POZNÁMKY K HUDEBNÍ AKUSTICE

Karisák GVP - 4 leté

KKK

Žán Pól Kastról

2. ledna 2024

Obsah

Kapitola 1

TÓN

1.1 Dělení zvuků

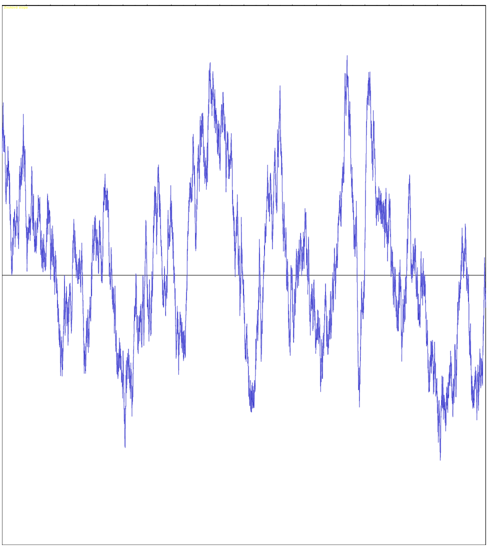
http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/186-zakladni-deleni-zvuku

1. **Hluky** (šumy, praskání, skřípání, ...) – grafem závislosti intenzity (hlasitosti) na čase **není periodická funkce** (viz obr. 1.1) (patří sem *samohlásky*)

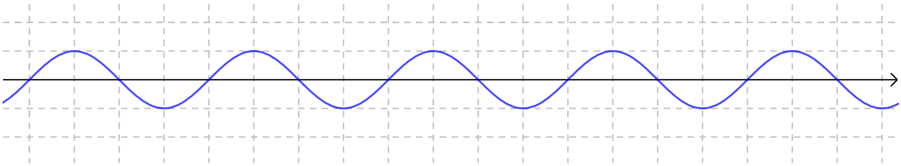
2. **Tóny** (hudební zvuky) – grafem závislosti intenzity (hlasitosti) zvuku na čase **je periodická funkce**

   (a) **Tóny jednoduché** – mají *harmonický* průběh, tj. grafem závislosti intenzity (hlasitosti) zvuku na čase je funkce *sinus*. viz https://ggbm.at/mfgtcpsu

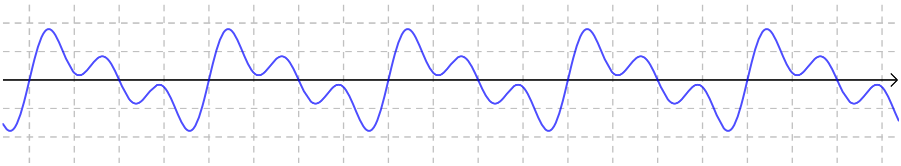
   (b) **Tóny složené** – jejich průběh je *periodický*, ale už se *nejedná o sinusoidu.*



Obrázek 1.1: Hluk



Obrázek 1.2: Jednoduchý tón



Obrázek 1.3: Složený tón

1.2 Jednoduchý a složený tón

Jednoduchý tón. Je fyzikálně tvořen *jedinou sinusouidou* o určité frekvenci. Například ladička kmitající s frekvencí $f = 440\,\mathrm{Hz}$ vytváří jednoduchý tón. Také některé flétny prý produkují jednoduché tóny.

Jednoduchý tón si můžeme snadno vyrobit sami pomocí PC nebo mobilu. (http://www.szynalski.com/tone-generator/) Jednoduchý tón nemá žádnou barvu a zní ploše.

Složený tón (patří sem *souhlásky*) Většina hudebních nástrojů však vydává tóny, které jsou složené z *více sinusoid* různých frekvencí. Nejnižší z nich udává **výšku tónu** a mívá největší amplitudu. Ostatní frekvence mají amplitudy menší a vytvářejí **barvu tónu**.

Také složené tóny si můžeme vyprodukovat snadno i bez hudebního nástroje na PC či v mobilu. (https://meettechniek.info/additional/additive-synthesis.html)

Nejlépe lze podstatu vzniku složeného tónu vysvětlit na struně.

Kapitola 2

VÝŠKA TÓNU

2.1 Frekvence (podnět p) a výška tónu (vjem v)

Pokus 1: Výška tónu

Vezměme nějaký frekvenční generátor[a] a poslechněme si, jak zní několik frekvencí. Popišme, co vnímá naše ucho!

[a] Třeba tento: http://www.szynalski.com/tone-generator/

Závěr 1: Ucho vnímá jednotlivé tóny v různé **výšce**
Závěr 2: Čím **větší je frekvence tónu** f, tím **větší je výška tónu** v, kterou vnímá naše ucho.

Člověku se zdá, jako kdyby tón o frekvenci f_1 seděl na jistém stupni žebříku, tón f_2 na **vyšším** stupni a tón f_3 na ještě **vyšším** stupni atd. Náš pomyslný **žebřík** se skládá ze **stupňů**, na které stoupám, když po něm lezu nahoru, takže bych mu mohl říkat „stupnice“. V hudbě se pojem **stupnice**[1] vskutku používá pro tóny s rostoucí **výškou**, a tedy s rostoucí **frekvencí**.

Definice 1: Výška tónu

Výška tónu v (anglicky *pitch*) je *subjektivní* vlastnost tónů, která umožňuje jejich uspořádání do řady podle *objektivních* frekvencí f.
Mají-li dva tóny různou frekvenci, potom tón s vyšší frekvencí má vyšší výšku.

$$\boxed{f_1 > f_2 \Rightarrow v_1 > v_2} \tag{2.1}$$

[1] italsky *scala* = stupnice, žebřík, měřítko. Odtud české *měřítko* = škála.

