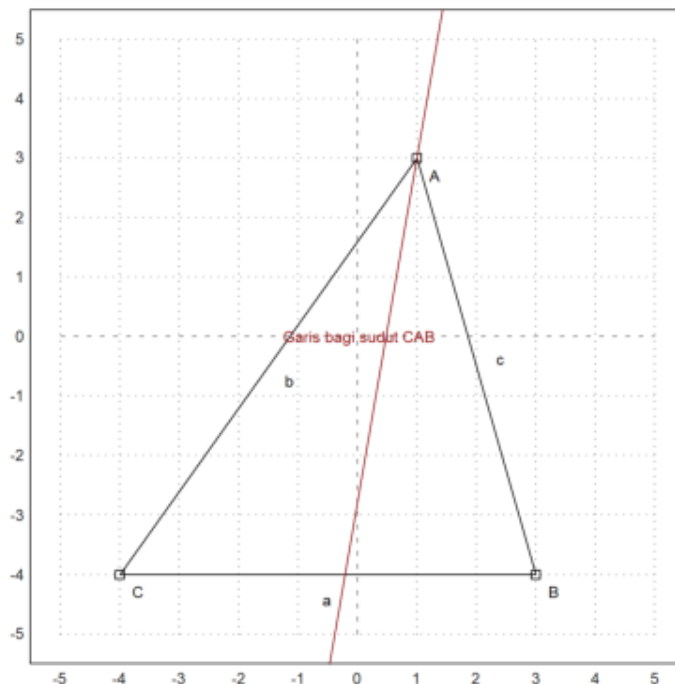
```
>t=angleBisector(C,A,B);
>color(2);
>plotLine(t,"Garis bagi sudut CAB"):
```



```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis bagi sudutnya

```
>A=[1, 3];
>B=[3, -4];
>C=[-4, -4];
>t=angleBisector(C,A,B) :
```



```
>$getLineEquation(t, x, y)
```

$$\left(-5 - \frac{2\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)x + \left(-7 + \frac{7\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)y = \frac{\left(-5 - \frac{2\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)\left(-3 + \frac{2\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)}{2} + \frac{\left(-1 - \frac{7\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)\left(-7 + \frac{7\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)}{2}$$

```
>$solve(%, y)
```

$$\left[ y = \frac{-1378 + 19\sqrt{53}\sqrt{74} + (265 + 2\sqrt{53}\sqrt{74})x}{-371 + 7\sqrt{53}\sqrt{74}} \right]$$

**Persamaan garis berat**

Dalam geometri, garis berat segitiga merupakan sebuah ruas garis yang menghubungkan sebuah titik sudut ke titik tengah dari sisi yang berhadapan, sehingga membagi sisi tersebut menjadi dua bagian yang sama panjang. Setiap segitiga memiliki tiga garis berat yang masing-masing berasal dari salah satu sudut segitiga dan menuju titik tengah sisi yang berlawanan. Garis berat ini juga dikenal sebagai garis median karena mereka memotong sisi segitiga pada titik tengahnya.

Dalam konteks segitiga, garis berat memiliki beberapa sifat penting. Salah satunya adalah ketika ketiga garis berat bersimpang-siuran di satu titik tunggal yang disebut pusat gravitasi atau pusat berat segitiga. Titik ini membagi setiap garis berat dalam perbandingan 2:1, yang berarti bahwa jarak dari titik tengah sisi ke sudut yang berlawanan adalah dua kali jarak dari pusat gravitasi ke titik tengah sisi. Garis berat dalam segitiga juga sering digunakan dalam perhitungan geometri dan trigonometri untuk menentukan berbagai sifat dan properti segitiga, seperti panjang sisi, luas, dan lainnya.

Contoh soal:

Terdapat

$$\triangle ABC, \text{ dengan } A(-4, -2); B(5, -2); \text{ dan } C(2, 2)$$

Tentukan garis berat segitiga dititik C dan persamaannya!

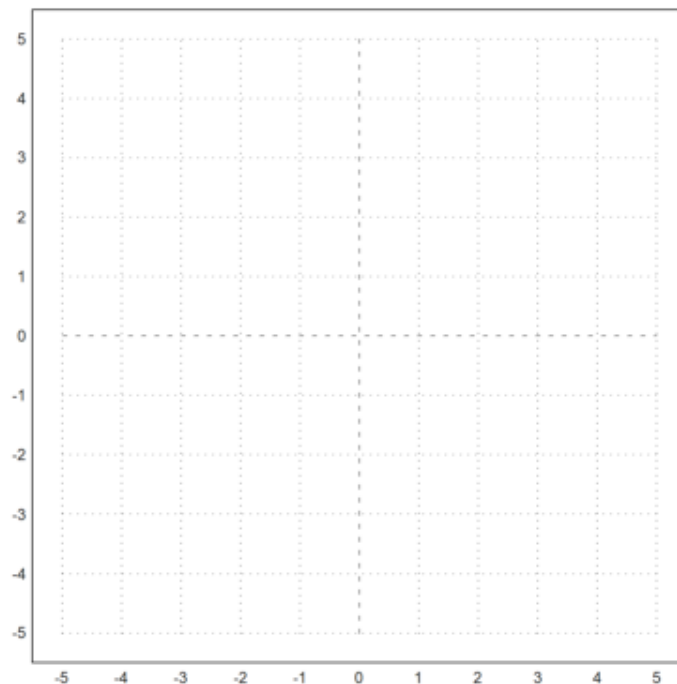
Penyelesaian:

Membuat plot garis berat segitiga

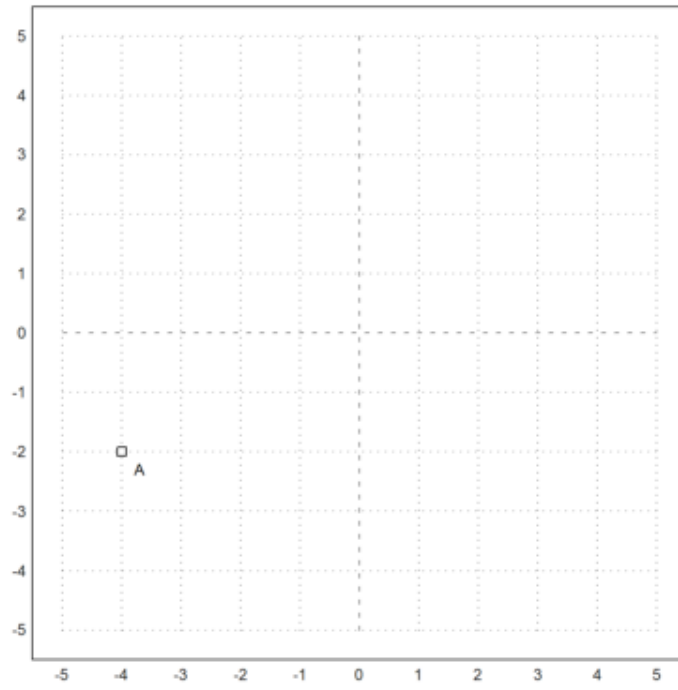
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

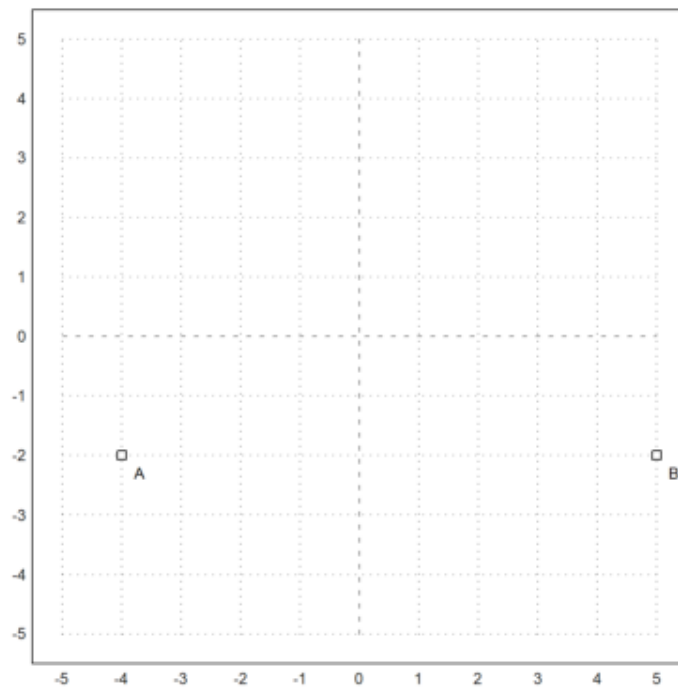
```
>setPlotRange(5):
```



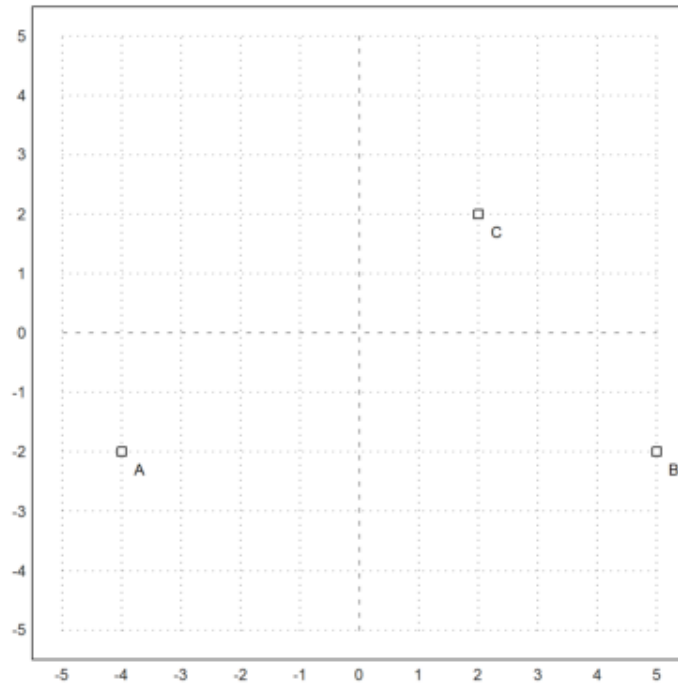
```
>A=[-4,-2]; plotPoint(A,"A"):
```



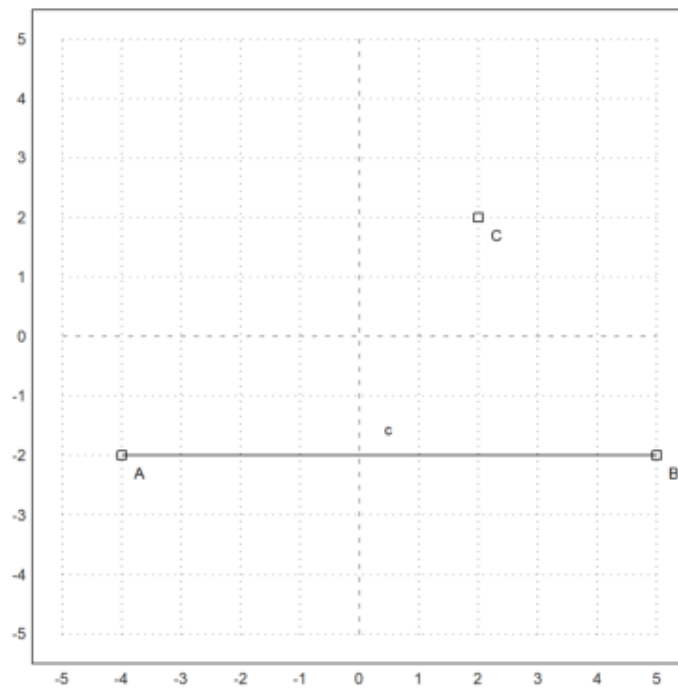
```
>B=[5,-2]; plotPoint(B,"B"):
```



```
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C"):
```

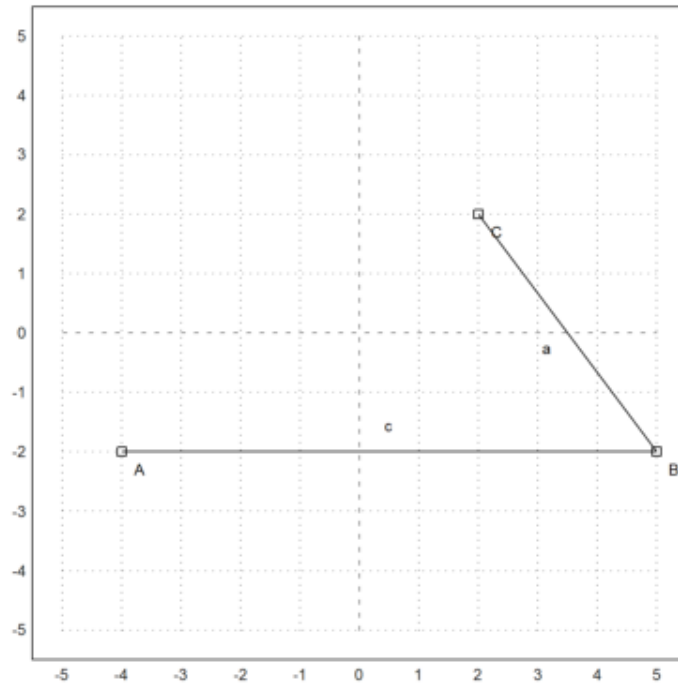


