PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

Denominamos, parámetros característicos a ciertos valores destacables de espacio de probabilidad, y que en ocasiones suelen ser esperanzas de ciertas funciones. Los parámetros característicos los podemos clasificar:

1. **De posición o promedio**.- Cuando hacen referencia a la concentración de los datos de la distribución.
2. **De dispersión**.- Cuando hacen referencia a la dispersión de datos, respecto a una medida de promedio.
3. **De concentración**.- Que sirven para el estudio de la razón entre diferentes magnitudes, y que se aplica en fenómenos particularmente económicos (*índice de Gini*).
4. **De asimetría o deformación**.- Que hacen referencia al a simetría de la función de probabilidad.
5. **De apuntamiento, curtosis o concentración central**.- Que hace referencia a lo puntiagudo de la función de probabilidad.

En particular, en el caso de una variable discreta:

$$X = \{ x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \}$$

podemos destacar algunos parámetros característicos si existen, como:

MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN O DE POSICIÓN.

MOMENTO DE ORDEN $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_k = E\left\{ X^k \right\} = \sum_{i=1}^{n\ldots} x_i^k . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n\ldots} x_i^k . p_i$$

MOMENTO ABSOLUTO DE ORDEN $k \in \mathbb{N}$

$$|\alpha|_k = E\left\{ |X|^k \right\} = \sum_{i=1}^{n\ldots} |x_i|^k . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n\ldots} |x_i|^k . p_i$$

MEDIA

$$\alpha = \alpha_1 = E\{ X \} = \sum_{i=1}^{n\ldots} x_i . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n\ldots} x_i . p_i$$

MEDIA GEOMÉTRICA

$$e^{E\{LOG(X)\}} = e^{\sum_{i=1}^{n...} LOG(x_i).P_X(X=x_i)} = \prod_{i=1}^{n...} (x_i)^{P_X(X=x_i)}$$

MEDIA ARMÓNICA

$$\left(E\{X\}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(E\{X\}\right)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n...} x_i^k .p_i}$$

MODA

$M_d = x_d \in (x_1,...,x_k)$ TAL QUE: $\text{Max}_{i\in\{1,2,....,k\}} P(X = x_i) = P(X = x_d)$

CUANTILES

$$p_{\frac{r}{c}} = x_{c(r)} \in (x_1,...,x_k):\ \left(1-\sum_{i=1}^{x_{c(r)}} p_i\right) \le \frac{r}{c} \le \sum_{i=1}^{x_{c(r)}} p_i;\ \text{Donde},\ 0 < r < c,\ \text{con}\ r,c \in \mathbb{N}$$

$$\text{Si } c = \begin{cases} 99 \text{ se denomina CENTILES} \\ 10 \text{ se denominan DECILES} \\ 4 \text{ se denominan CUARTILES} \\ 2 \text{ se denomina MEDIANA} \end{cases}$$

<u>MEDIDAS DE DISPERSIÓN.</u>

MOMENTOS RESPECTO DE LA MEDIA DE ORDEN $k \in \mathbb{N}$

$$\mu_k = E\left\{(X-\alpha)^k\right\} = \sum_{i=1}^{n...} (x_i-\alpha)^k .P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n...} (x_i-\alpha)^k .p_i$$

MOMENTOS ABSOLUTOS RESPECTO DE LA MEDIA DE ORDEN $k \in \mathbb{N}$

$$|\mu|_k = E\left\{|X-\alpha|^k\right\} = \sum_{i=1}^{n...} |x-\alpha|^k .P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n...} |x-\alpha|^k .p_i$$

VARIANZA

$$Var(X) = \mu_2 = E\left\{(X-\alpha)^2\right\} = \sum_{i=1}^{n...} (x_i-\alpha)^2 .p_i$$

DESVIACIÓN TÍPICA

$$\sigma(X) = \sqrt{E\left\{(X-\alpha)^2\right\}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n...} (x_i-\alpha)^2 .P(X = x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n...} (x_i-\alpha)^2 .p_i}$$

CUASIVARIANZA

$$S^2 = \frac{n...}{n-1}.VAR(X)$$

CUASI DESVIACIÓN TÍPICA

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{n...}{n...-1}.VAR(X)} = \sqrt{\frac{n...}{n...-1}.\sigma(X)}$$

DESVIACIÓNABSOLUTA RESPECTO DE LA MEDIA ARITMÉTICA

$$D_\alpha = E\{|x-\alpha|\} = \sum_{i=1}^{n...} |x-\alpha|.P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n...} |x-\alpha|.p_i$$

DESVIACIÓN RESPECTO DE LA MEDIANA

$$D_{M_e} = E\{|x-M_e|\} = \sum_{i=1}^{n...} |x-M_e|.P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n...} |x-M_e|.p_i$$

RECORRIDO

$$R = x_{(n...)} - x_{(1)}; \quad x_{(1)} = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \quad x_{(n)} = Max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\};$$

RECORRIDO RELATIVO

$$R_\alpha = \frac{R}{\alpha} = \frac{x_{(n...)} - x_{(1)}}{\alpha}$$

RECORRIDO INTERCUARTÍLICO

$$R_I = C_3 - C_1; \quad C_1 = p_{1/4} = \text{Primer cuartil}, \quad C_3 = p_{3/4} = \text{Tercer cuartil},$$

RECORRIDO SEMINTERCUARTÍLICO

$$R_{SI} = \frac{C_3 - C_1}{C_3 + C_1}$$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN DE PEARSON

$$C.V. = \frac{\sigma(X)}{\alpha}$$

INDICE DE DISPERSIÓN RESPECTO DE LA MEDIANA

$$I.D.M_e = \frac{D_{M_e}}{M_e}$$

MEDIDAS DE ASIMETRÍA Y APUNTAMIENTO.