Vztah 2.1 znamená, že závislost v na f je funkce *rostoucí* (o jakou funkci se jedná, to zjistíme v další kapitole). Každá rostoucí posloupnost je ale *prostá*, takže platí:

$$f_1 = f_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \tag{2.2}$$

Samozřejmě platí i obrácená implikace, jinak by nešlo o funkci, takže platí ekvivalence:

Věta 1: Rovnost frekvencí a výšek

Dvěma stejným frekvencím odpovídají stejné výšky a naopak.

$$\boxed{f_1 = f_2 \Leftrightarrow v_1 = v_2} \tag{2.3}$$

Máme tedy dvě veličiny: **výšku** v a **frekvenci** f. Výška tónu **je dána frekvencí** (vztahy 2.1, 2.3), ale **není s ní ekvivalentní**.

Je potřeba si uvědomit, že frekvence je **objektivní** fyzikální veličina (**podnět**), kdežto výška tónu je **subjektivní** veličina (**vjem**). Zatímco frekvenci lze objektivně měřit fyzikálním přístrojem, výška je subjektivní vnímání zvukového vlnění konkrétní osobou, které přímo měřit možné není. To však neznamená, že se většina lidí neshodne, jaký tón je vyšší nebo nižší.

Frekvence má jakožto fyzikální veličina **jednotku** (Hertz), kdežto výška tónu jakožto subjektivní veličina **jednotku nemá** – vyjasníme později.

Výška tónu je tedy pojem spadající do oblasti **psychoakustiky**[2], která je podoborem **psychofyziky**[3].

[2] *Psychoakustika* je vědní odbor, který se zabývá výzkumem vnímání zvuku. Přesněji studiem a výzkumem fyziologických a psychologických reakcí na zvukové podněty, jako je řeč a hudba. Psychoakustika je jedním z podoborů psychofyziky.

[3] *Psychofyzika* je exaktní věda o funkčních vztazích mezi tělem a duší se snahou vystihnout fyzikálními zákony psychické děje. Zaměřuje se na zkoumání počitků,

2.2 Závislost *výšky* tónu na *frekvenci*

Víme, že roste-li frekvence, roste i výška. Nyní nás bude zajímat, jaká je přesně **závislost výšky** v **(vjemu) na frekvenci** f **(podnětu)**.

2.2.1 Fechner poprvé útočí!

Hypotéza 1:

Nejjednodušší, co nás napadne je, že je to závislost **lineární**.

Zkusíme tuto hypotézu prozkoumat a ověřit pokusem. Víme, že nejnižší frekvence, kterou lidské ucho může vnímat, je přibližně 16 Hz. Této hodnotě bychom měli tedy přiřadit nulovou výšku ($v(16) = 0$). Potom by závislost v na f měla vypadat nějak tak, jak je to na obrázku 2.1 – tedy grafem by měla být přímka.

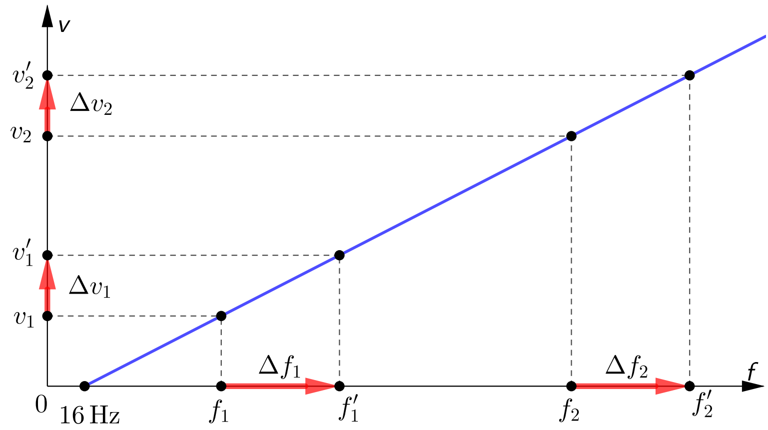
Důsledek by byl tento: pokud bychom vzali dvě frekvence $f_1 < f_2$, odpovídaly by jim výšky $v_1 < v_2$. Když bychom frekvence zvětšili o stejné hodnoty $\Delta f_1 = \Delta f_2$, musely by se kvůli linearitě zvetšit i výšky o stejné hodnoty $\Delta v_1 = \Delta v_2$ (obr. 2.1). Naše hypotéza je tedy tato:

Hypotéza 1: Linearita

Zvýšíme-li **frekvence** *o stejnou hodnotu*, zvýší se i **výšky** *o stejnou hodnotu* a naopak?

$$\Delta f_1 = \Delta f_2 \overset{???}{\Longleftrightarrow} \Delta v_1 = \Delta v_2$$

které jsou v jejím chápání charakterizovány obsahem, intenzitou a dobou trvání. Ústředním tématem psychofyziky je problém mysli a těla. Představitelem tohoto směru byl Gustav Fechner, který se zaměřoval na zkoumání vztahu mezi psychickým a fyzickým světem. Velký význam pro toto vědecké bádání má jeho kniha Základy psychofyziky. Zásluhou psychofyziky pronikaly do psychologie přesnější laboratorní metody. Termín psychofyzika zavedl lékař a psycholog Ernst Heinrich Weber.(Zdroj: https://cs.wikipedia.org/wiki/Psychofyzika)



Obrázek 2.1: Závisí v na f lineárně?