```
>plotSegment(A,B,"c"):
```

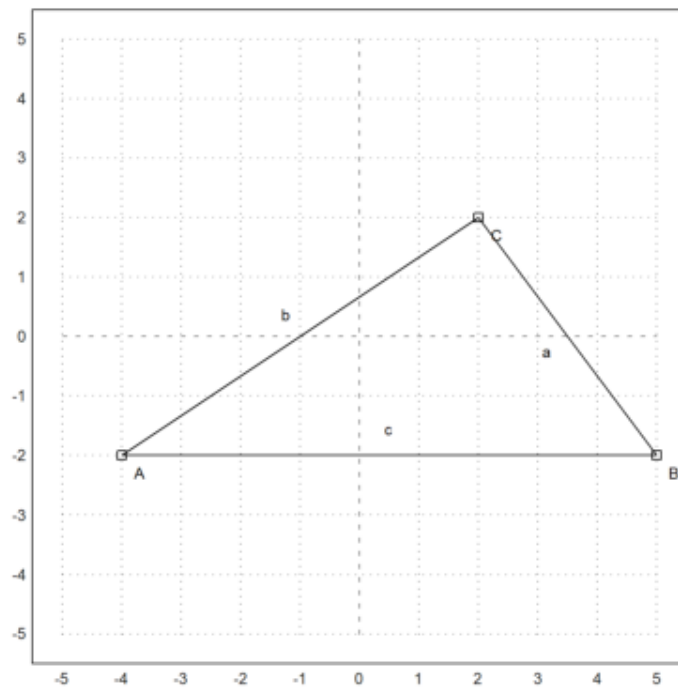


```
>plotSegment(B,C,"a"):
```

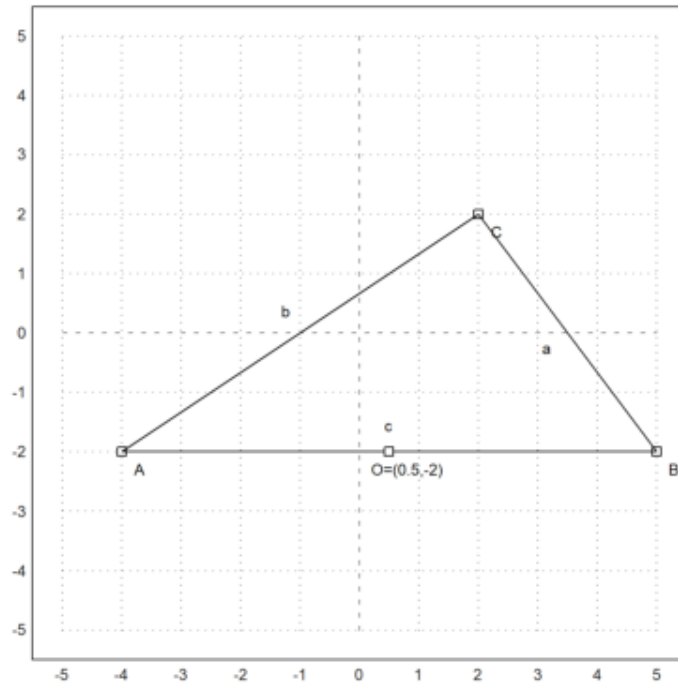




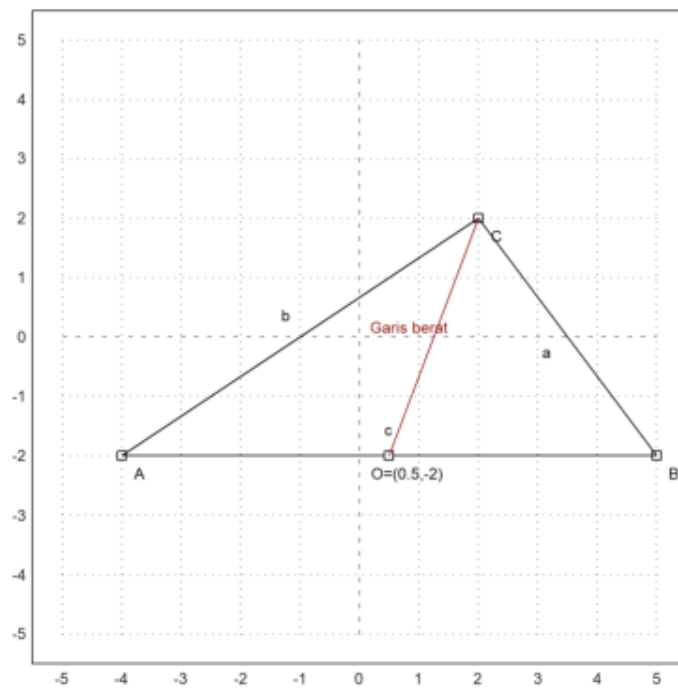
```
>plotSegment(A,C,"b") :
```



```
>t=middlePerpendicular(A,B);  
>O=lineIntersection(t,lineThrough(A,B)); plotPoint(O,value=1) :
```



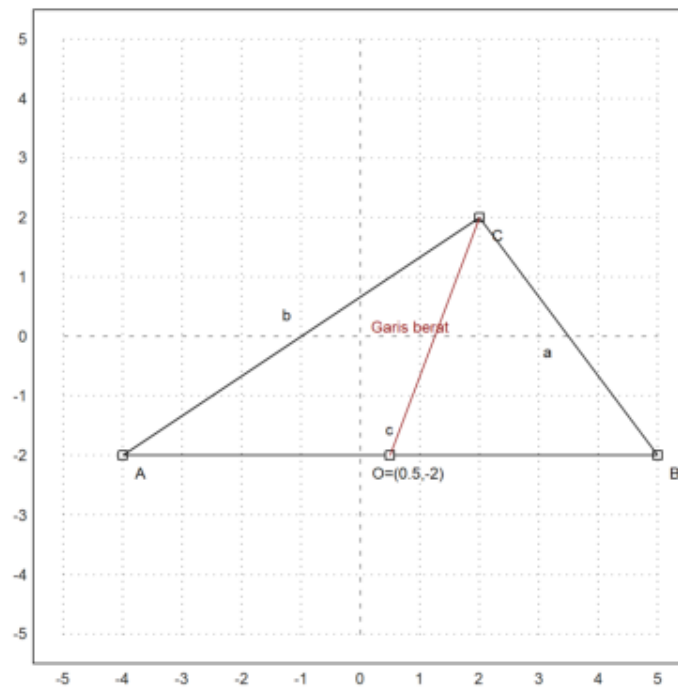
```
>color(2);
>plotSegment(O,C,"Garis berat"):
```



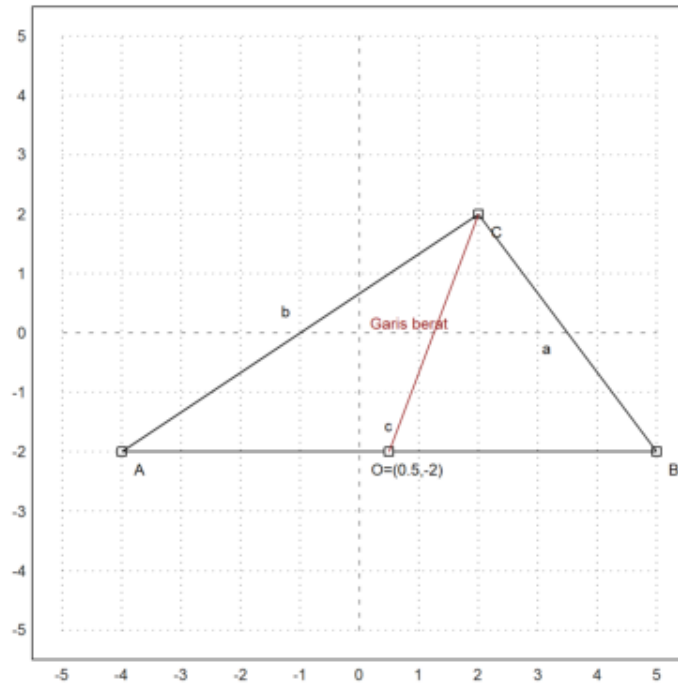
```
>color(1);
```

## Mencari persamaan garis beratnya

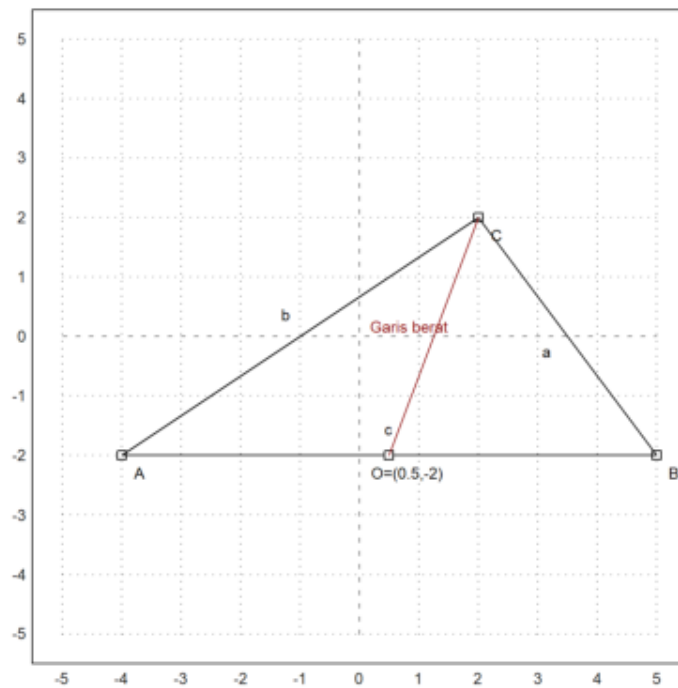
```
>A=[-4,-2];  
>B=[5,-2];  
>C=[2,2];  
>t=middlePerpendicular(A,B):
```



```
>O=lineIntersection(t,lineThrough(A,B)):
```



```
>p=lineThrough(O,C) :
```



```
>$getLineEquation(p, x, y)
```

$$-4x + \frac{3y}{2} = -5$$

```
>$solve(% , y)
```

$$\left[ y = \frac{-10 + 8x}{3} \right]$$

## Persamaan garis tinggi

---

Garis tinggi dalam segitiga adalah ruas garis yang ditarik dari sudut segitiga ke sisi yang berlawanan secara tegak lurus. Dengan kata lain, garis tinggi merupakan jarak vertikal dari salah satu sudut segitiga ke sisi yang berlawanan, dan garis ini membentuk sudut siku-siku dengan sisi tersebut.

Contoh soal:

Terdapat

$$\triangle ABC, \text{ dengan } A(-2, 3); B(3, -2); \text{ dan } C(-4, -1)$$

Tentukan garis tinggi di titik A dan persamaannya!

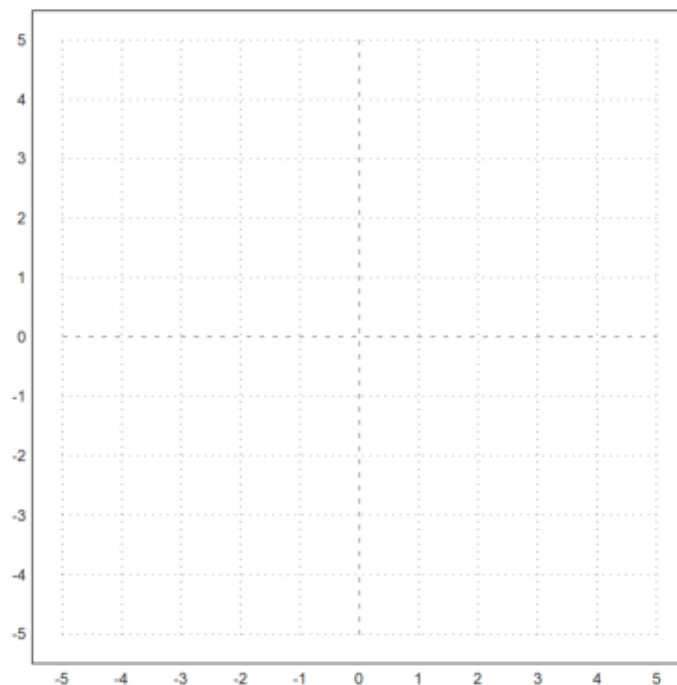
Penyelesaian:

Membuat plot garis tinggi segitiga

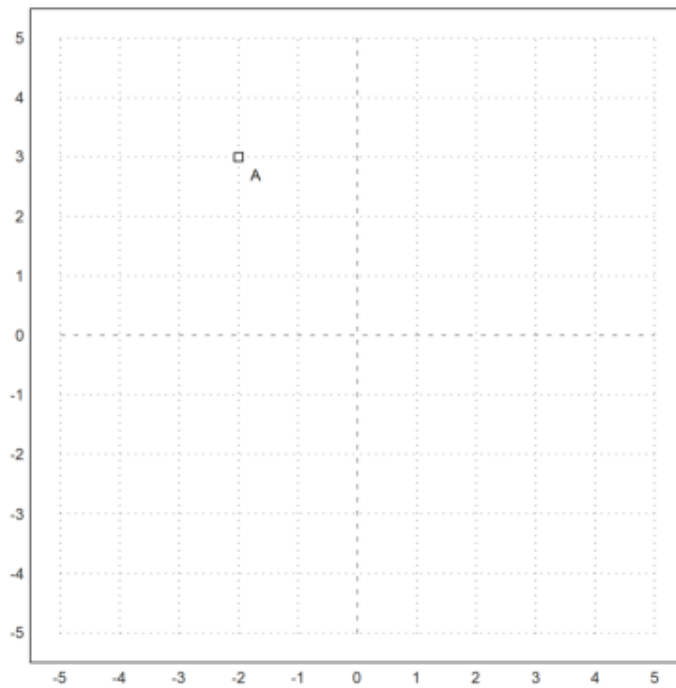
```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

