Teoría – Tema 9

Teoría - 4 - Relación entre derivada de una función y crecimiento

La derivada es una medida del crecimiento

Conocemos la definición formal de derivada:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

En el límite, encontramos un cociente. El numerador es una diferencia de valores de la imagen. El denominador es una diferencia de valores de la variable independiente. Este valor h tiende a 0, pero por definición es una cantidad siempre positiva porque $x+h$ es siempre mayor que x .

Por lo tanto, si el numerador es positivo, todo el cociente será positivo. Y si el denominador es negativo, todo el cociente será negativo.

¿Qué significa numerador positivo? Significa que el valor $f(x+h)$ es mayor que $f(x)$. Y esto provoca una función que crece estrictamente en el intervalo $[x,x+h]$.

¿Qué significa numerador negativo? Significa que el valor $f(x+h)$ es menor que $f(x)$. Y esto provoca una función que decrece estrictamente en el intervalo $[x,x+h]$.

Consecuencia: si la función es estrictamente creciente, la derivada es positiva. Y si la función es estrictamente decreciente, la derivada es negativa.

Si la función es constante (gráfica horizontal) la derivada es nula, al no ser ni estrictamente creciente ni estrictamente decreciente.

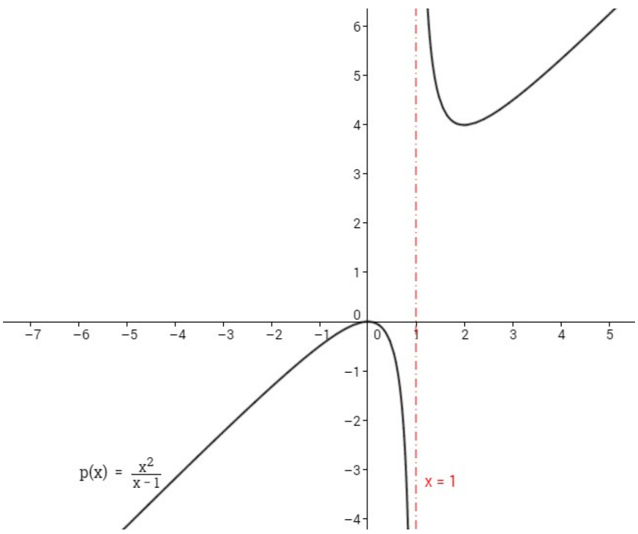
Ejemplo 1 resuelto

La gráfica de la función $p(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ muestra claramente una curva estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty,0)$ y estrictamente decreciente en el intervalor $(0,1)$.

Comprueba numéricamente que la derivada de la función es positiva en cualquier valor que tomemos en el intervalo $(-\infty,0)$ y que es negativa en cualquier valor del intervalo $(0,1)$.

$$p'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2(1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

Efectivamente, se cumple:



$x=-2 \rightarrow \rightarrow p'(-2)=\frac{(-2)^2-2(-2)}{(-2-1)^2}=\frac{8}{9}>0$ → derivada positiva → función estric. creciente

$x=-1 \rightarrow \rightarrow p'(-1)=\frac{(-1)^2-2(-1)}{(-1-1)^2}=\frac{3}{4}>0$ → derivada positiva → función estric. creciente

$x=0.5 \rightarrow \rightarrow p'(0.5)=\frac{(0.5)^2-2(0.5)}{(0.5-1)^2}=-3<0$ → derivada negativa → función estric. decreciente