Vidíme, jde o vztah obdobný vztahu 2.3. Hypotézu snadno ověříme následujícím pokusem, kdy vezmeme frekvence $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}, f_2 = 1000\,\mathrm{Hz}$ a $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 10\,\mathrm{Hz}$.

Pokus 2: Prozkoumání hypotézy 1

https://youtu.be/nzZ8kSsLin0

Slyšeli jsme, že výškový odstup mezi tóny s frekvencemi 1000 Hz a 1010 Hz vnímáme jako **mnohem menší** než mezi frekvencemi 100 Hz a 110 Hz! No to je skandál! Naše hypotéza se nepotvrdila a **ucho tedy nevnímá výšky lineárně**.
Frekvenci $f_2 = 1000\,\mathrm{Hz}$ nestačí tedy zvýšit o stejnou hodnotu jako f_1 (tedy o 10 Hz) – musíme ji zvýšit víc!

Hypotéza 2:

Tak co nás napadne teď? Předtím jsme nechali obě frekvence přirůst o stejnou hodnotu 10 Hz. Co kdybychom je nechali přirůst o **stejná procenta**? Přírůstek první frekvence byl 10 Hz, což je 10% ze 100 Hz, takže přírůstek druhé frekvence by musel být 10% z 1000 Hz, což je 100 Hz.

Obecně tedy chceme

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} \cdot 100\% = \frac{\Delta f_2}{f_2} \cdot 100\%$$

To je ale totéž jako

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{\Delta f_2}{f_2}$$

Čiliž požadujeme rovnost **relativních přírůstků** (to je něco jako relativní chyba).

Naše hypotéza tedy je:

Hypotéza 2: Procenta

Zvýšíme-li **frekvence** *o stejnou procentuální hodnotu*, zvýší se i **výšky** *o stejnou hodnotu* a naopak?

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{\Delta f_2}{f_2} \overset{???}{\iff} \Delta v_1 = \Delta v_2$$

Hypotézu ověříme následujícím pokusem, kdy vezmeme frekvence $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 1000\,\mathrm{Hz}$ a $\Delta f_1 = 10\,\mathrm{Hz}$, $\Delta f_2 = 100\,\mathrm{Hz}$.

Pokus 3: Prozkoumání hypotézy 2

https://youtu.be/13VTUmu9ksE

Hurá! Hypotéza se potvrdila.

Věta 2: Fechnerův zákon pro vnímání výšky zvuku – (Formulace 1)

Zvýšíme-li **frekvence** *o stejnou procentuální hodnotu*, zvýší se i **výšky** *o stejnou hodnotu* a naopak.
Neboli:
Stejným *relativním přírůstkům* **frekvencí** odpovídají i stejné *absolutní přírůstky* **výšek**.

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{\Delta f_2}{f_2} \Leftrightarrow \Delta v_1 = \Delta v_2 \tag{2.4}$$

2.2.2 Fechner útočí podruhé!

Stejně jako $f \neq v$ [4], tak také $\frac{\Delta f}{f} \neq \Delta v$! Jaký je vztah mezi $\frac{\Delta f}{f}$ a Δv uvidíme později [5].

No a teďkonc vztah 2.4 ještě trochu upravíme. Pač dle obr. 2.1 platí:

$$\Delta f_1 = f_1' - f_1 \qquad \text{a} \qquad \Delta f_2 = f_2' - f_2$$

dostáváme

[4] Později odvodíme $v = k \cdot \ln \frac{f}{f_0}$

[5] Později odvodíme $\Delta v = k \cdot \frac{\Delta f}{f}$

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{\Delta f_2}{f_2}$$
$$\frac{f_1' - f_1}{f_1} = \frac{f_2' - f_2}{f_2}$$
$$\frac{f_1'}{f_1} - 1 = \frac{f_2'}{f_2} - 1$$
$$\frac{f_1'}{f_1} = \frac{f_2'}{f_2}$$

A teď bacha! Přijde **krůšl-point**, jak se říká u nás v Černých Voděradech. Zavedeme nový pojem, který je zcela zásadní - **hudební interval**.

Akoráth tu zasejc budeme mít tu *dualitu fyzikální podnět – subjektivní vjem*.

Esiževá slyšíme dva různě vysoké tóny o **výškách** $v' > v$ a o **frekvencích** $f' > f$, potom

- subjektivně vnímáme, že je mezi nimi nějaký **výškový odstup**, který je **vyjádřen subjektivní veličinou** Δv:

$$\Delta v = v - v'$$

- Objektivně je dle 2.5 tento výškový odstup dán **objektivním poměrem frekvencí**

$$\frac{f'}{f}$$

Neznamená to, že $\frac{f'}{f} = \Delta v$! Jaký je vztah mezi $\frac{f'}{f}$ a Δv odvodíme už za chvilku [6]. Teďkonc se akorát pojďme dohodnout, že

[6] $\Delta v = k \cdot \ln \frac{f'}{f}$ resp. $\Delta v = \log_2 \frac{f'}{f}$

začneme používat pojem **interval mezi dvěma tóny** a budeme tím myslet jednak **subjektivně** vnímaný odstup mezi výškami obou tónů a dvojak **objektivní** poměr fyzikálních frekvencí těchto dvou tónů.

Definice 2: Hudební interval

- **Subjektivně:** Interval mezi dvěma tóny o výškách $v' > v$ je vnímaná vzdálenost mezi výškami těchto tónů: $\Delta v = v' - v$.
- **Objektivně:** Interval mezi dvěma tóny o frekvencích $f' > f$ je poměr jejich frekvencí: $\frac{f'}{f}$

Pročež můžeme výše vyslovenou větu 2.2.1 formulovat dalším způsobem, ty vé!

