4 Berechnen von inversen Matrizen

Didaktische Hinweise

Mit der folgenden Station werden verschiedene Aufgabenformate zum Berechnen von Inversen Matrizen vorgestellt. Durch den Wegfall des Graphischen Taschenrechners müssen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, Matrizen von Hand zu invertieren. Das aufwändige und fehleranfällige Rechenverfahren wird aber aller Voraussicht nach in Prüfungen auf einfache Fälle oder auf Teilschritte beschränkt sein.

Die vorgestellten Beispiele sind nur ein paar mögliche Variationen des Themas und erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Ebenso wenig ist es möglich, Aussagen über künftige Prüfungsaufgaben zu machen.

Im Lehrplan steht allerdings in Bezug auf die Rechenoperationen mit Matrizen der ausdrückliche Hinweis: „Im Mittelpunkt stehen Modellierungsprozesse und nicht aufwändige Berechnungen."

Mit den folgenden Beispielen wird nicht nur die Kompetenz, das Berechnungsverfahren zu beherrschen, sondern auch die Kompetenzen zu beschreiben, zu erklären und zu argumentieren gefördert.

Ziele

Die Schülerinnen und Schüler …

… wenden das Verfahren zur Invertierung auf einfache Matrizen an.

… können die Schritte zur Invertierung von Matrizen nachvollziehen und erklären.

… erkennen die Reihenfolge der Rechenschritte zum Invertieren einer Matrix.

… berechnen einzelne Elemente einer inversen Matrix

… bestimmen Elemente der inversen Matrix durch Ausmultiplizieren

… überprüfen, ob zwei Matrizen zueinander invers sind.

…

Übersicht der Materialien

- 2 Dominos (Rechnung und Kommentar)
- Aufgabenblatt: Kommentierte Berechnungen „vorwärts" und „rückwärts" mit Lösungen
- Aufgabenblatt: Pfad-Finden

Aufgabe 1: „Rückwärts"-Aufgabe mit inversen Matrizen

Ergänzen Sie Kommentare zu folgenden Lösungswegen:

a) Gegeben sind die Matrix $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&a\\3&b&6\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-12&c&8\\3&0{,}5&-2\end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie a, b und c, sodass $A\cdot B = E$.

Kommentare	Lösungsweg
	$(c_{ij}) = A\cdot B$
	$c_{21} = -24 + 3a = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = 8$
	$c_{31} = 24 - 12b = 0 \quad\Leftrightarrow\quad b = 2$
	$c_{12} = c + 1{,}5 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad c = -1{,}5$
	$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&8\\3&2&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&-1\\-12&-1{,}5&8\\3&0{,}5&-2\end{pmatrix}$
	$=\begin{pmatrix}4-12+9&0-1{,}5+1{,}5&-2+8-6\\0-24+24&0-3+4&0+16-16\\6-24+18&0-3+3&-3+16-12\end{pmatrix}$
	$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) Gegeben ist die Matrix $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&a\\3&0&6\end{pmatrix}$

Für welche Werte von a ist A invertierbar?

	$\left(\begin{array}{ccc\|ccc}2&1&3&1&0&0\\0&2&a&0&1&0\\3&0&6&0&0&1\end{array}\right)\leftrightarrow$
	$\left(\begin{array}{ccc\|ccc}2&1&3&1&0&0\\0&2&a&0&1&0\\0&-3&3&-3&0&2\end{array}\right)\leftrightarrow$
	$\left(\begin{array}{ccc\|ccc}2&1&3&1&0&0\\0&2&a&0&1&0\\0&0&3a+6&-6&3&4\end{array}\right)\leftrightarrow$
	$3a + 6 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = -2$ Für a = −2 ist A nicht invertierbar.

Aufgabe 2: „Vorwärts"-Aufgabe mit inversen Matrizen
Lösen Sie die Aufgaben entsprechend der Kommentare.

a) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Wie viele Lösungen hat die Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$?
Geben Sie im Falle der Lösbarkeit eine Lösung an.

Hinweise:

- Auf beiden Seiten der Gleichung $\vec{x}$ subtrahieren.
- $\vec{x}$ ausklammern und dabei auf die Reihenfolge achten!
- Die Matrix berechnen, die beim Ausklammern in der Klammer entstanden ist.
- Anhand der besonderen Form der Matrix (oder anhand des Gauß-Verfahrens) begründen, dass es unendlich viele Lösungen gibt.
- Eine (oder sämtliche) Lösung(en) bestimmen.

b) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Wie viele Lösungen hat die Gleichung $A \cdot X = X$?
Welche Dimension kann X haben?
Geben Sie im Falle der Lösbarkeit eine Lösung an.