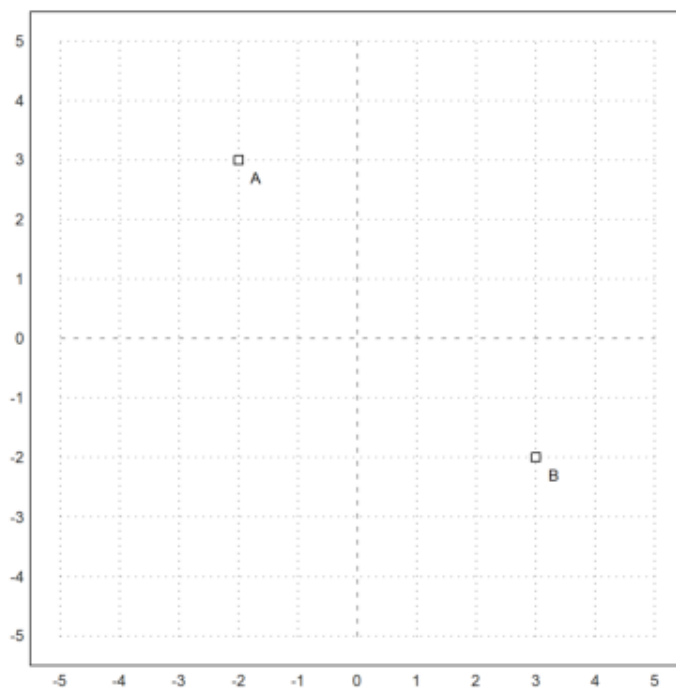
```
>setPlotRange(5) :
```



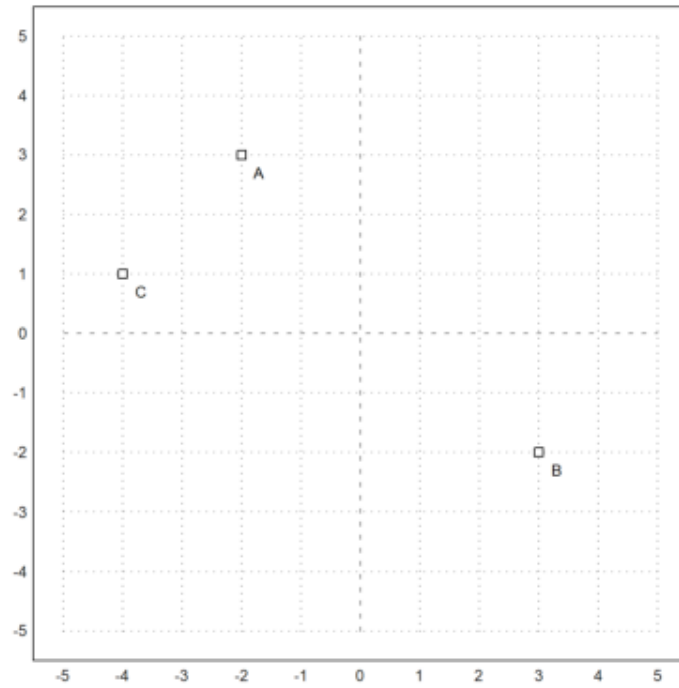
```
>A=[-2,3]; plotPoint(A,"A"):
```



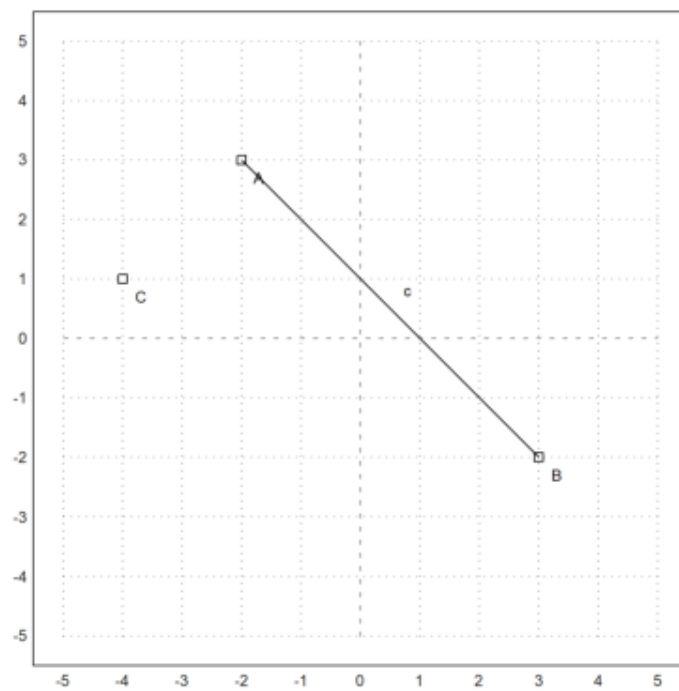
```
>B=[3,-2]; plotPoint(B,"B"):
```



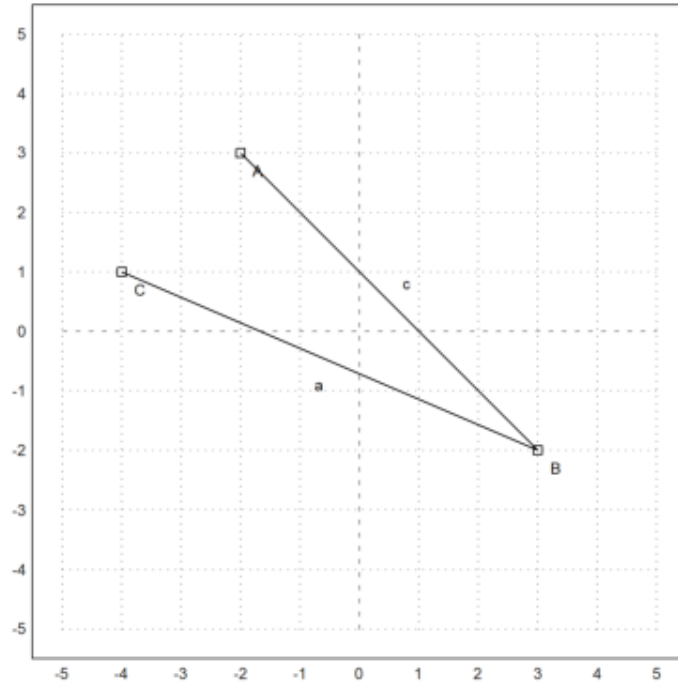
```
>C=[-4,1]; plotPoint(C,"C"):
```



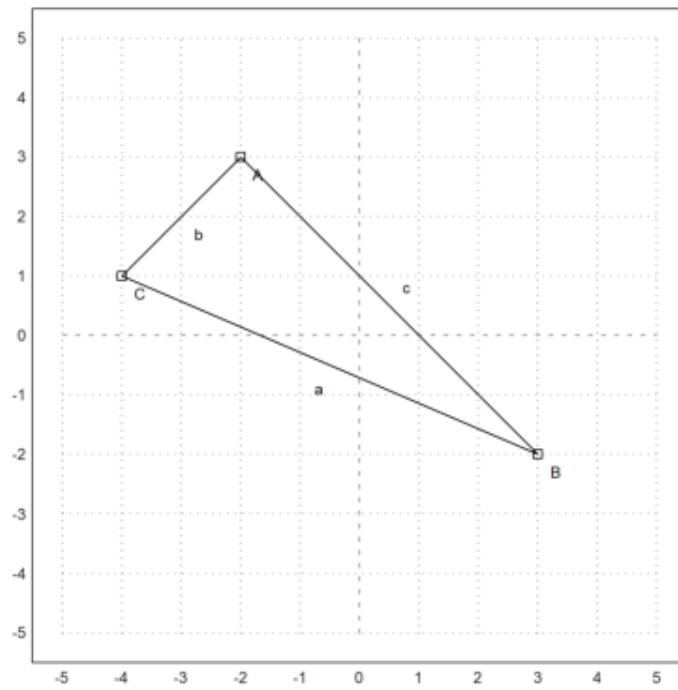
```
>plotSegment(A,B,"c"):
```



```
>plotSegment(B,C,"a") :
```

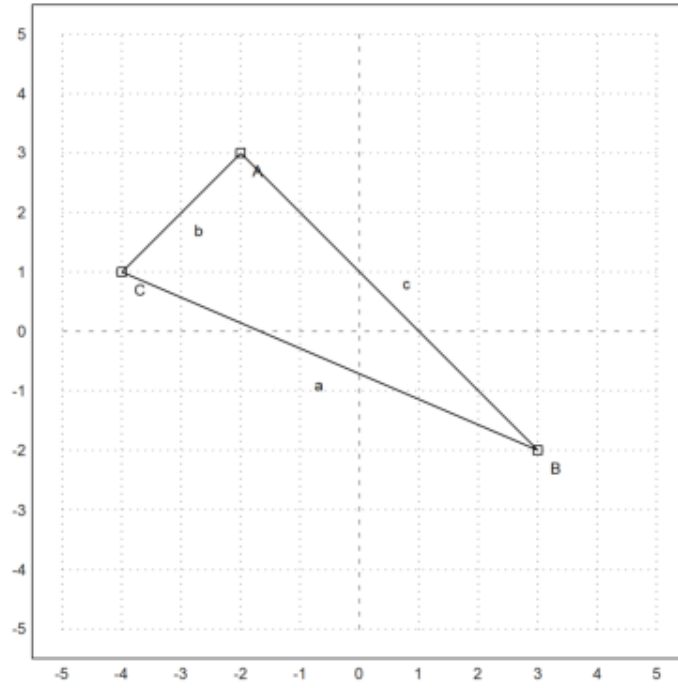


```
>plotSegment(A,C,"b") :
```

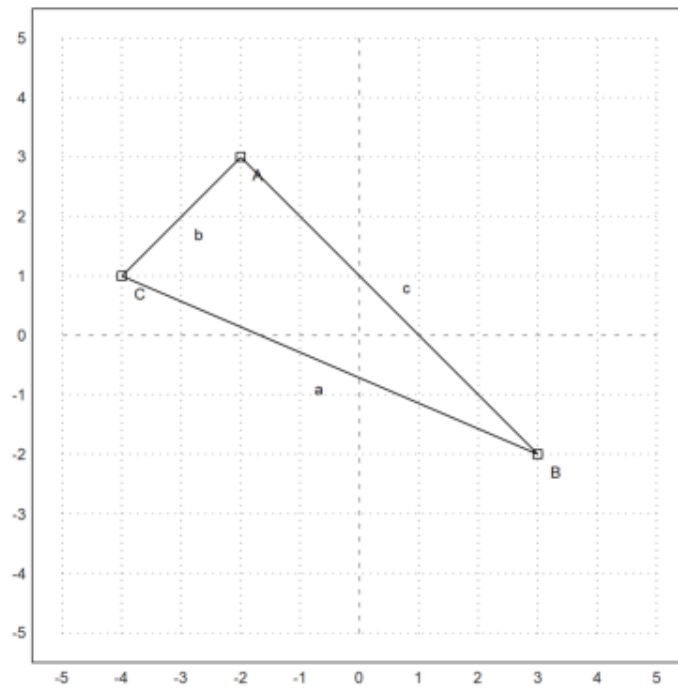




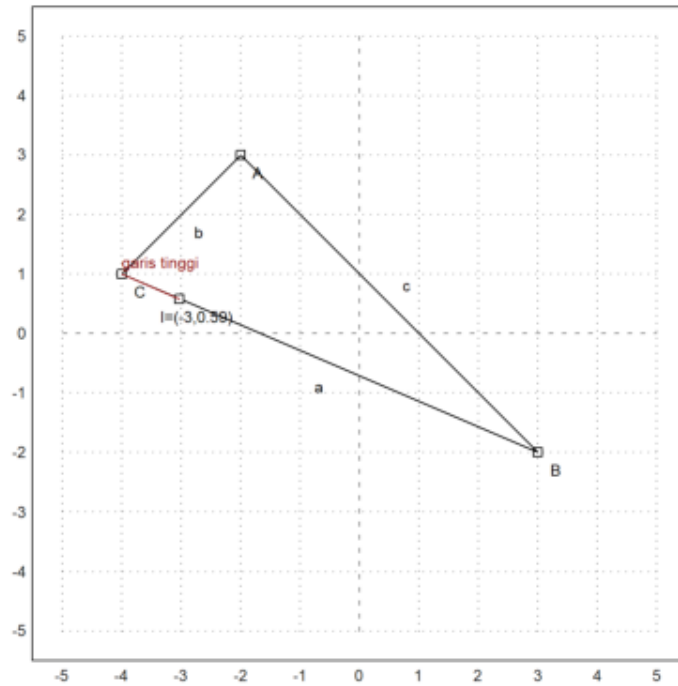
```
>g=lineThrough(B,C) :
```



```
>h=perpendicular(A,g) :
```



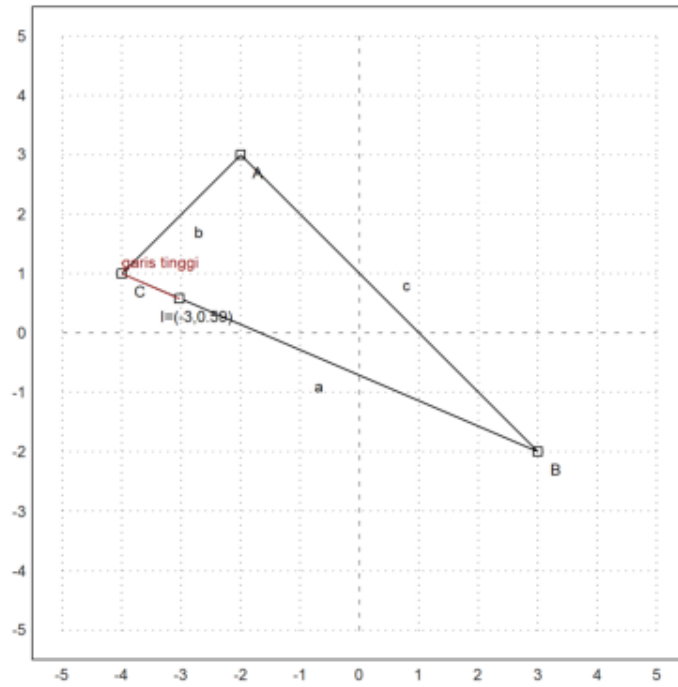
```
>I=lineIntersection(g,h); plotPoint(I,value=1);  
>color(2);  
>plotSegment(C,I,"garis tinggi"):
```