Věta 3: Fechnerův zákon pro vnímání výšky zvuku – (Formulace 2)

Dva subjektivně vnímané hudební **intervaly jsou stejné**, právě když jsou stejné **poměry** jim odpovídajících frekvencí.

$$\frac{f_1'}{f_1} = \frac{f_2'}{f_2} \Leftrightarrow \Delta v_1 = \Delta v_2 \tag{2.5}$$

Příklad 1

Jsou dány dva tóny o frekvencích $f_1 = 250\,\mathrm{Hz}$ a $f_2 = 375\,\mathrm{Hz}$. Jaký je mezi těmito tóny interval?

Víme, že interval není dán rozdílem, ale podílem frekvencí.

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{375}{250} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Mezi tóny je interval[a] $\frac{3}{2}$.

[a]**Poznámka**: Nyní jsme určili interval **objektivně** jako poměr frekvencí. Později uvidíme, že je možné ho určit i **subjektivně** (tak, jak ho vnímá naše ucho) jako $\Delta v = \log_2 \frac{3}{2} \doteq 0,58$.

Příklad 2

Vezměmež tóny z předcházejícího příkladu a k nim ještě třetí tón s frekvencí $f_3 = 1200\,\mathrm{Hz}$. Jakou frekvenci f_4 musí mít čtvrtý tón, který tvoří s třetím tónem stejný interval jako první dva tóny, jestliže čtvrtý tón je

a) vyšší než třetí
b) nižší než třetí

Víme, že první interval je $\frac{3}{2}$.

a) Musíme třetí frekvenci zvýšit – tedy vynásobit číslem $\frac{3}{2}$. Odtud $f_4 = 1200 \cdot \frac{3}{2} = 1800\,\mathrm{Hz}$.

   https://youtu.be/nuW-_HUQYFg

b) Musíme třetí frekvenci snížit – tedy vydělit číslem $\frac{3}{2}$ čili vynásobit číslem $\frac{2}{3}$. Odtud $f_4 = 1200 \cdot \frac{2}{3} = 800\,\mathrm{Hz}$.

   https://youtu.be/Th4iLB05vaA

2.2.3 Fechner útočí potřetí!

Pojďme vzít nyní 3 tóny s výškami $v_1 < v_2 < v_3$ takové, že jsou mezi nimi stejné výškové odstupy $\Delta v_1 = \Delta v_2$ (intervaly), tedy výšky v_1, v_2, v_3 tvoří **aritmetickou posloupnost**. Jakou posloupnost tvoří frekvence $f_1 < f_2 < f_3$ těchto tónů?

Pač oba intervaly jsou shodné, musí platit

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = q$$

Pročež frekvence f_1, f_2, f_3 tvoří geometrickou posloupnost s fvocíkem q! Odtud dostáváme další formulaci FZ:

Věta 4: Fechnerův zákon pro vnímání výšky zvuku – (Formulace 3)

Rostou-li **frekvence** tónů posloupností **geometrickou**, roste jejich **výška** jen posloupností **aritmetickou**!

Oprava grafu

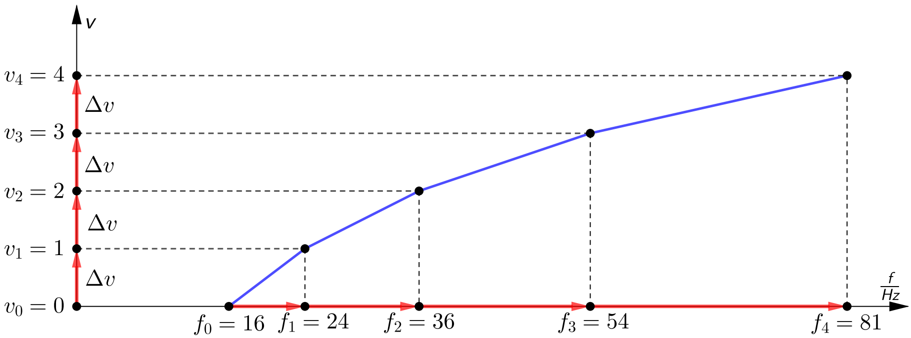
Nyní si můžeme trochu poopravit graf z obrázku 2.1, kde jsme si ještě bláhově mysleli, že je závislost v na f lineární. Vylepšený graf je na obrázku 2.2. Vezmeme opět frekvenci $f_0 = 16\,\mathrm{Hz}$ jako nejnižší slyšitelnou a jí přiřadíme výšku $v = 0$. Vytvoříme geometrickou posloupnost frekvencí s prvním členem f_0 a *kvocíkem* například $q = \frac{3}{2}$. Dostáváme tedy hodnoty frekvencí $16, 24, 36, 54, 81, \ldots$

Přírůstkům frekvencí přiřadíme jistý konstantní přírůstek výšky Δv. Jeho hodnotu si můžeme **zvolit** podle libosti. Výška i její přírůstky jsou totiž veličiny **subjektivní** a závisejí tedy na tom, jak je dané ucho **citlivé** na jejich změny. Citlivý člověk bude pociťovat interval mezi 16 Hz a 24 Hz jako výrazný, necita jako malý!

Zvolíme-li náš konstantní přírůstek výšky jako **jednotkový**, dostáváme hodnoty výšek $1, 2, 3, 4, \ldots$

Body grafu jsme spojili provizorně úsečkami – za chvíli se dostaneme k tomu, jakou křivku jimi máme správně proložit (asi už to zhruba tušíme).