Hinweise:

- Aus dem Ergebnis von a) schließen und begründen, dass die Gleichung unendlich viele Lösungen hat.
- Die Dimension von X muss so sein, dass das Produkt $A \cdot X$ gebildet werden kann.
- Jede Spalte von X ist einer der unendlich vielen Lösungen von der Gleichung aus a).
- Sie machen die Probe mit Ihrem Lösungsvorschlag.

Lösungsvorschlag zur „Rückwärts"-Aufgabe mit inversen Matrizen

Ergänzen Sie Kommentare zu folgenden Lösungswegen:

a) Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & b & 6 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -12 & c & 8 \\ 3 & 0{,}5 & -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie a, b und c, sodass $A \cdot B = E$.

Kommentare	Lösungsweg
Die Elemente der Matrix $A \cdot B$ werden c_{ij} genannt.	$(c_{ij}) = A \cdot B$
Das Element c_{21}, berechnen, in E ist $c_{21} = 0$, diese Gleichung nach a auflösen.	$c_{21} = -24 + 3a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 8$
Ebenso c_{31} und c_{12} berechnen und die Lösungen von b und c berechnen.	$c_{31} = 24 - 12b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2$ $c_{12} = c + 1{,}5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -1{,}5$
Die Lösungen von a, b und c in A und B einsetzen. $A \cdot B$ berechnen	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -12 & -1{,}5 & 8 \\ 3 & 0{,}5 & -2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 4-12+9 & 0-1{,}5+1{,}5 & -2+8-6 \\ 0-24+24 & 0-3+4 & 0+16-16 \\ 6-24+18 & 0-3+3 & -3+16-12 \end{pmatrix}$
Bestätigen, dass $A \cdot B = E$.	$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Für welche Werte von a ist A invertierbar?

Die Matrix A mit der Einheitsmatrix erweitern.	$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow$
Gauß Verfahren: -3*Zeile 1 + Zeile 3 → Zeile 3	$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow$
3*Zeile 2 + 2*Zeile 3 → Zeile 3	$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3a+6 & -6 & 3 & 4 \end{array}\right) \leftrightarrow$
Die Matrix links hat Dreiecksform Die Bedingung für die vollständige Nullzeile links aufstellen. Die Lösung der Bedingung aus der Menge der möglichen Zahlen für a ausschließen.	$3a + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2$ Für $a \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ ist A invertierbar.

Lösungsvorschlag zur „Vorwärts"-Aufgabe mit inversen Matrizen

Lösen Sie die Aufgaben entsprechend der Kommentare.

c) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$.

Wie viele Lösungen hat die Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$?
Geben Sie im Falle der Lösbarkeit eine Lösung an.

Hinweise:	
• Auf beiden Seiten der Gleichung $\vec{x}$ subtrahieren.	$A \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{o}$
• $\vec{x}$ ausklammern und dabei auf die Reihenfolge achten!	$(A \cdot - E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$
• Die Matrix berechnen, die beim Ausklammern in der Klammer entstanden ist.	$A - E = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,4 \\ 0,8 & -0,4 \end{pmatrix}$
• Anhand der besonderen Form der Matrix (oder anhand des Gauß-Verfahrens) begründen, dass es unendlich viele Lösungen gibt.	Die Zeilen der Matrix stimmen bis auf das Vorzeichen überein, die Summe der beiden Zeilen ist eine vollständige Nullzeile. Deshalb hat die Gleichung $(A \cdot - E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$ unendlich viele Lösungen.
• Eine (oder sämtliche) Lösung(en) bestimmen.	$\left(\begin{array}{cc\|c} -0,8 & 0,4 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 0,5\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \end{array}\right)$ $\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$.

Wie viele Lösungen hat die Gleichung $A \cdot X = X$?
Welche Dimension kann X haben?
Geben Sie im Falle der Lösbarkeit eine Lösung an.

