

Ba-Wü: BG
Neuer Lehrplan Mathematik
Modul-5: Prozesse
Teil 3b: zyklische
Übergangsprozesse

Stoffverteilungsplan 1

Woche	Inhalte
1 + 2	Einstufige Prozesse Darstellung mit Tabellen, Graph, Matrizen u. Vektoren Rechnen mit Matrizen und Vektoren
3 + 4	Umkehrung eines Prozesses Lineare Gleichungssysteme, inverse Matrix einfache Matrizengleichungen
5	Übungen
6 + 7	Zweistufige Prozesse Verflechtungsdiagramm, Verflechtungsmatrizen Bedarfs-, Kosten-, Gewinnermittlung
8 + 9	Übungen, Klassenarbeit
10	Austauschprozesse, stochastische Matrizen Verteilungsvektor, Übergangsmatrix und -graph, Matrixpotenzen
11	Stabilitätsvektor, Grenzmatrix Absorbierender Zustand
12 + 13	Übungen
14 + 15	Entwicklungsprozesse, zyklische Matrizen Populationsentwicklungen
16 - 18	Übungen, Klassenarbeit

neu

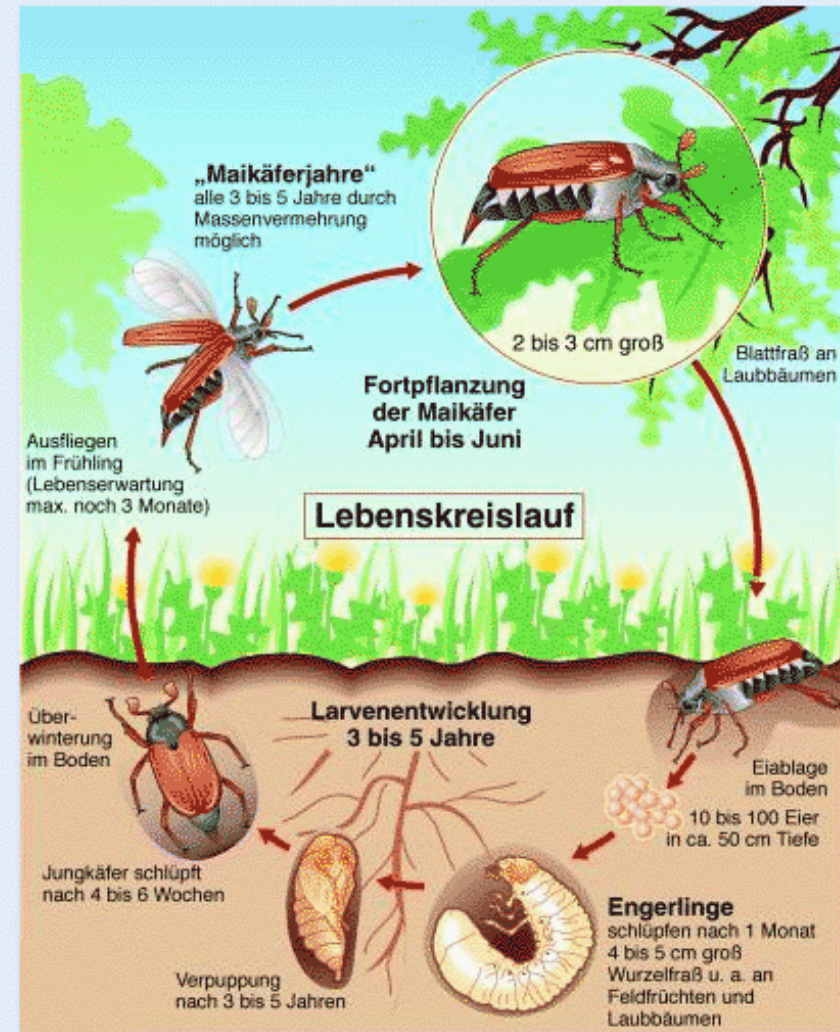
Maikäfer entwickeln sich über einen Zeitraum von mehreren Jahren.

Aus den im Boden abgelegten Eiern schlüpfen nach einigen Wochen Engerlinge, die sich im zweiten Jahr verpuppen.

Ende April des folgenden Jahres schlüpfen die Käfer, die wieder Eier legen und danach sterben.