V tomto příkladu jsme si zvolili *kvocík* $q = \frac{3}{2}$. Jinými slovy **interval**



Obrázek 2.2: Frekvence tvoří **GP** $\Rightarrow$ výšky tvoří **AP**

mezi jednotlivými tóny je $\frac{3}{2}$. V hudbě je to velice důležitý interval – **kvinta** (název vysvitne později).

Ještě si zkusíme, jak to reálně zvučí:

Pokus 4: Kvintové skoky

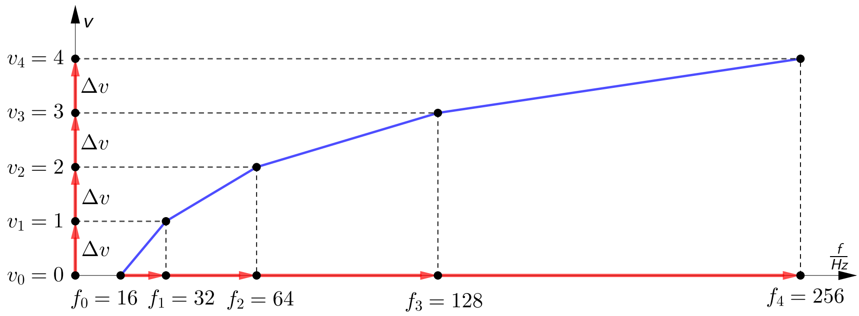
Nízké frekvence 16 Hz, 24 Hz, 36 Hz jsou strašně slabé, začínáme až od 54 Hz ($54 - 81 - 121,5 - 182,25$):
https://youtu.be/KLXGknm4Zas

Ale ještě důležitější hudební interval je **oktáva** – je to interval s *kvocíkem* $q = 2$. Pojďme si na to udělat příklad:

Příklad 3: Oktáva se nesměle představuje

Vytvoř podobný graf jako v obr. 2.2 pro **oktávové** intervaly, tedy pro *kvocík* $q = 2$.

Posloupnost frekvencí bude $16, 32, 64, 128, 256, \ldots$ Nyní přiřadíme hodnotu výšky $v_1 = 1$ frekvenci $f_1 = 32$ Hz. Dostáváme graf:



A jak to zvučí:

Pokus 5: Oktávové skoky

Nízké frekvence 16 Hz, 32 Hz jsou strašně slabé, začínáme až od 64 Hz (64 – 128 – 256 – 512 – 1024):
https://youtu.be/4786S0CjEKc

2.2.4 Fechner útočí počtvrté (a naposled)!

Vztah mezi GP a logaritmy

Nyní se konečně podíváme na to, co je to přesně za matematickou funkci, která charakterizuje závislost mezi výškou tónu v a jeho frekvencí f.

Podíváme-li se na výše uvedené grafy posloupností kvint a oktáv, jistě nás už napadlo, že grafy připomínají graf logaritmické funkce. Naznačuje to i fakt, že **geometrická** posloupnost frekvencí je touto funkcí převedena na **aritmetickou** posloupnost výšek. Toto vskutku dělá logaritmická funkce.

V tabulce 2.1 jsou v prvním řádku mocniny čísla $\frac{3}{2}$, čiliž geometrická posloupnost s *kvocíkem* $q = \frac{3}{2}$. Ve druhém řádku jsou **logaritmy** těchto čísel (logaritmy o základu $\frac{3}{2}$). Víme přece, že platí

x	$\left(\frac{3}{2}\right)^0$	$\left(\frac{3}{2}\right)^1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4$
y	0	1	2	3	4

Tabulka 2.1: **GP**; $q = \frac{3}{2}$.

x	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
y	0	1	2	3	4

Tabulka 2.2: **GP**; $q = 2$.

$$\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 0; \quad \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^1 = 1; \quad \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2; \quad \dots$$

Obdobně v tabulce 2.2 jsou v prvním řádku mocniny čísla 2, čiliž geometrická posloupnost s *kvocíkem* $q = 2$. Ve druhém řádku jsou **logaritmy** těchto čísel (logaritmy o základu 2). Víme přece, že platí

$$\log_2 2^0 = 0; \quad \log_2 2^1 = 1; \quad \log_2 2^2 = 2; \quad \dots$$

Nyní je již zřejmé, že budeme pro vyjádření posloupnosti kvint z obr.2.2 potřebovat logaritmickou funkci o základu $\frac{3}{2}$. Přitom budeme chtít, aby pro $f_0 = 16\,\mathrm{Hz}$ byla výška $v_0 = 0$. Takže použijeme funkci

$$\boxed{v = \log_{\frac{3}{2}} \frac{f}{16}} \tag{2.6}$$

Vskutku potom dostáváme pro $f_0 = 16\,\mathrm{Hz}$ hodnotu

$$v_0 = \log_{\frac{3}{2}} \frac{16}{16} = \log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$$

,

pro $f_1 = 16 \cdot \frac{3}{2} = 24\,\mathrm{Hz}$ dostáváme

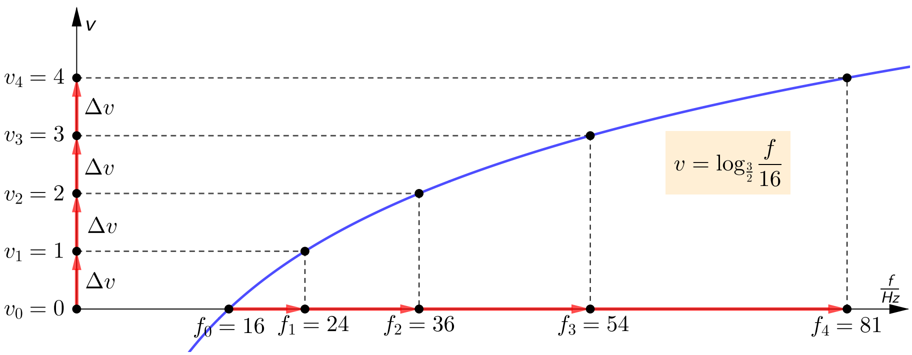
$$v_1 = \log_{\frac{3}{2}} \frac{16 \cdot \frac{3}{2}}{16} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} = 1$$

pro $f_2 = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 36\,\mathrm{Hz}$ dostáváme

$$v_2 = \log_{\frac{3}{2}} \frac{16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}{16} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2$$

,

a tak dále. Graf 2.2 tedy můžeme opravit tak, že úsečky nahradíme pěknou logaritmickou křivicí (viz obr.2.3).