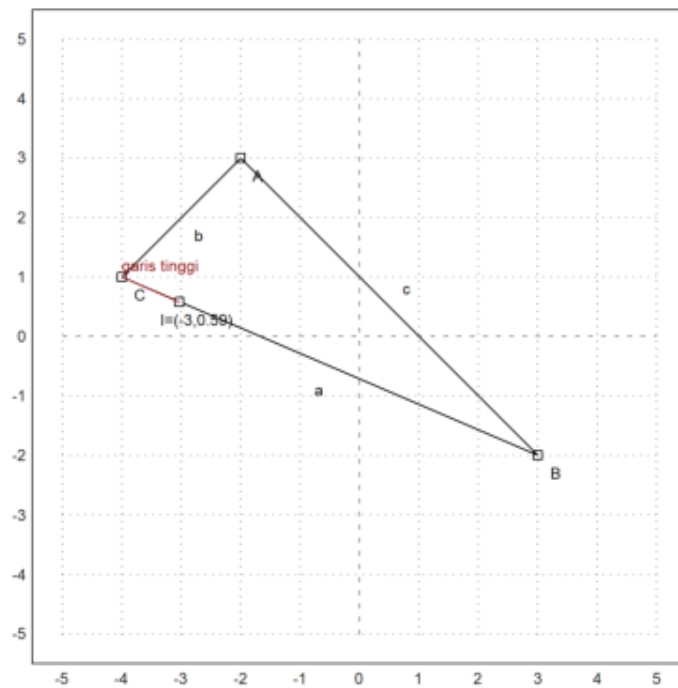
```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis tingginya

```
>A=[-2, 3];  
>B=[3, -2];  
>C=[-4, -1];  
>g=lineThrough(B,C):
```



`>h&=perpendicular(A,g) :`



`>$getLineEquation(h,x,y)`

$$-7x + y = 17$$

```
>$solve(%,y)
```

$$[y = 17 + 7x]$$

## Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

---

### 1. Perintah-perintah/fungsi-fungsi geometri;

---

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik. Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan perintah.

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

### Fungsi-fungsi untuk membuat objek geometri

---

Dalam menyajikan objek geometri kita dapat memanfaatkan fungsi-fungsi yang ada di EMT antara lain :  
defaultd:=textheight()\*1.5 : mengatur nilai asli untuk parameter d

```
>defaultd:=textheight()*1.5
```

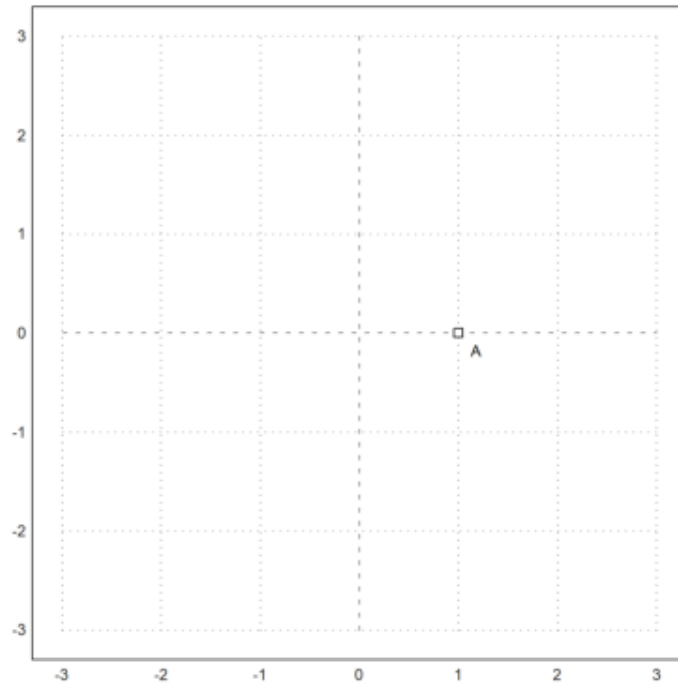
36

```
>setPlotRange(3)
```

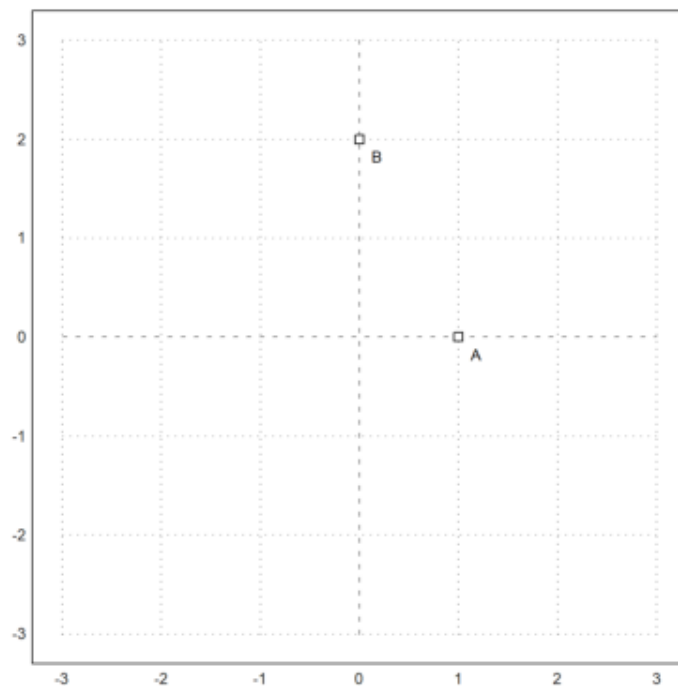
[-3, 3, -3, 3]

plotPoint(P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"

```
>A=[1,0];  
>plotPoint(A, "A"):
```

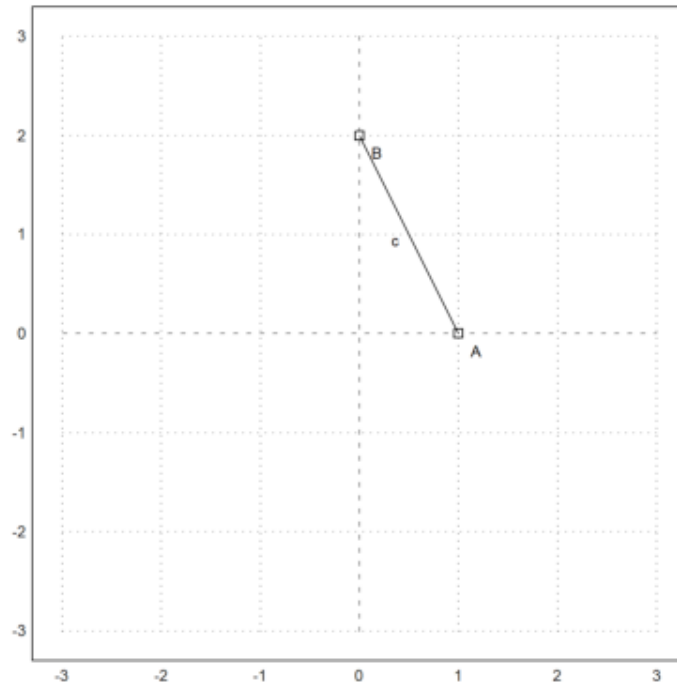


```
>B=[0,2];
>plotPoint(B):
```



Menggambar ruas garis dari A ke B menggunakan fungsi `plotSegment(A,B,"AB",d)`: menggambar ruas garis AB, diberi label "AB" sejauh d

```
> plotSegment (A,B,"c", 20) :
```



`plotLine (g, "g", d)`: menggambar garis g diberi label "g" sejauh d  
`plotCircle (c, "c", v, d)`: Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"  
`plotLabel (label, P, V, d)`: menuliskan label pada posisi P

## Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik)

```
>setPlotRange(-1,4,-1,4); //mendefinisikan bidang koordinat  
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); //mendefinisikan titik A  
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B"); //mendefinisikan titik B  
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C"); //mendefinisikan titik C
```

`lineThrough(A, B)`: garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sehingga  $ax+by=c$ .

```
>D=lineThrough(A, C) // garis melalui A dan C
```

```
[-2, 1, -2]
```

dengan -2 sebagai a, 1 sebagai b, dan -2 sebagai c  
atau  $-2x+y=-2$

apabila dihitung manual menjadi

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

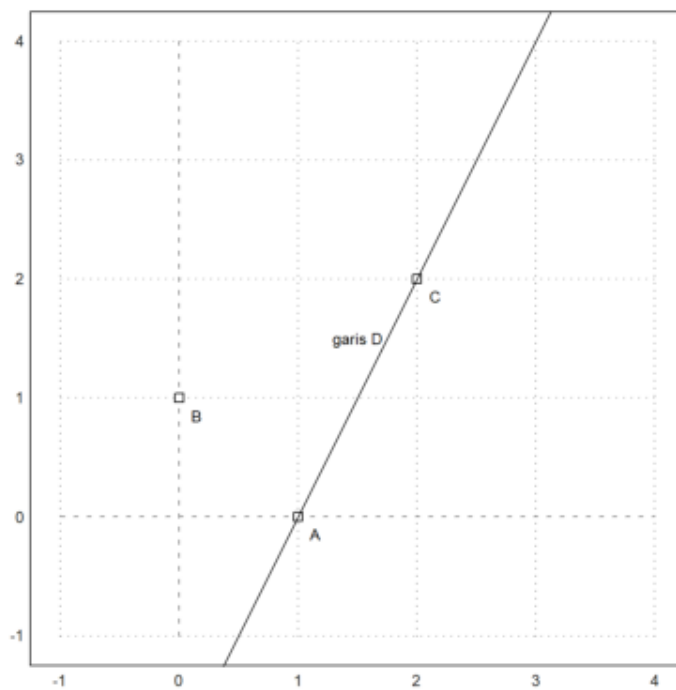
$$\frac{y-0}{2-0} = \frac{x-1}{2-1}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{x-1}{1}$$

$$y = 2x - 2$$

$$-2x + y = -2$$

```
>plotLine (D, "garis D"): //memvisualisasikan garis D
```



getPointOnLine(g): titik pada garis g

parallel (A, D): garis melalui titik A sejajar garis D

perpendicular(A, D): garis melalui titik A tegak lurus garis D

```
>E= perpendicular(A, D)
```

```
[-1, -2, -1]
```

dengan -1 sebagai a, -2 sebagai b, dan -1 sebagai c  
atau  $-x-2y=-1$

apabila dihitung manual menjadi

garis yang melalui titik (1,0) tegak lurus  $-2x+y=-2$

$$-2x + y = -2$$

$$y = 2x - 2$$

$$m = 2$$

agar tegak lurus melalui titik A(1,0), maka

$$(y - y_1) = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$(y - 0) = \frac{-1}{2}(x - 1)$$

$$2y = 1 - x$$

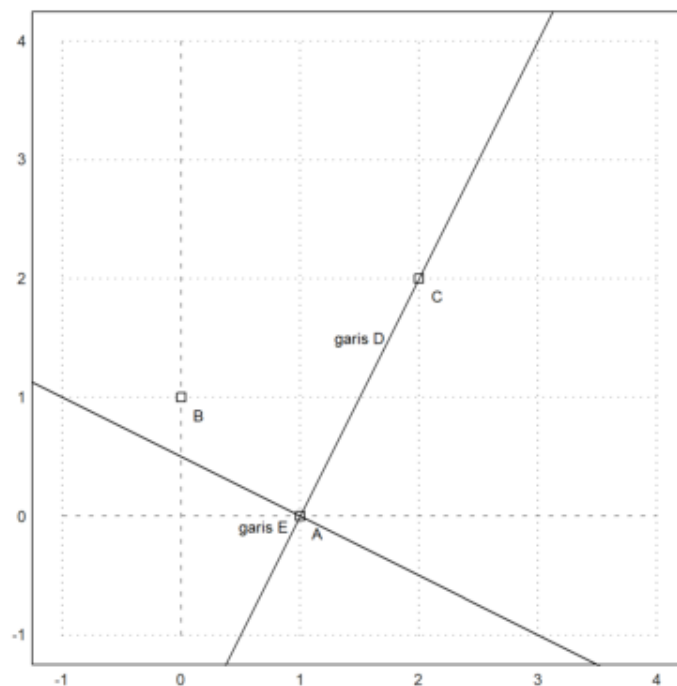
$$-x - 2y = -1$$

lineIntersection(g, h): titik potong garis g dan garis h

```
>lineIntersection(D, E) // titik potong garis D dan garis E
```

```
[1, 0]
```

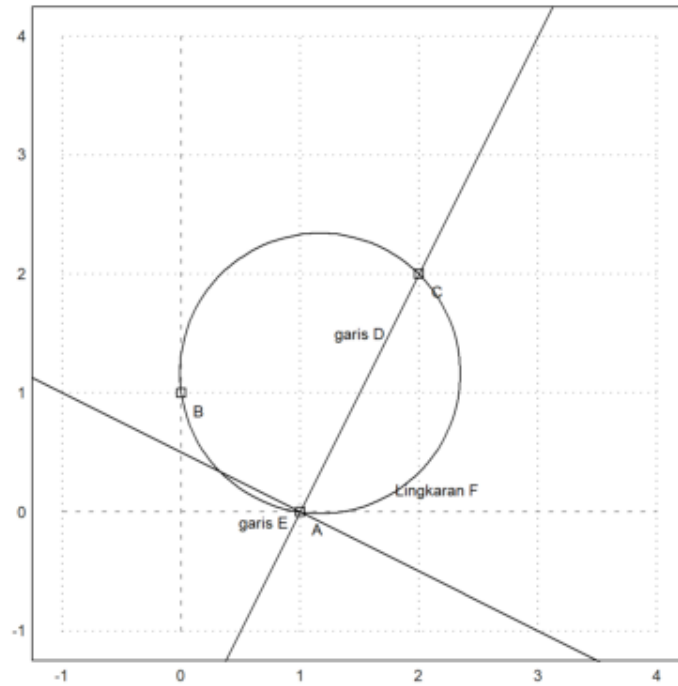
```
>plotLine (E, "garis E"): //memvisualisasikan garis E
```





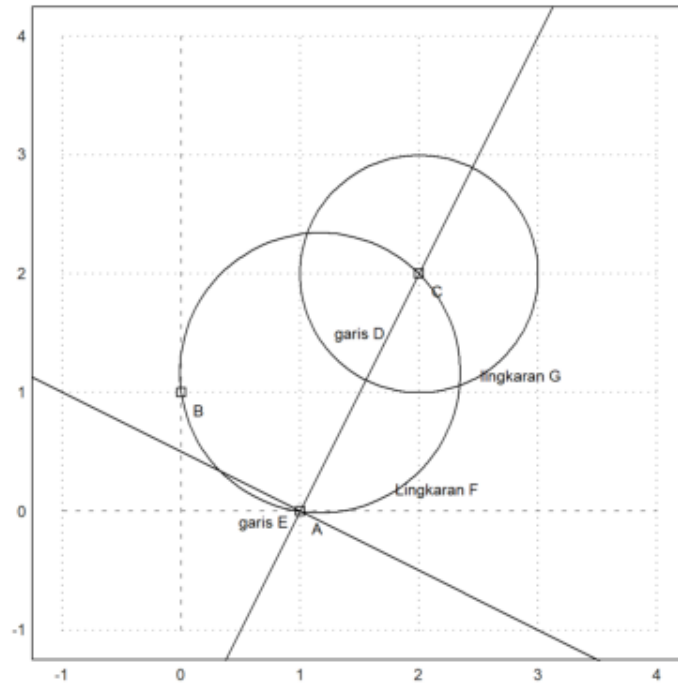
`circleThrough(A,B,C)`: lingkaran melalui A, B, C

```
>F=circleThrough (A, B, C) ;  
>plotCircle (F, "Lingkaran F") :
```



`circleWithCenter (A, r)`: lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r

```
>G=circleWithCenter (C, 1) ;  
>plotCircle (G, "lingkaran G") :
```



getCircleCenter(c): pusat lingkaran c

```
>getCircleCenter (G)
```

```
[2, 2]
```

getCircleRadius(c): jari-jari lingkaran c

```
>getCircleRadius (G)
```

```
1
```

circleCircleIntersections (c1, c2): titik potong lingkaran c1 dan c2

```
>circleCircleIntersections (F,G)
```

```
[1.05969, 2.34031]
```

### Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

---

getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y

```
>A &=[3,5]; B &=[2,2];  
>g &= lineThrough (A,B)
```

[3, - 1, 4]

```
>&getLineEquation(g,x,y)
```

$$3x - y = 4$$

getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse (persamaan garis normal) garis g dinyatakan dalam x dan y dengan titik A pada sisi positif (kanan/atas) garis. Bentuk Hesse adalah salah satu cara untuk menyatakan garis dalam bentuk matematika yang lebih umum.