Hinweise:	
• Aus dem Ergebnis von a) schließen und begründen, dass die Gleichung unendlich viele Lösungen hat.	Wie in a) gilt $A \cdot X = X \Leftrightarrow (A \cdot - E) \cdot X = O$ Für einen beliebigen Spaltenvektor $\vec{x}$ von X gilt wegen a) $\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gibt also unendlich viele Lösungen für X
• Die Dimension von X muss so sein, dass das Produkt $A \cdot X$ gebildet werden kann.	X hat 2 Zeilen und beliebig viele Spalten.
• Jede Spalte von X ist einer der unendlich vielen Lösungen von der Gleichung aus a).	$X \cdot = \begin{pmatrix} 0,5\alpha_1 & 0,5\alpha_2 & \ldots & 0,5\alpha_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \end{pmatrix}$ Beispiel: $X \cdot = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0,5 \\ 2 & -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$
• Sie machen die Probe mit Ihrem Lösungsvorschlag.	$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0,5 \\ 2 & -4 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0,5 \\ 2 & -4 & 6 & 1 \end{pmatrix} = X$

Aufgabe 3: „Lücken"-Aufgabe mit inversen Matrizen

Ergänzen Sie in folgenden Berechnungen die fehlenden Werte.

a) Gegeben ist die Matrix $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&-2&-1\\4&3&1\end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix A^{-1}.

<u>Berechnung</u> | <u>Kommentar</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&1&1&0&0\\0&-2&-1&\dots&\dots&\dots\\4&3&1&\dots&\dots&\dots\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&1&1&0&0\\0&-2&-1&\dots&\dots&\dots\\0&-3&-1&\dots&\dots&\dots\end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&1&1&0&0\\0&-2&-1&\dots&\dots&\dots\\0&0&1&\dots&\dots&\dots\end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&0&\dots&\dots&\dots\\0&-2&0&\dots&\dots&\dots\\0&0&1&-4&-3&2\end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&0&0&\dots&\dots&\dots\\0&-2&0&\dots&\dots&\dots\\0&0&1&-4&-3&2\end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\dots&\dots&\dots\\0&1&0&\dots&\dots&\dots\\0&0&1&-4&-3&2\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-0{,}5&\dots&\dots\\\dots&1&\dots\\\dots&\dots&2\end{pmatrix}$$

b) Gegeben ist die Matrix $B=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&4&-1\\4&9&-2\end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix B^{-1}.

<u>Berechnung</u> | <u>Kommentar</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-1&1&0&0\\2&4&-1&0&1&0\\4&9&-2&0&0&1\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-1&1&0&0\\\dots&\dots&\dots&-2&1&0\\\dots&\dots&\dots&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-1&1&0&0\\\dots&\dots&\dots&-2&1&0\\\dots&\dots&\dots&-4&0&1\end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-1&1&0&0\\\dots&\dots&\dots&-4&0&1\\\dots&\dots&\dots&-2&1&0\end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-1&1&0&0\\\dots&\dots&\dots&-4&0&1\\\dots&\dots&\dots&-2&-3&2\end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-1&1&0&0\\\dots&\dots&\dots&0&6&-3\\\dots&\dots&\dots&-2&-3&2\end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & -1 & -3 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & -1 & -3 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & -1 & -3 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \dots & \dots \\ \dots & -2 & \dots \\ \dots & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3: „Lücken"-Aufgabe mit inversen Matrizen

Ergänzen Sie in folgenden Berechnungen die fehlenden Werte.

a) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix A^{-1}.

<u>Berechnung</u> / <u>Kommentar</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A wird mit der Einheitsmatrix erweitert.
−2*Z1 + Z3 → Z3

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

3*Z2 + 2*Z3 → Z3

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Z3 + Z2 → Z2
und −1*Z3 + Z1 → Z1

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

3*Z2 + 2*Z1 → Z1

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

¼*Z1 → Z1
und – ½*Z2 → Z2

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Erweiterungsmatrix (rechts) ist A^{-1}

---

b) Gegeben ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix B^{-1}.

<u>Berechnung</u> / <u>Kommentar</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

B wird mit der Einheitsmatrix erweitert.
−2*Z1 + Z2 → Z2

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

−4*Z1 + Z3 → Z3

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Z2 und Z3 vertauschen

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

2*Z2 – 3*Z3 → Z3

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

−2*Z3 + Z2 → Z2

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Z3 + Z1 → Z1

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Z2 + Z1 → Z1

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$-\frac{1}{3}$ *Z2

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Erweiterungsmatrix (rechts) ist B^{-1}

Aufgabe 4: Argumentieren

A und *B* sind zwei beliebige invertierbare $2{\times}2$-Matrizen.