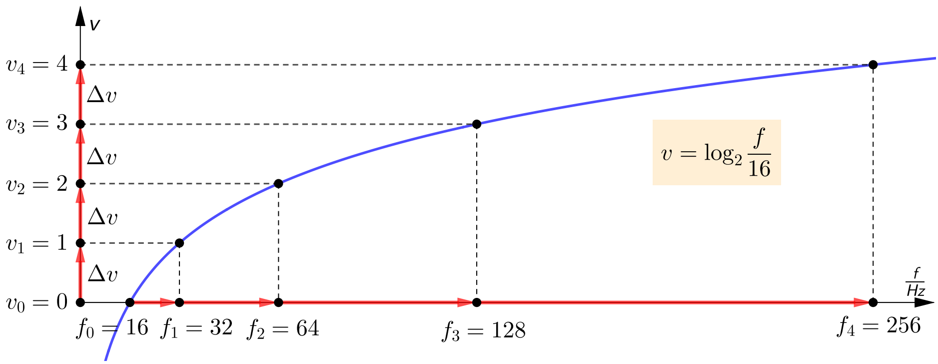


Obrázek 2.3: **GP** s *kvocíkem* $k = \frac{3}{2} \rightarrow$ **kvinty**

Analogicky použijeme pro posloupnost oktáv z příkladu 3 vztah

$$\boxed{v = \log_2 \frac{f}{16}} \tag{2.7}$$

a graf bude vypadat takto – viz obr. 2.4.



Obrázek 2.4: **GP** s *kvocíkem* $k = 2 \rightarrow$ **oktávy**

Změna f_0

Jako základní frekvenci jsme si zvolili v našich příkladech $f_0 = 16\,\mathrm{Hz}$. Když se nám však zlíbí, můžeme si základní frekvenci, které odpovídá nulová výška, zvolit jakoukoliv – třeba $f_0 = 50\,\mathrm{Hz}$.

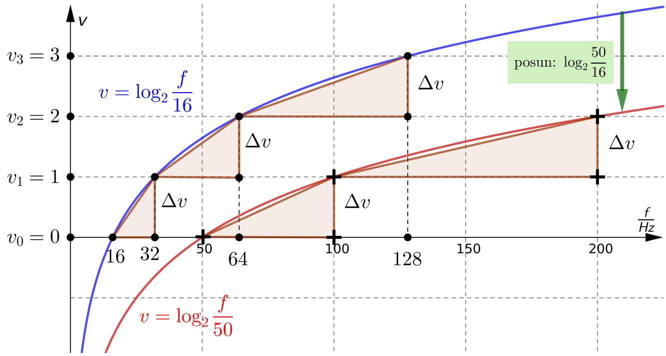
Místo vztahu $v = \log_2 \frac{f}{16}$ budeme mít vztah $v = \log_2 \frac{f}{50}$. Jak se změní náš graf? To vidíme na obr.2.5.

Graf se jen posune dolů ve směru svislé osy v, ale **tvarově se nezmění**. Přírůstky výšky Δv odpovídající posloupnosti frekvencí $50, 100, 200, \ldots$ budou úplně stejné jako pro posloupnost $16, 32, 64, \ldots$. O kolik se graf posune? Platí:

$$\log_2 \frac{f}{50} = \log_2 \frac{f}{k \cdot 16} \quad ; \quad k = \frac{50}{16}$$

$$\log_2 \frac{f}{k \cdot 16} = \log_2 \frac{\frac{f}{16}}{k} = \log_2 \frac{f}{16} - \log_2 k$$

Vidíme, že graf funkce $v = \log_2 \dfrac{f}{16}$ se posunul o $\log_2 \dfrac{50}{16}$.



Obrázek 2.5: f_0 si můžeme zvolit libovolně

Zobecnění

V hudbě je základním intervalem **oktáva** (proč – viz později). Proto použijeme jako základ logaritmu číslo 2. Základní frekvenci, jak víme si můžeme zvolit libovolně. Dostáváme:

Věta 5: Fechnerův zákon pro vnímání výšky zvuku – (Formulace 4)

Výška tónu v je logaritmickou funkcí frekvence f. (Ucho vnímá frekvence tónů **logaritmicky**.)

$$\boxed{v = \log_2 \frac{f}{f_0}} \tag{2.8}$$

kde f_0 je základní frekvence, které chceme přiřadit výšku $v_0 = 0$.

Odvození

Vzorec 2.8 jsme tak trochu uhádli. Pojďme ještě trochu detailněji ukázat, že tento vztah je ekvivalentní se vztahem 2.4 z Formulace 1.