```
>$powerdisp:true
```

**true**

```
>&getHesseForm (g,x,y,A)
```

$$\frac{-4 + 3x - y}{\text{sqrt}(10)}$$

spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni  $\sin(\alpha)^2$  dengan alpha sudut yang menghadap sisi a.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

$$25 = 25$$

kuadrat dari sin dari sudut alpha yang menghadap sisi a dalam segitiga tersebut.

```
>&spread(a,b,c)
```

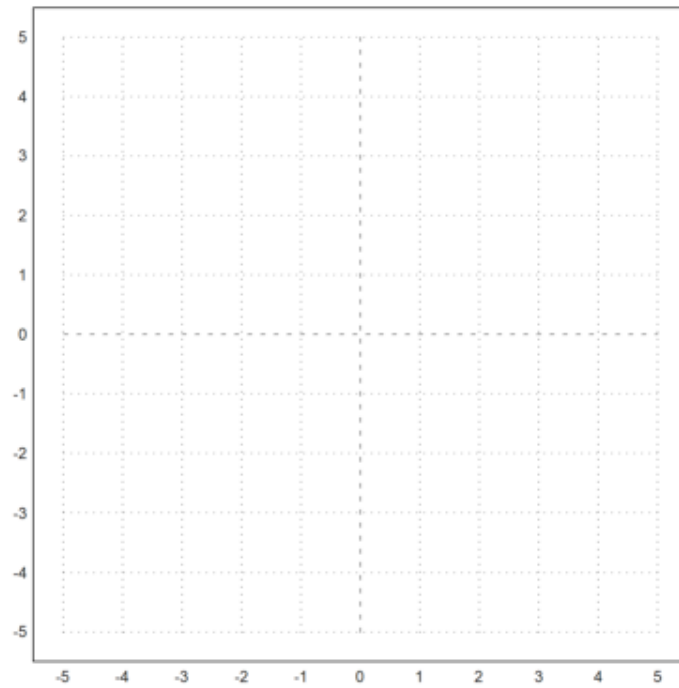
9  
--  
25

## 2. Mengatur bidang koordinat

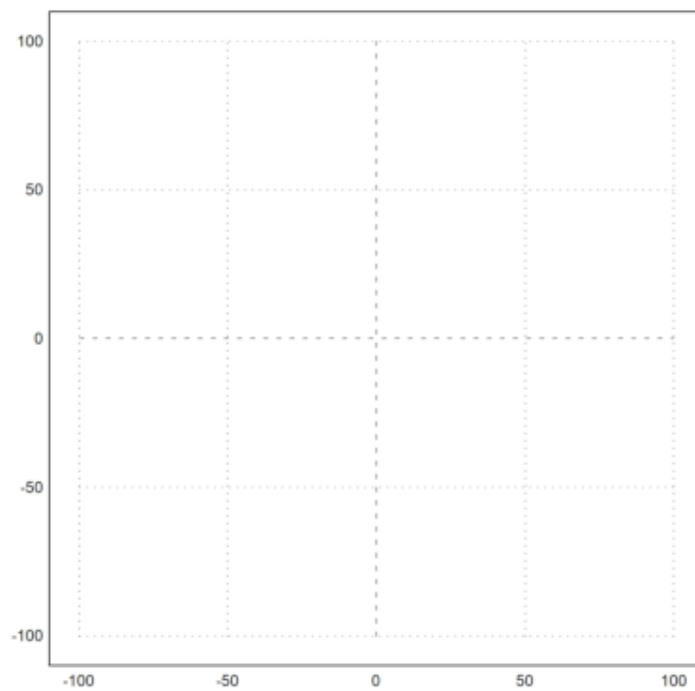
---

setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan y adalah -r sd r

```
>setPlotRange(5): //mendefinisikan bidang koordinat
```



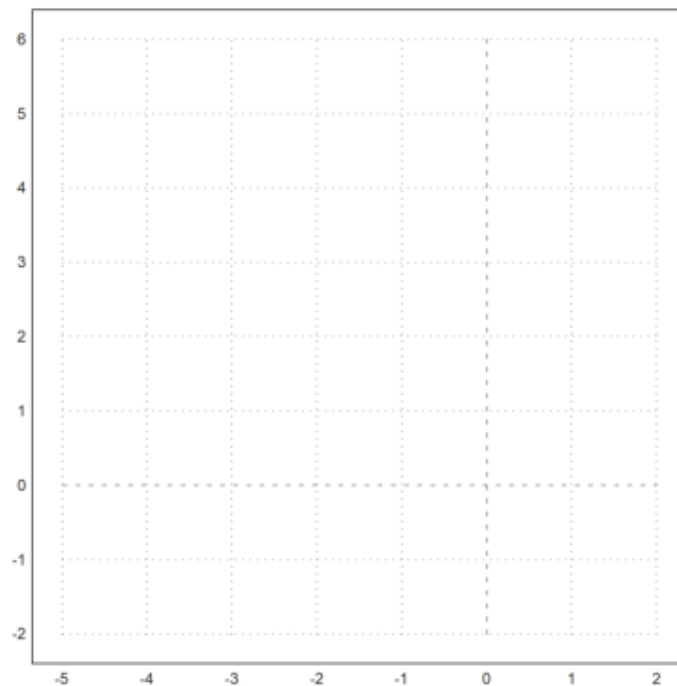
```
>setPlotRange(100):
```



`setPlotrange(x1,x2,y1,y2)`: menentukan rentang x dan y pada bidang koordinat  
Keterangan:

x1 adalah batas terkecil sumbu-x  
x2 adalah batas terbesar sumbu-x  
y1 adalah batas terkecil sumbu-y  
y2 adalah batas terbesar sumbu-y

```
>setPlotRange(-5, 2, -2, 6) :
```



### Sub Topik 3: Menggambar Objek - Objek Geometri

Objek-objek geometri meliputi titik, garis, bidang, bentuk bentuk geometri pada bidang, beserta sifat sifatnya. Tiga unsur geometri yaitu titik, garis, dan bidang. Ketiga unsur tersebut juga disebut sebagai tiga unsur yang tak didefinisikan.

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

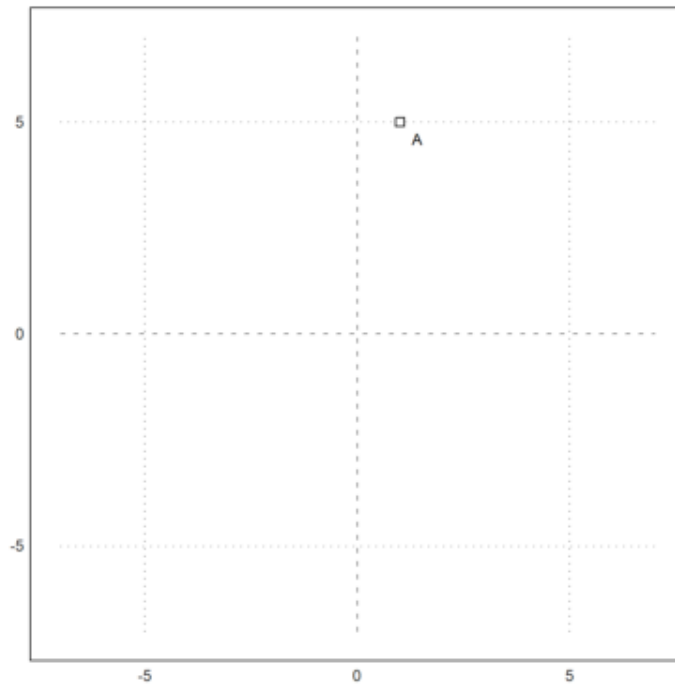
```
>setPlotRange(7); // mendefinisikan bidang kordinat baru :
```

Langkah pertama yaitu membuat bidang koordinat dengan jarak 7. Pada `setPlotRange` menampilkan bidang dengan jarak yang sama dengan masing masing sumbu.

```
>A=[1,5];
```

Langkah kedua yaitu memanggil titik A untuk menggambar titik A di bidang koordinat.

```
>plotPoint(A,"A"):
```



Langkah ketiga yaitu menggambar titik dengan fungsi plotPoint. Fungsi ini untuk menggambar titik A dengan memberi nama "A". Titik A disini merupakan titik koordinat (1,5). 1 sebagai sumbu x dan 5 sebagai sumbu y.

Latihan 2

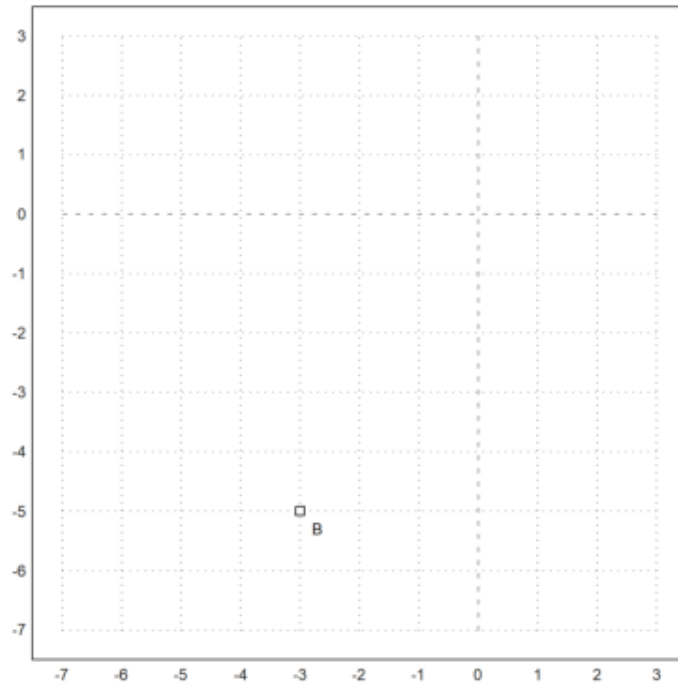
---

Gambarlah titik B di koordinat (-3,-5)!

```
>setPlotRange(-7,3,-7,3);
```

Langkah pertama yaitu membuat bidang koordinat dengan  $x1=-7$ ,  $x2=3$ ,  $y1=-7$ ,  $y2=3$ . bidang koordinat ini menentukan x dan y dengan x1 menunjukkan batas terkecil dan x2 menunjukkan batas terbesar sumbu x sedangkan y1 menunjukkan batas terkecil dan y2 menunjukkan batas terbesar sumbu y.