COFICIENTE DE ASIMETRÍA DE PEARSON

$$A.P. = \frac{(\alpha - M_d)}{\sigma(X)} \begin{cases} \text{Si } A.P. < 0 \text{ es asimetrica por la izquierda} \\ \text{Si } A.P. = 0 \text{ es simetrica} \\ \text{Si } A.P. > 0 \text{ es asimetrica por la derecha} \end{cases}$$

COFICIENTE DE ASIMETRÍA DE FHISER

$$A.F. = \frac{\mu_3}{(\sigma(X))^3} = \frac{E\left\{(x-\alpha)^3\right\}}{(VAR(X))^{\frac{3}{2}}} \begin{cases} \text{Si } A.F. < 0 \text{ es asimetrica por la izquierda} \\ \text{Si } A.F. = 0 \text{ es simetrica} \\ \text{Si } A.F. > 0 \text{ es asimetrica por la derecha} \end{cases}$$

COFICIENTE DE ASIMETRÍA DE CURTOSIS

$$A.C. = A.F. = \frac{\mu_4}{(\sigma(X))^4} - 3 = \frac{E\left\{(x-\alpha)^4\right\}}{(VAR(X))^2} - 3 \begin{cases} \text{Si } A.C. < 0 \text{ es PLATICURTICA} \\ \text{Si } A.C. = 0 \text{ es MESOCURTICA} \\ \text{Si } A.C. > 0 \text{ es LEPTOCURTICA} \end{cases}$$

COFICIENTE DE ASIMETRÍA DE BOWLEY

$$C.A_B = \frac{C_3 + C_1 - 2.M_e}{C_3 - C_1}$$

COFICIENTE ABSOLUTO DE ASIMETRÍA

$$C.A_a = \frac{C_3 + C_1 - 2.M_e}{s}$$

OTRAS MEDIDAS.

FUNCIÓN GENERATRIZ

$$G(s) = E\left\{s^X\right\} = \sum_{i=1}^{n...} s^{x_i}.P\left(X = x_i\right) = \sum_{i=1}^{n...} s^{x_i}.p_i; \quad s \in \mathbb{R}$$

MOMENTO FACTORIAL DE ORDEN $s \in \mathbb{R}$

$$\alpha_{[r]} = \frac{d^r G(1)}{ds^r} = \left.\frac{d^r \sum_{i=1}^{n...} s^{x_i}.P(X = x_i)}{ds^r}\right|_{s=1} = \left.\frac{d^r \sum_{i=1}^{n...} s^{x_i}.p_i}{ds^r}\right|_{s=1};$$

FUNCIÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS

$$M(\theta) = E\left\{e^{\theta.X}\right\} = \sum_{i=1}^{n...} e^{\theta.x_i}.P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n...} e^{\theta.x_i}.p_i; \quad \theta \in \mathbb{R}$$

FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

$$\phi(t) = E\left\{e^{X.t.\hat{\imath}}\right\} = \sum_{i=1}^{n...} e^{x_i.t.\hat{\imath}}.P\left(X = x_i\right) = \sum_{i=1}^{n...} e^{x_i.t.\hat{\imath}}.p_i; \quad t \in \mathbb{R}$$

☞ *La función característica es muy útil para conocer propiedades de la distribución.*

☞ *Por supuesto si el espacio muestral X es infinito numerable, para que un determinado parámetro exista es necesario que la serie correspondiente sea convergente y que las operaciones estén bien definidas.*

☞ *Habitualmente, cuando efectuamos un experimento aleatorio sobre una variable aleatoria X, y obtenemos un conjunto finito de valores x, solemos denotar los momentos muéstrales centrales y de dispersión por* a_k *y* b_k *respectivamente, y a los momentos teóricos* α_k *y* μ_k *respectivamente.*

☞ *La* ***formula Konïg*** *es útil para calcular la varianza, y viene dada por*

$$\sigma^2 = Var(X) = \alpha_2 - \alpha^2$$

 # Demostración:

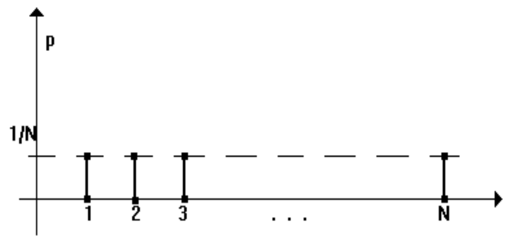
$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n...}\left(x_i^2 - 2\alpha .x_i + \alpha^2\right).p_i = \sum_{i=1}^{n...} x_i^2.p_i - 2\alpha .\sum_{i=1}^{n...} x_i + \alpha^2 = \alpha_2 - 2\alpha^2 + \alpha^2 = \alpha_2 - \alpha^2$$

La media, representa una estimación de la centralización de los valores de la variable aleatoria, mientras que la varianza y la dispersión son estimaciones de la anchura de la región en la que se concentran esos valores.

Ejemplo.- Supongamos que la variable aleatoria toma los valores posibles 1,2,...,N. cuyas probabilidades son equiprobables ("modelo uniforme sobre N puntos“) es decir:

p_n = 1/N para cualquier n = 0 1,2, .. , N.

La media y la varianza serán:



$$\alpha = E(x) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}.n = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n = \frac{(N+1)}{2}$$

$$Var(x) = \mu = E(x^2) - \alpha^2 = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}.n^2 - \left(\frac{(N+1).N}{N^2.2}\right)^2 =$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1)}{N.6} - \frac{(N+1)^2.N^2}{N^2.4} = \frac{N^2-1}{12}$$