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{\Delta f_2}{f_2} \Leftrightarrow \Delta v_1 = \Delta v_2$$

To znamená, že je-li $\frac{\Delta f}{f}$ konstantní, je i Δv konstantní. Neboli:

$$\frac{\Delta f}{f} = konst_1 \Rightarrow \Delta v = konst_2$$

Vydělením rovnic dostáváme $\frac{\Delta v}{\frac{\Delta f}{f}} = \frac{konst_1}{konst_2} = k$. Pač $konst_2$ je volitelná (Δv je subjektivní), je i konstanta k volitelná, což se nám bude za chvíli hodit. Dále dostáváme:

$$\boxed{\Delta v = k \cdot \frac{\Delta f}{f}} \tag{2.9}$$

- To znamená, že **absolutní přírůstek výšky** je *přímo úměrný* **relativnímu přírůstku frekvence**.

Vztah 2.9 můžeme upravit na tvar:

$$\boxed{\frac{\Delta v}{\Delta f} = \frac{k}{f}} \tag{2.10}$$

Respektive pro elementární přírůstky:

$$\boxed{\frac{dv}{df} = \frac{k}{f}} \tag{2.11}$$

- To znamená, že **rychlost růstu výšky** je *nepřímo úměrná* **frekvenci**.

Vezmeme vztah 2.11, zintegrujeme a dostáváme:

$$v = \int \frac{k}{f} df$$
$$v = k \ln f + C$$

Integrační konstantu C určíme snadno – pro $f = f_0$ (počáteční frekvence, kterou si mohu zvolit) je $v = 0$ (nulová výška):

$$0 = k \ln f_0 + C$$
$$C = -k \ln f_0$$
$$v = k \ln f - k \ln f_0$$
$$v = k(\ln f - \ln f_0)$$

Po úpravě dostáváme:

$$\boxed{v = k \cdot \ln \frac{f}{f_0}} \tag{2.12}$$

Zde máme přirozený logaritmus se základem e Jak z toho dostaneme náš základ 2 (který se nám hodí kvůli oktávám)? Konstanta k je, jak jsme vysvětlili výše, volitelná – tak si ji můžeme zvolit tak, aby nám to vyšlo:

$$k \cdot \ln \frac{f}{f_0} = \log_2 \frac{f}{f_0}$$
$$k \cdot \ln \frac{f}{f_0} = \frac{\ln \frac{f}{f_0}}{\ln 2}$$
$$k = \underline{\underline{\frac{1}{\ln 2}}}$$

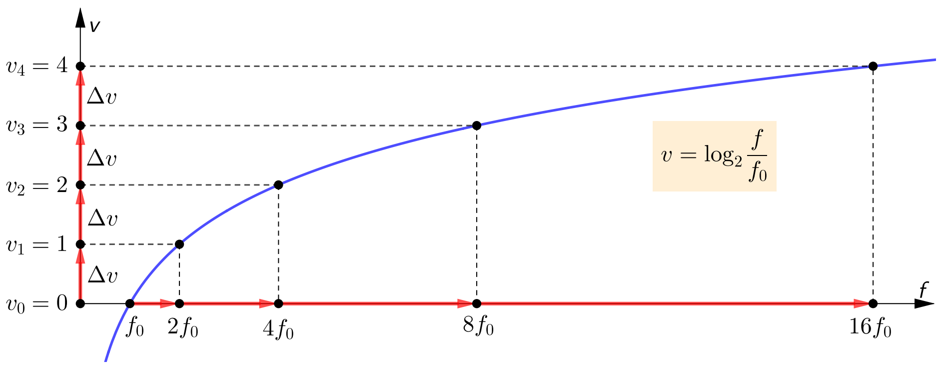
Takže zvolíme-li $k = \dfrac{1}{\ln 2}$ a dosadíme do 2.12, dostáváme:

$$v = \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln \frac{f}{f_0} = \frac{\ln \frac{f}{f_0}}{\ln 2} = \underline{\underline{\log_2 \frac{f}{f_0}}}$$

Což jsme chtěli odvodit.

Vztah 2.8 lze graficky vyjádřit dvěma způsoby. Buď jako závislost v na f (viz obr.2.6) nebo jako závislost v na $\frac{f}{f_0}$ (viz obr.2.7). V druhém případě nevynášíme na vodorovnou osu přímo frekvence tónů, ale poměr těchto frekvencí k základní frekvenci f_0, což jsou jen čísla bez jednotek, vyjadřující, kolikrát je daná frekvence vyšší než frekvence základní.

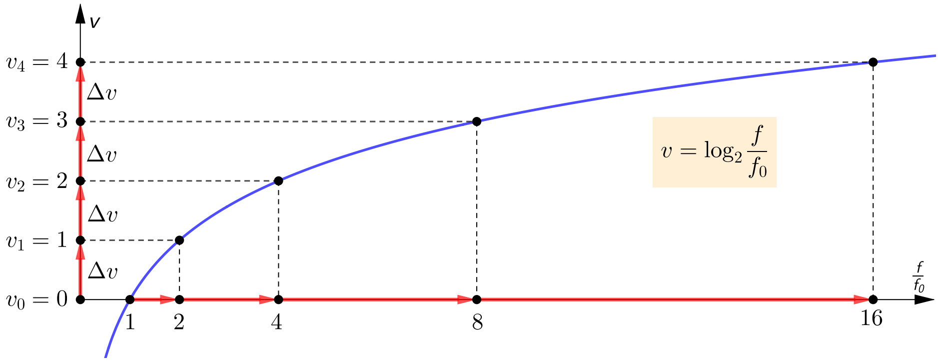
Dost často nás zajímá jen jedna oktáva (pač jak vysvětlíme později, ve všech ostatních oktávách je to všechno podobné), vystačíme si s frekvencemi od f_0 do $2f_0$ (viz obr.2.8)