```
>B=[-3,-5]; plotPoint(B,"B"):
```



Langkah kedua yaitu memuliskan titik B dengan memanggil `plotPoint` dengan menggambar titik B dengan memberi nama "B". Titik B ini (-3,-5) dengan  $x = -3$  dan  $y = -5$ .

Latihan 3

Gambarlah 4 di titik C (2,7), titik D (-3,-5), titik E (-4,6), titik F (2,-4) di bidang koordinat!

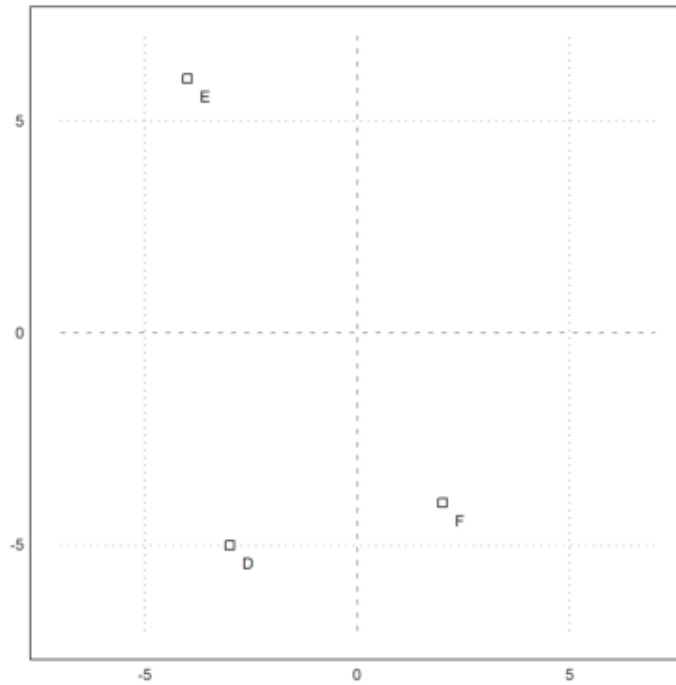
```
>setPlotRange(7);
```

Langkah pertama adalah menggambar bidang koordinatnya, disini saya mengambil batas 7 di setiap sumbunya

```
>C=[2,7]; D=[-3,-5]; E=[-4,6]; F=[2,-4]; // mendefinisikan 3 titik
```

Langkah kedua yaitu menuliskan ketiga titik, titik yang diambil bisa di jadikan satu perintah dengan menuliskan titik C dilanjut titik dua dan spasi kemudian tulis titik berikutnya

```
>plotPoint(D,"D"); plotPoint(E,"E"); plotPoint(F,"F"):
```



Langkah terakhir yaitu memanggil fungsi plotPoint. Menggambar titik ini bisa dijadikan satu perintah juga.  
 Latihan 4

---

Tentukan jarak antara titik P dan titik Q!

Titik P = (0,-5)

Titik Q = (-5,0)

```
>setPlotRange(-6,1,-6,1);
```

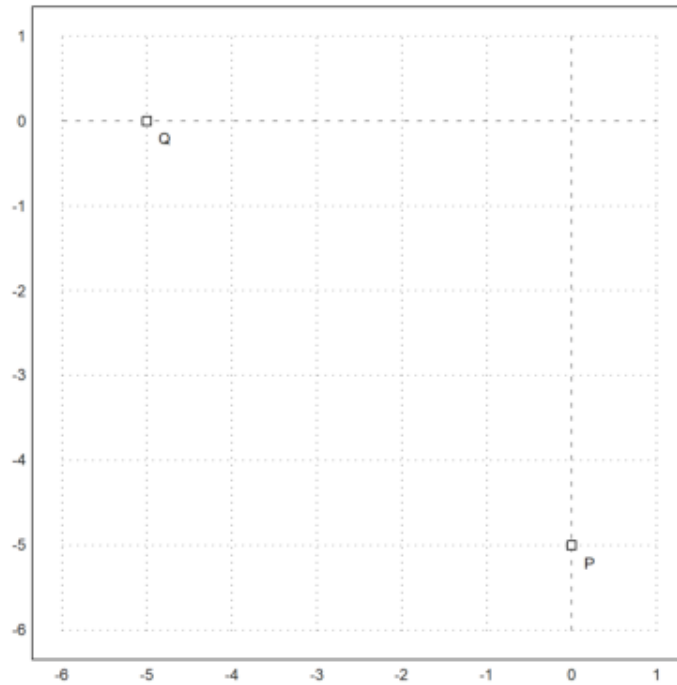
Langkah pertama adalah menggambar bidang koordinatnya terlebih dahulu

```
>P=[0,-5]; Q=[-5,0]; // mendefinisikan titik
```

Langkah kedua yaitu mendefinisikan titik dengan menulis titiknya.

```
>plotPoint(P,"P"); plotPoint(Q,"Q"): //menggambarkan titik
```





Langkah ketiga adalah menggambar titik, seperti pada latihan di atas cara menggambar titik adalah dengan plotPoint

```
>distance(P,Q) // menentukan jarak P dan Q
```

7.07106781187

Langkah terakhir adalah dengan fungsi distance. Fungsi distance digunakan untuk menentukan jarak antara titik 1 dengan titik lainnya

Cara manual untuk menentukan jarak P dan Q adalah dengan rumus pythagoras

$$A = -5, B = -5, C = ?$$

$$\sqrt{50}$$

$$5\sqrt{2} \text{ atau sekitar } 7,07107$$

## Latihan 5

Tentukan titik tengah RS!

Titik R = (5,1)

Titik S = (3,6)

```
>R=[5,1]; S=[3,6]; //mendefinisikan titik R dan S
>middlePerpendicular(R,S)
```

[2, -5, -9.5]

## Latihan 6

---

Tentukan kuadrat jarak titik R dan titik T!

```
>R=[5,1]; S=[3,6];  
>distanceSquared(R,S)
```

29

## Latihan 7

---

Tentukan kuadrat jarak titik R dan titik S!

```
>R=[5,1]; S=[3,6];  
>quadrance(R,S)
```

29

## Latihan 1

---

Gambarlah ruas garis dengan titik A (0,5) dan titik B (1,5)!

```
>setPlotRange(5);
```

Membuat koordinat dengan setPlotRange (5)

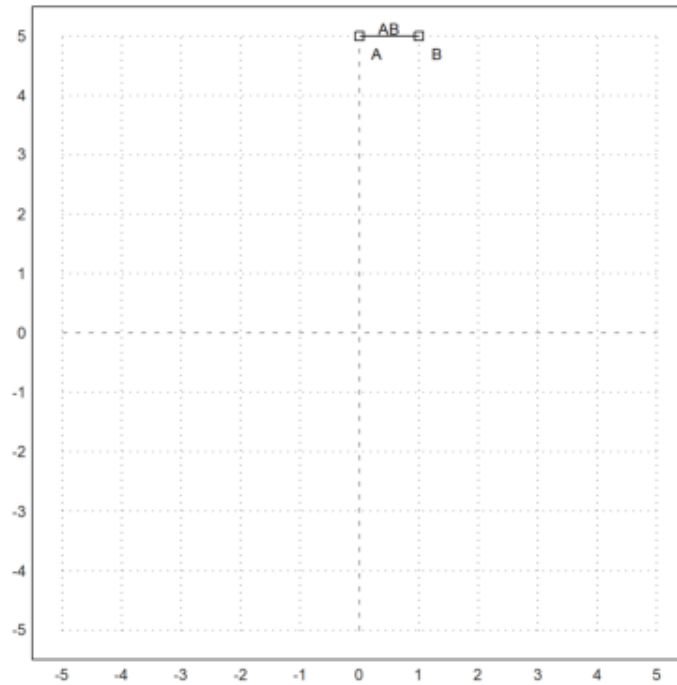
```
>A=[0,5]; plotPoint(A,"A");
```

Menentukan titik A dan menggambar titik A

```
>B=[1,5]; plotPoint(B,"B");
```

Menentukan titik B dan menggambar titik B menggunakan fungsi plotPoint

```
>plotSegment (A,B, "AB", 9) :
```



Menggambar ruas garis dengan batas titik A (0,5) dan titik B (1,5)!  
Latihan 2

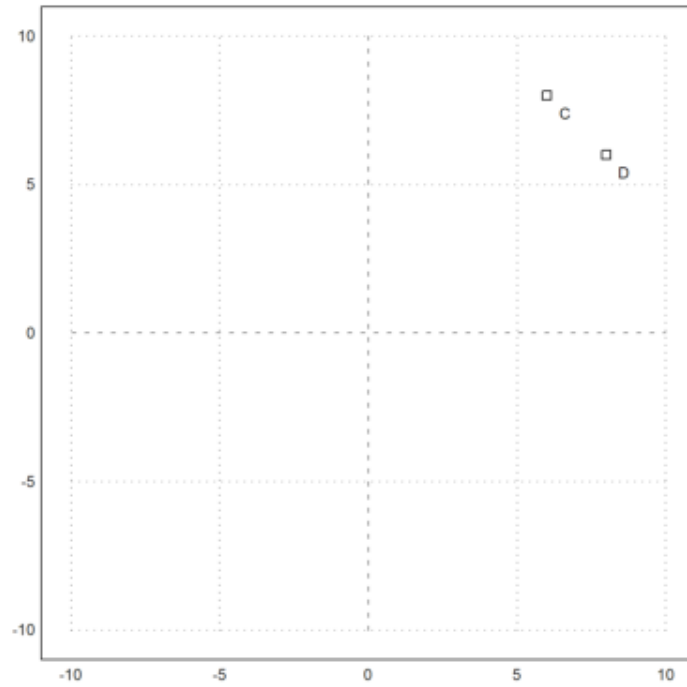
---

Gambarlah ruas garis dengan titik C (6,8) dan titik D (8,6)!

```
>setPlotRange (10) ;
```

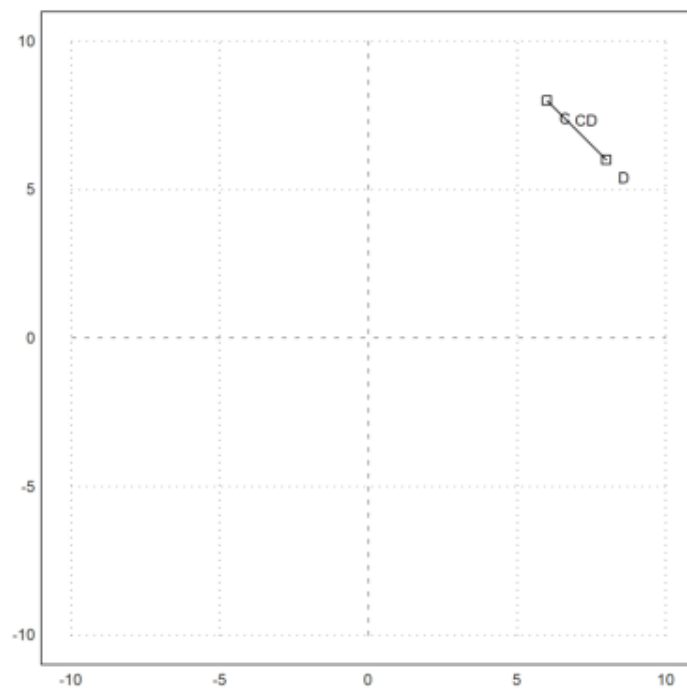
Membuat garis kartesius/ bidang koordinat

```
>C=[6,8]; D=[8,6]; plotPoint (C, "C"); plotPoint (D, "D") :
```



Menentukan titik dan menggambar titik C dan D

```
>plotSegment(C,D,"CD",20):
```



Menggambar ruas garis CD dengan titik C(6,8) dan titik D(8,6) dengan jarak label dari ruas garis adalah 20  
Latihan 3

---

Tentukan titik tengah di ruas AB, jika diketahui titik A(0,2), titik B(6,2)!

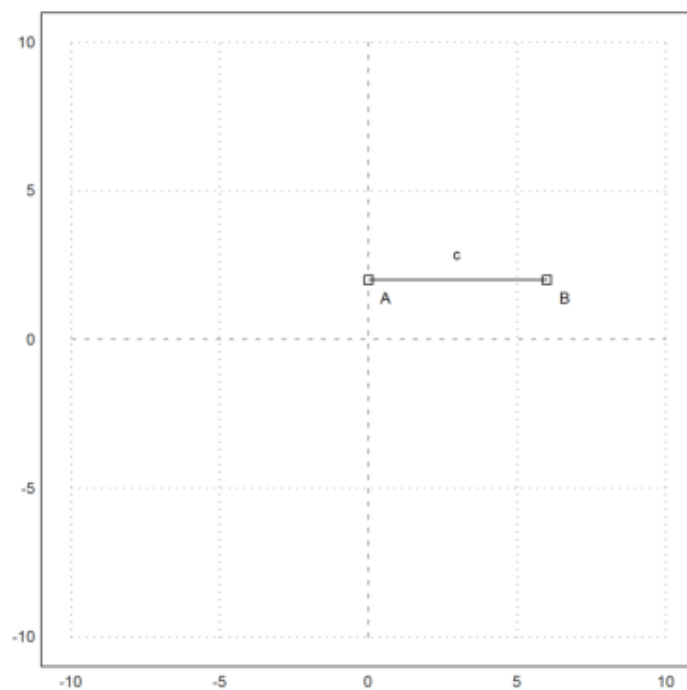
```
>setPlotRange(10);
```

Langkah pertama adalah dengan membuat bidang koordinatnya

```
>A=[0,2]; plotPoint(A,"A");
```

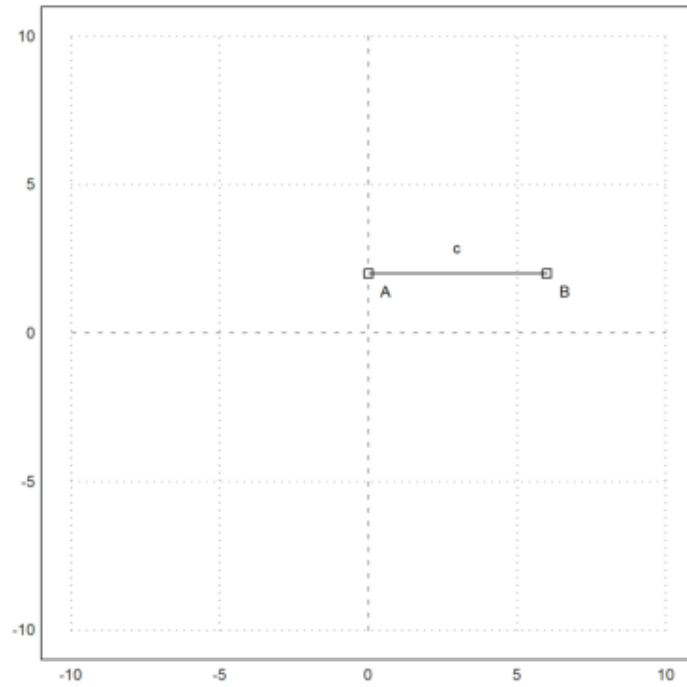
Langkah kedua dan ketiga adalah mendefisikan dan menggambar titiknya