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Begründen Sie!

	richtig	falsch
Die Summe $A + B$ ist immer invertierbar.		
Das skalare Produkt $c{\cdot}A$ ist immer invertierbar.		
Die transponierte Matrix A^{T} ist immer invertierbar.		
Das Produkt $A{\cdot}B$ ist immer invertierbar		

b) Zeigen Sie am Beispiel der beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$:

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

c) Schreiben Sie zu folgendem Beweis einen Kommentar:

<u>Behauptung</u>

Für zwei invertierbare Matrizen *A* und *B* gilt
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

<u>Voraussetzung</u>

A und *B* sind invertierbar.
A, A^{-1}, B und B^{-1} sind nicht die Nullmatrix.

<u>Beweis</u>

$(A \cdot B){\cdot}(A \cdot B)^{-1} = E$

$\Leftrightarrow \quad A^{-1}{\cdot}(A \cdot B){\cdot}(A \cdot B)^{-1} = A^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad (A^{-1}{\cdot}A){\cdot}B{\cdot}(A \cdot B)^{-1} = A^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad B{\cdot}(A \cdot B)^{-1} = A^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad B^{-1}{\cdot}(B{\cdot}(A \cdot B)^{-1}) = B^{-1}A^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad (B^{-1}{\cdot}B){\cdot}(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

<u>Kommentar</u>

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4: Argumentieren

A und *B* sind zwei beliebige invertierbare 2×2-Matrizen.

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Begründen Sie!

	richtig	falsch
Die Summe $A + B$ ist immer invertierbar. z.B. für $B = -A$ ist $A + B = O$, nicht invertierbar.		X
Das skalare Produkt $c \cdot A$ ist immer invertierbar. Die inverse Matrix ist $\frac{1}{c} \cdot A^{-1}$, weil $(c \cdot A) \cdot (\frac{1}{c} \cdot A^{-1}) = c \cdot \frac{1}{c} \cdot A \cdot A^{-1} = E$.	X	
Die transponierte Matrix A^T ist immer invertierbar. Es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, weil $(A^{-1} \cdot A)^T = E^T = E$ (*) und andererseits $(A^{-1} \cdot A)^T = A^T \cdot (A^{-1})^T$ (**) Aus (*) und (**) folgt: $A^T \cdot (A^{-1})^T = E$, *also* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$	X	
Das Produkt $A \cdot B$ ist immer invertierbar Es gilt $(A \cdot B)^{-1} = (B^{-1}) \cdot (A^{-1})$, weil $(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = E \quad \Rightarrow \quad B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\Rightarrow \quad B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B \cdot (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\Rightarrow \quad (B^{-1} \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\Rightarrow \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$	X	

b) Zeigen Sie am Beispiel der beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$:

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 14 & -11 & 1 & 0 \\ 9 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & -11 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 14 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & -98 & 154 \\ 0 & 1 & -9 & 14 \end{array}\right) \quad (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 11 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 11 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$$

c) Schreiben Sie zu folgendem Beweis einen Kommentar:

<u>Behauptung</u>	<u>Kommentar</u>
Für zwei invertierbare Matrizen *A* und *B* gilt $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.	
<u>Voraussetzung</u>	
A und *B* sind invertierbar. A, A^{-1}, B und B^{-1} sind nicht die Nullmatrix.	notwendige Voraussetzung, um multiplizieren zu können.
$A^{-1} \cdot A = E$, $B^{-1} \cdot B = E$ und $(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = E$	Definitionen der Inversen
<u>Beweis</u>	
$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = E$	laut Definition
$\Leftrightarrow \quad A^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = A^{-1}$	von links mit A^{-1} multiplizieren

$\Leftrightarrow \quad (A^{-1} \cdot A) \cdot B \cdot (A \cdot B)^{-1} = A^{-1}$	Assoziativgesetz anwenden
$\Leftrightarrow \quad B \cdot (A \cdot B)^{-1} = A^{-1}$	da $A^{-1} \cdot A = E$
$\Leftrightarrow \quad B^{-1} \cdot (B \cdot (A \cdot B)^{-1}) = B^{-1}A^{-1}$	von links mit B^{-1} multiplizieren
$\Leftrightarrow \quad (B^{-1} \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	Assoziativgesetz anwenden
$\Leftrightarrow \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	da $B^{-1} \cdot B = E$