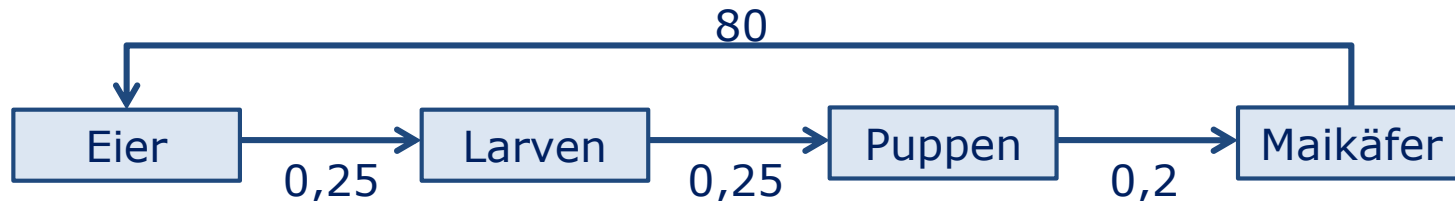
Man kann beobachten, dass alle drei bis vier Jahre besonders viele Käfer fliegen.

Maikäfer flieg



Annahme

Ein Maikäferweibchen legt 80 Eier, von denen sich $\frac{1}{4}$ zu Larven entwickelt. $\frac{1}{4}$ der Larven verpuppt sich, und aus etwa 20% der Puppen schlüpfen schließlich Maikäfer.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

keine Umverteilung
keine stochastische Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangsverteilung $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 640 \\ 240 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix}$
Eier
Larven
Puppen
Maikäfer

$$\vec{v}_1 = M \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 640 \\ 240 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 160 \\ 60 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aus den 640 Eier werden 160 Larven

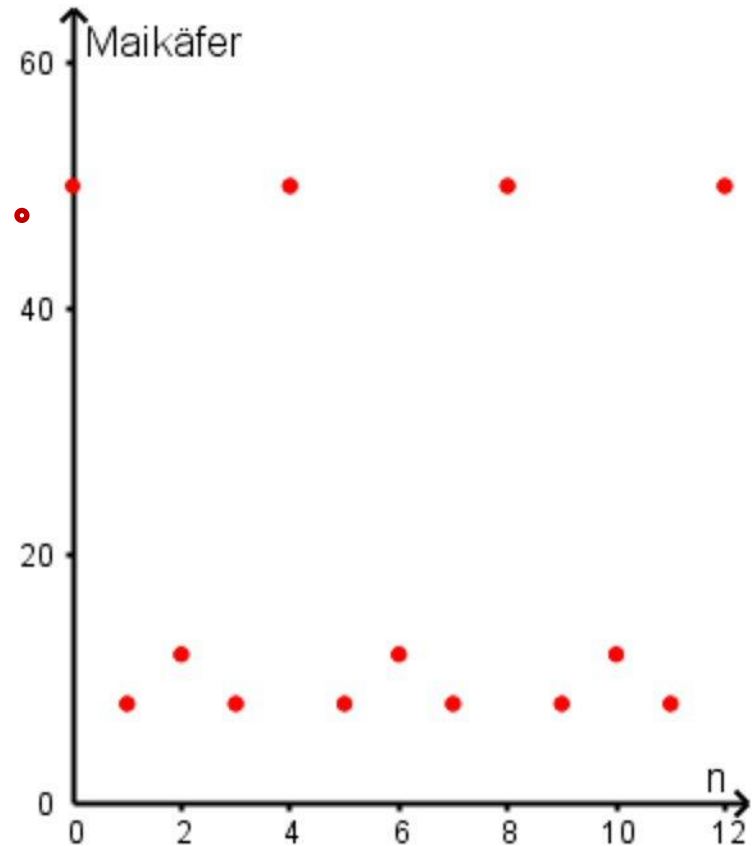
$$\vec{v}_2 = M \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 640 \\ 1000 \\ 40 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = M \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 960 \\ 160 \\ 250 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 = M \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 640 \\ 240 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Nach vier Jahren stellt sich wieder der Anfangszustand ein.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Zyklische
Wiederholung