```
>B=[6,2]; plotPoint(B,"B");  
>plotSegment(A,B,"c"):
```



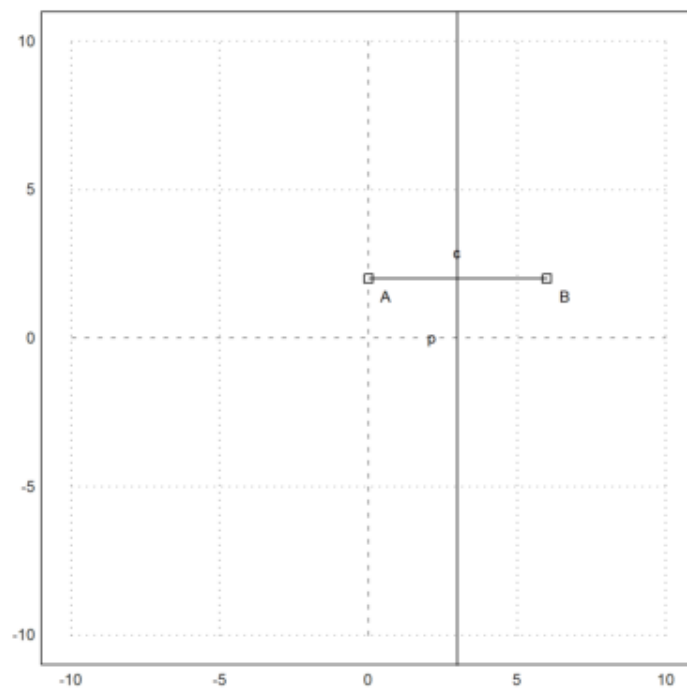
Kemudian menggambar ruas garis yang melalui 2 titik yaitu A dan B

```
>h= middlePerpendicular(A,B):
```



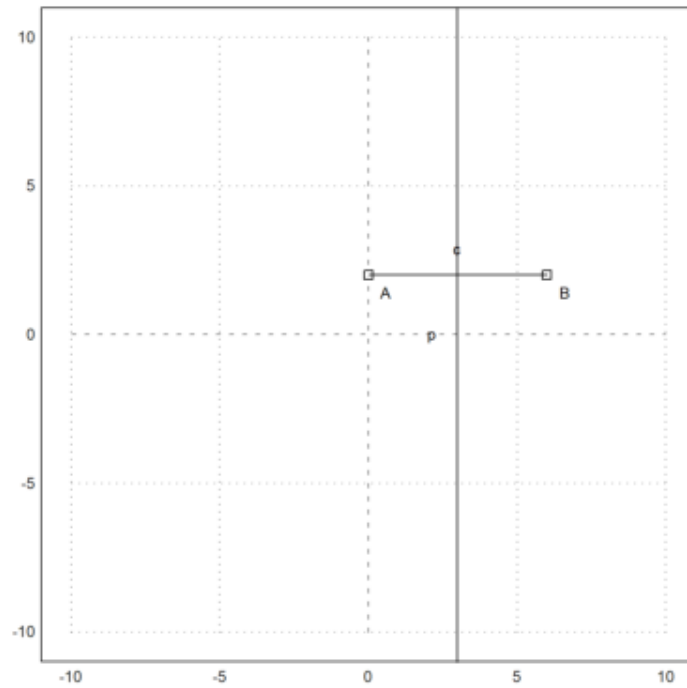
Selanjutnya buat garis h yang tegak lurus ruas garis AB dan memotong tepat di tengah ruas garis AB

```
>plotLine(h) :
```



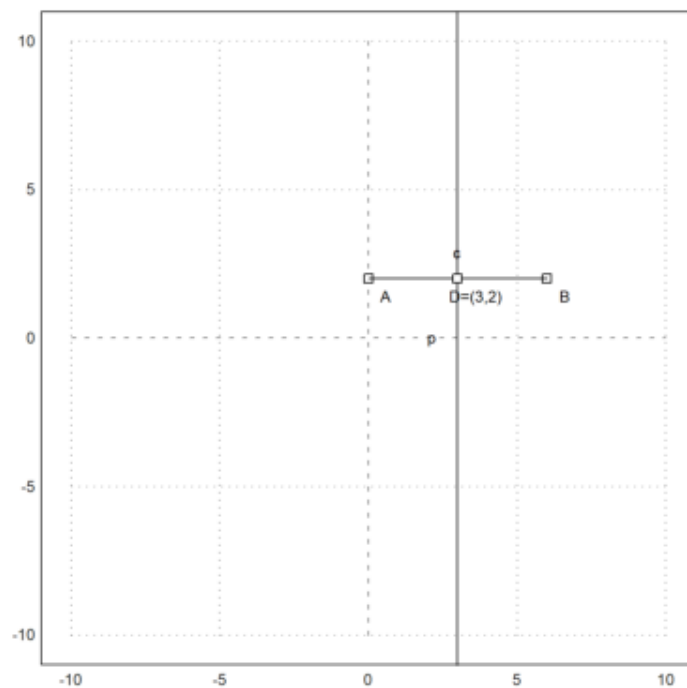
Gambar garis h

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(A,B)):
```



Menentukan titik potong garis AB

```
>plotPoint(D,value=1):
```



Sebuah garis dipikirkan sebagai suatu himpunan titik berderet yang panjang tak terbatas, tetapi tidak memiliki lebar. Sebuah garis direpresentasikan dengan sebuah gambar sinar dengan mata di kedua ujungnya yang menunjukkan bahwa garis tersebut tak berakhir.

Sebuah garis itu lurus sempurna, tidak memiliki ketebalan. Garis bisa dimodelkan sebagai garis lurus yang tidak ada awalan dan akhirnya.

Latihan 1

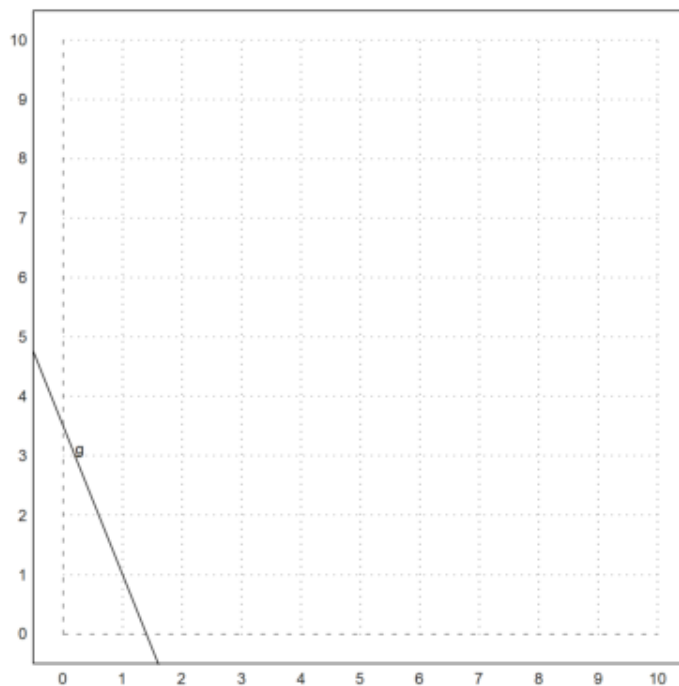
Gambarlah garis dengan persamaan  $5x+2y=7$ !

Persamaan  $5x+2y=7$  bisa dituliskan sebagai  $[5,2,7]$

```
>setPlotRange(0,10,0,10);
```

Langkah pertama adalah menentukan batas koordinat yaitu  $x_1=0, x_2=10, y_1=0$  dan  $y_2=10$

```
>plotLine([5,2,7], "g", 10):
```





Menentukan garis dengan fungsi plotline(persamaan garis,"label",jarak label)

Latihan 2

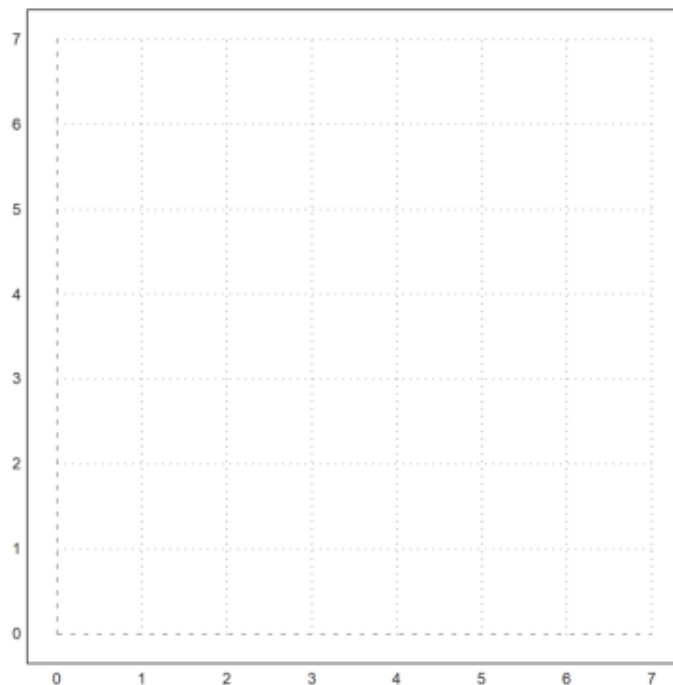
---

Gambarlah garis yang melalui titik C (2,3) dan titik D(1,4)!

```
>setPlotRange(0,7,0,7);
```

Langkah pertama adalah menggambar bidang kartesius terlebih dahulu

```
>C=[2,3]; D=[1,4];
```



Menentukan titik C dan titik D

```
>g=lineThrough(C,D)
```

```
[-1, -1, -5]
```

Latihan 3

---

Tentukan vektor arah (gradien) garis g!

```
>getLineDirection(g)
```

```
[-1, 1]
```

Latihan 4

---

Menentukan garis yang melalui titik A (3,4) dan tegak lurus terhadap garis (g)

```
>h=perpendicular(A,g)
```

```
[1, -1, -2]
```

Latihan 5

---

Menentukan titik potong dua garis, yaitu garis g dan garis h

```
>lineIntersection(g,h)
```

```
[1.5, 3.5]
```

Latihan 6

---

Menentukan garis dengan titik F(7,2), dan A(3,4) dan jarak label 10!

```
>setPlotRange(0,10,0,10)
```

```
[0, 10, 0, 10]
```

Menentukan bidang kartesius dengan batas terkecil x maupun y yaitu 0 dan batas terbesar x maupun y yaitu 10

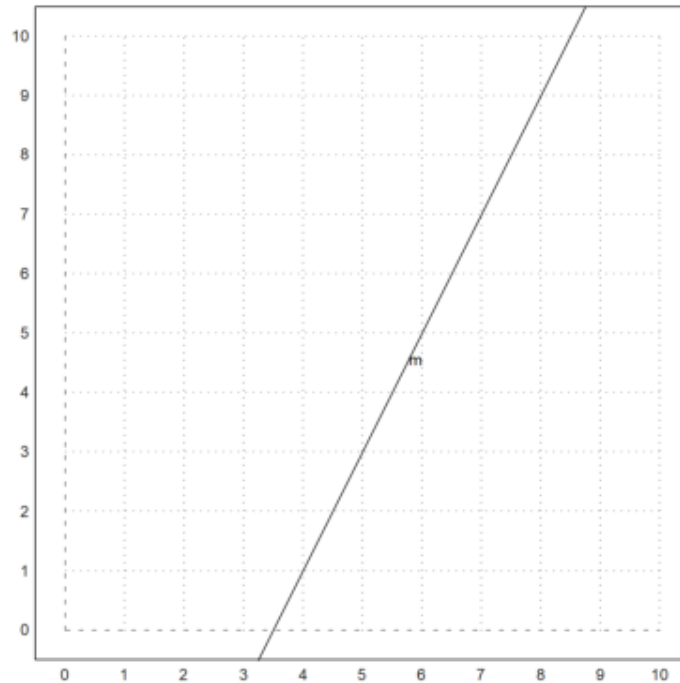
```
>F=[7,2]; A:=[3,4];
```

Menentukan titik F dan titik A

```
>m=middlePerpendicular(F,A);
```

## Membuat garis FA dengan fungsi middlePerpendicular

```
>plotLine(m, "m", 10) :
```



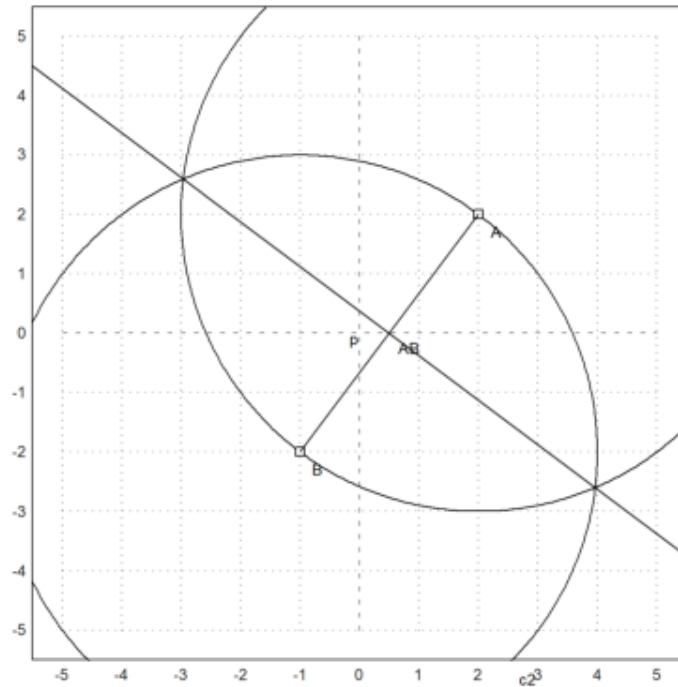
Menggambar garis dan jarak label menggunakan fungsi plotLine

Latihan 7

---

Gambar garis sumbu ruas AB dengan titik A(2,2) dan B(-1,-2)!

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2]; // menentukan titik titiknya  
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B)); //membuat lingkaran dengnan pusat A dan jari jari r  
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));  
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);  
>l=lineThrough(P1,P2);  
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);  
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```



## Menggambar Bidang

Bidang adalah permukaan rata dan tentu batasnya. Bidang didefinisikan sebagai permukaan datar yang didefinisikan oleh serangkaian garis yang tidak berpotongan

Latihan 1

Menggambar persegi panjang ABCD. Titik A (-3,5), B(-3,15), C(5,5), D(5,15)!

```
>setPlotRange(-5,17,-5,17); //mendefinisikan bidang koordinat
>A=[-3,5]; B=[-3,15]; C=[5,5]; D=[5,15]; //mendefinisikan dan menggambar 4 titik
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); plotPoint(D,"D");
```

Menggambar 4 titik

```
>plotSegment(A,B,"a"); plotSegment(B,D,"b"); plotSegment(C,D,"c"); plotSegment(A,C,"d");
```

Membuat ulang garis A,B dan C

Latihan 2

Menggambaran segitiga siku siku dengan titik D(2,4), E(2,8), F(6,4)!

```
>setPlotRange(-5,10,-5,10);
```

Menentukan gambar bidang kartesius

```
>D=[2,4]; E=[2,8]; F=[6,4];
```

Menentukan 3 titik D,E dan F

```
>plotPoint(D,"D"); plotPoint(E,"E"); plotPoint(F,"F");
```

Menggambar 3 titik

```
>plotSegment(D,E,"DE",10); plotSegment(E,F,"EF",10); plotSegment(F,A,"FA",10)
```

Latihan 3

---

Gambar dan tebaklah suatu bidang dengan titik A(-2,-5),B(2,-5),C(2,-1) dan D(-2,-1)

```
>setPlotRange(-5,10,-5,10); // membuat bidang kartesius
>A=[-2,-5]; B=[2,-5]; C=[2,-1]; D=[-2,-1]; // menentukan titik
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); plotPoint(D,"D"); // menggambar titik
>plotSegment(A,B,"a",10); plotSegment(B,C,"b",10); plotSegment(C,D,"c"); plotSegment(D,A,"d")
```

Latihan 4

---

Gambarlah objek geometri segitiga dengan 3 titik yaitu A (1,0), B(0,1) dan C (2,2)!

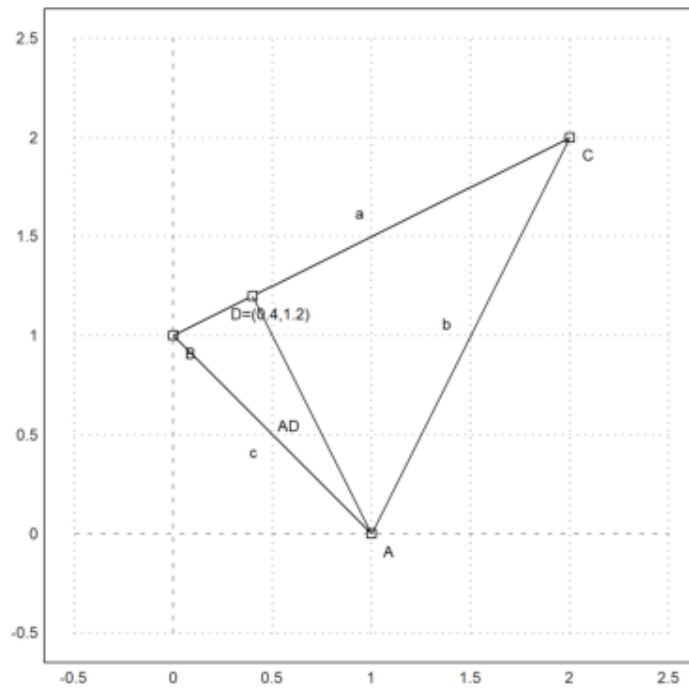
```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

[-1, 2, 2]

```

>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()

```



```

>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut

```

[0.86038, 0.86038]

## Menggambar Lingkaran

Lingkaran adalah tempat kedudukan/himpunan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Jarak yang sama disebut panjang jari-jari linngkaran dan titik tertentu disebut pusat lingkaran.

### Latihan 1

```

>setPlotRange(20);
>P=[5,5]; r=[14];
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran"); // gambar lingkaran

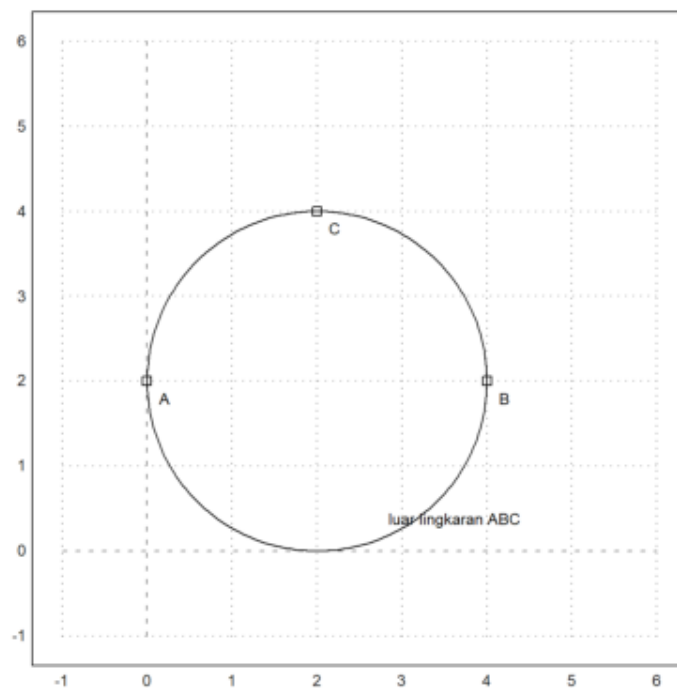
```

## Latihan 2

---

Buatlah lingkaran yang melalui tiga titik yaitu titik A (0,2), B(4,2) dan C(2,4)!

```
>setPlotRange(-1,6,-1,6); // menentukan rentang x dan y pada bidang koordinat
>A=[0,2]; plotPoint(A,"A");
>B=[4,2]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,4]; plotPoint(C,"C");
>c=circleThrough(A,B,C); // luar lingkaran ABC
>o=getCircleCenter(c); // menentukan titik pusat lingkaran
>plotCircle(c, "luar lingkaran ABC"):
```

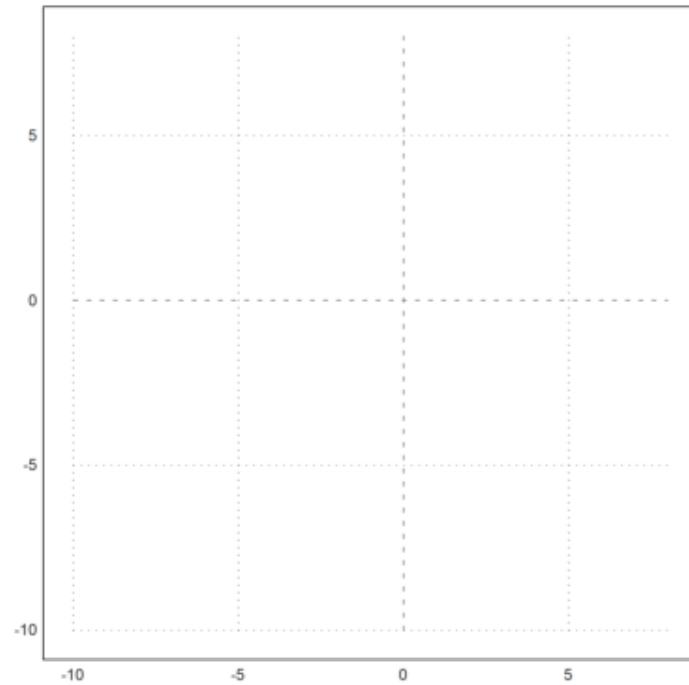


## Latihan 3

---

Gambarlah lingkaran yang melalui titik A (0,2), B (-2,-1), C (0,3) dan tentukan titik pusatnya!

```
>setPlotRange(-10,8,-10,8):
```



Langkah pertama yaitu menentukan batas tiap sumbu bidang koordinatnya

```
>A = [0,2]; B = [-2,-1]; C = [0,3];
```

Langkah kedua menentukan titiknya

```
>plotPoint(A, "A"); plotPoint(B, "B"); plotPoint(C, "C")
```

Langkah ketiga yaitu menggambar ketiga titiknya

```
>c = circleThrough(A,B,C);
```

Langkah keempat merupakan fungsi lingkaran pada titik A,B dan C

```
>P = getCircleCenter(c);
```

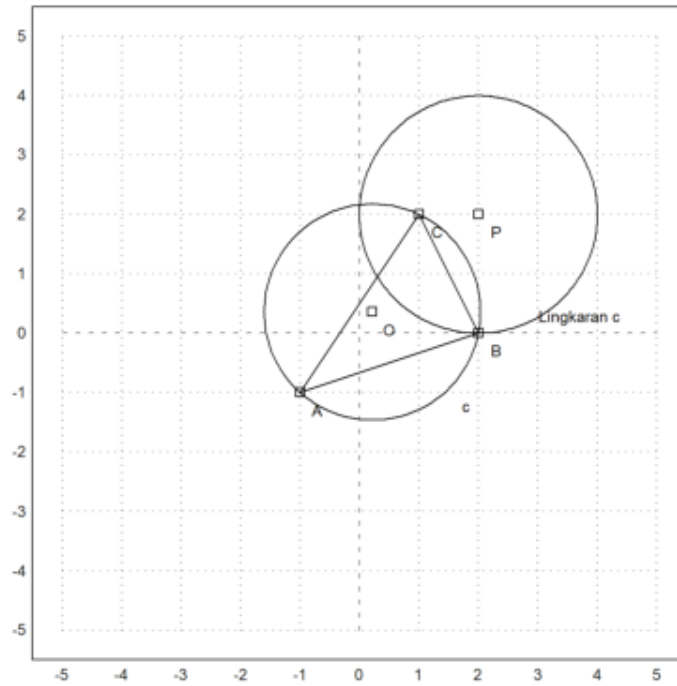
Langkah kelima adalah menentukan titik pusat lingkarannya, caranya dengan fungsi getCircleCenter(A,B,C)

```
>plotPoint(P, "P");
```

Langkah keenam yaitu menggambar titik pusatnya



```
>plotCircle(c, "Lingkaran c"):
```



Langkah terakhir yaitu memanggil lingkaran dan memberi label "lingkaran c"

Latihan 4

---

```
>setPlotRange(-5, 5, -5, 5);
```

Membuat bidang kartesiusnya

```
>A=[0,2]; plotPoint(A, "A"); //mendefinisikan titik dan gambarnya  
>B=[4,2]; plotPoint(B, "B");  
>C=[2,4]; plotPoint(C, "C");  
>c=circleThrough(A,B,C); //lingkaran melalui 3 titik  
>o=getCircleCenter(c); // menentukan pusat lingkaran c  
>plotCircle(c) //Menggambar lingkaran c dengan label nama "c"  
>o
```

[2, 2]

Latihan 5

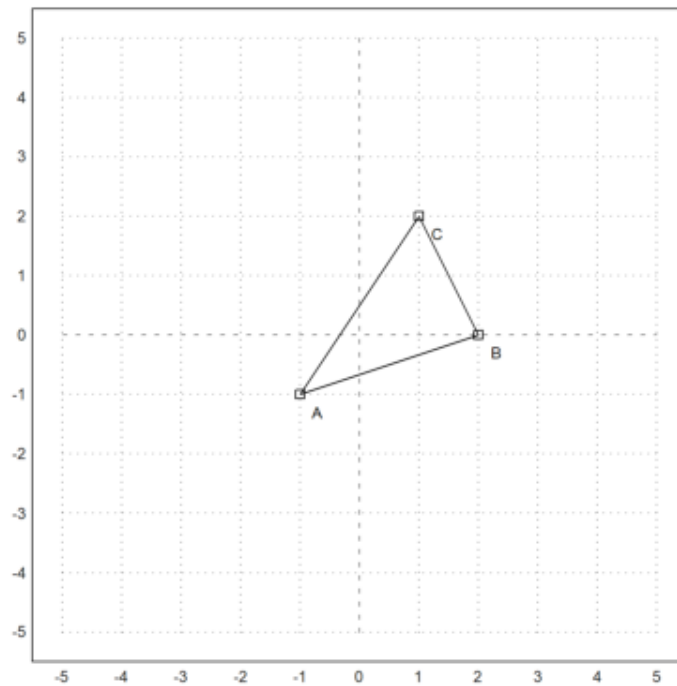
---

Gambarlah lingkaran jika diketahui 3 titik yang membentuk segitiga

```
>setPlotRange(5)
```

```
[-5, 5, -5, 5]
```

```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];  
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");  
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```



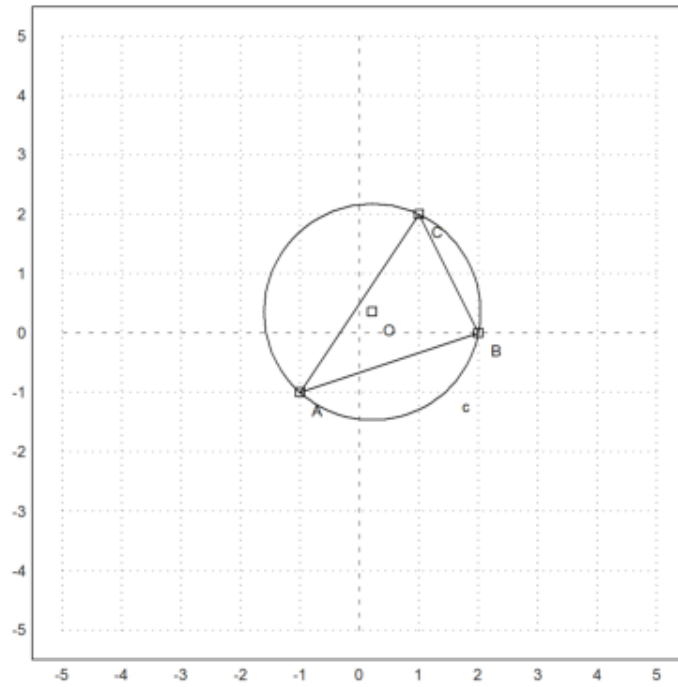
```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$\left(-\frac{3}{14} + x\right)^2 + \left(-\frac{5}{14} + y\right)^2 = \frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14}, \frac{5}{14}\right]$$

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



Jadi persamaan lingkaran yang melalui  $(-2,-2)$ ,  $(-2,2)$ ,  $(2,2)$  adalah:

$$x^2 + y^2 - 8 = 0$$

atau

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 8$$