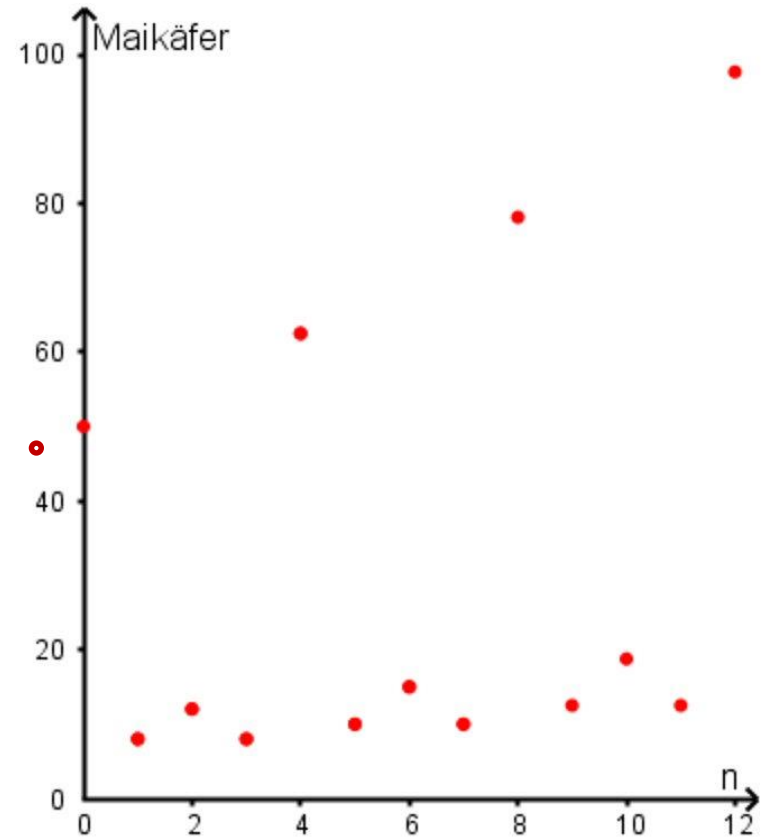
Annahme

Ein Maikäferweibchen legt **100** Eier, von denen sich $\frac{1}{4}$ zu Larven entwickelt. $\frac{1}{4}$ der Larven verpuppt sich, und aus etwa 20% der Puppen schlüpfen schließlich Maikäfer.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$M^4 = \begin{pmatrix} 1,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,25 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} E$$

Zyklisches
Wachstum



Annahme

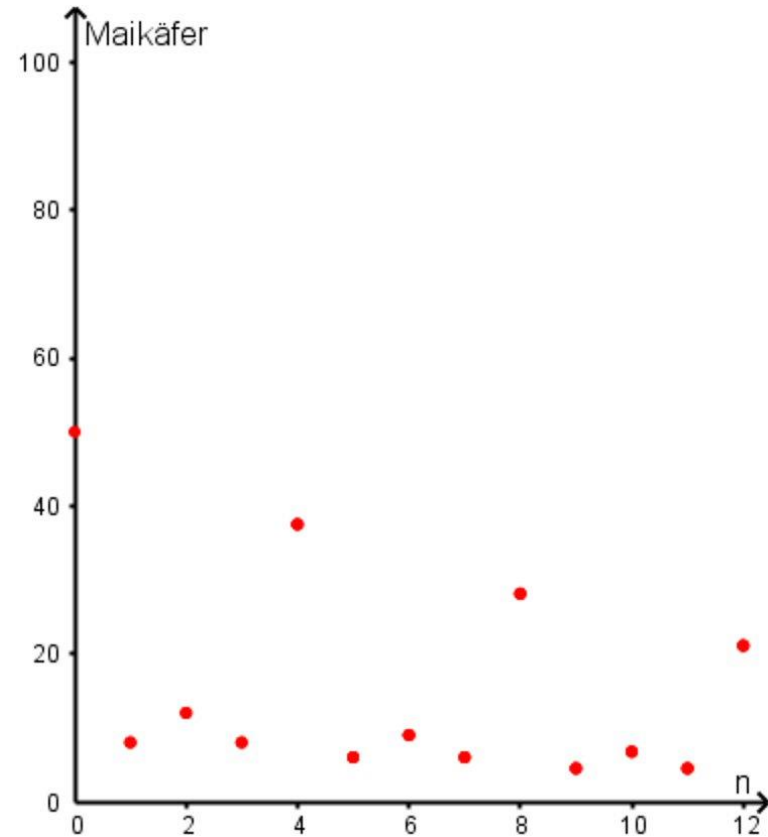
Ein Maikäferweibchen legt nur **60** Eier, von denen sich $\frac{1}{4}$ zu Larven entwickelt. $\frac{1}{4}$ der Larven verpuppt sich, und aus etwa 20% der Puppen schlüpfen schließlich Maikäfer.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,75 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} E$$

Zyklische
Abnahme



allgemein

- Eine Übergangsmatrix M mit der Eigenschaft $M^k = E$ für eine natürliche Zahl k heißt zyklisch.
- Für eine Übergangsmatrix der Form

$$M_{4,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$$

gilt immer $M^4 = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot E$

- Eine Population, deren Entwicklung durch eine solche Übergangsmatrix beschrieben wird, ...
 - ... nimmt (zyklisch) ab, wenn $a \cdot b \cdot c \cdot d < 1$
 - ... entwickelt sich zyklisch, wenn $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$
 - ... nimmt (zyklisch) zu, wenn $a \cdot b \cdot c \cdot d > 1$