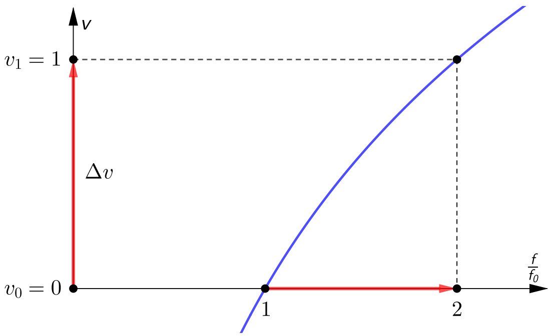
Obrázek 2.6

2.2.5 Fechnerův-Weberův zákon obecněji

Na úvod dvě videa o FW zákonech tři aplety v GeoGebře: https://www.geogebra.org/m/hvpgyfwd#material/ru3zths9



Obrázek 2.7



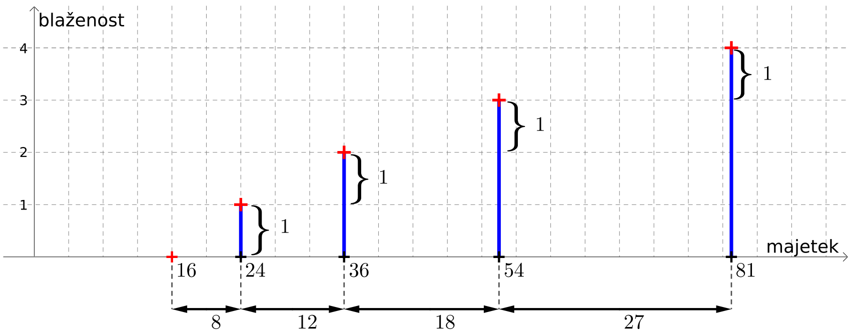
Obrázek 2.8

Příklad 4: Josef Kajetán Molitán

Josef Kajetán Molitán (JKM) jde po ulici, v kapse má posledních 16 korun (**majetek – fyzikální podnět**) a jeho **blaženost** (**subjektivní vjem**) je na nulové hodnotě. Na zemi najde 8 korun a jeho blaženost vzroste na hodnotu 1. Po chvíli najde další částku a jeho blaženost se zvýší na hodnotu 2. Jakou našel částku?

První nález byl 50 % jeho počátečního majetku. Po prvním nálezu má 16 + 8 = 24 korun. Kdyby nyní našel zase jen 8 korun, už by to bylo pro něj málo. Aby jeho blaženost vzrostla o stejnou hodnotu jako předtím, musí zřejmě podruhé najít 50 % ze současného majetku (z 24 korun), což je 12 korun!

To by se opakovalo při dalších nálezech. Po druhém nálezu má 24+12=36 korun. Třetí nález musí být 50 % z 36, tedy 18 korun a majetek se zvýší na 54 korun. Dále musí najít 54/2 = 27 korun a jeho majetek bude 81 korun. A tak dále.



Závěr:

- Vidíme, že k tomu, **aby blaženost rostla o stále stejné přírůstky, musí být relativní přírůstek prachů stále stejný** (zde 50 %).
- Posloupnost **přírůstků jeho majetku** by byla $8, 12, 18, 27 \ldots$. Všimněme si, že to je posloupnost **geometrická** s kvocientem $q = \dfrac{3}{2}$

- Posloupnost **hodnot jeho majetku** by byla $16, 24, 36, 54, 81 \ldots$. Všimněme si, že to je posloupnost **geometrická** s kvocientem $q = \frac{3}{2}$
- Posloupnost hodnot jeho **blaženosti** by byla $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Vidíme, že je to posloupnost **aritmetická** s diferencí $q = 1$.

Nyní si tento příklad zpracujeme obecně.

Majetek si označíme jako p (**podnět**) a **blaženost** jako v (**vjem**). Počáteční hodnota majetku byla $p_0 = 16$. Počáteční blaženost byla $v_0 = 0$. Přírůstek majetku označíme jako Δp. Přírůstek blaženosti označíme jako Δv.

Zjistili jsme, že pro to, aby přírůstky blaženosti byly pořád stejné, nestačí stejné přírůstky majetku. Stejné musí být **procentuální** přírůstky majetku. V našem případě musely být procentuální přírůstky 50 %. Byla-li hodnota majetku třeba $p = 24$, musel být přírůstek 50 % z 24, což je $\Delta p = 12$. Procentuální přírůstek je obecně vyjádřen jako $\frac{\Delta p}{p} \cdot 100\%$. Samotný poměr $\frac{\Delta p}{p}$ se nazývá **relativní** přírůstek. Náš výchozí poznatek tedy je:

Věta 6: Fechnerův zákon – formulace 1

$$\text{Má-li být } \Delta v \text{ konstantní}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{musí být } \frac{\Delta p}{p} \text{ konstantní}$$

Označme první konstantu k_1 a druhou k_2. Dostáváme tedy soustavu

$$\Delta v = k_1 \tag{2.13}$$

$$\frac{\Delta p}{p} = k_2 \tag{2.14}$$

Vydělením rovnic dostáváme

$$\Delta v : \frac{\Delta p}{p} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$\Delta v = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{\Delta p}{p}$$

Označme podíl obou konstant jako novou konstantu k.

Dostáváme

Věta 7: Fechnerův zákon – formulace 2

$$\boxed{\Delta v = k \cdot \frac{\Delta p}{p}} \tag{2.15}$$

To znamená, že **absolutní přírůstek blaženosti** je *přímo úměrný* **relativnímu přírůstku majetku**.

Tento vztah lze také upravit na tvar:

Věta 8: Fechnerův zákon – formulace 3

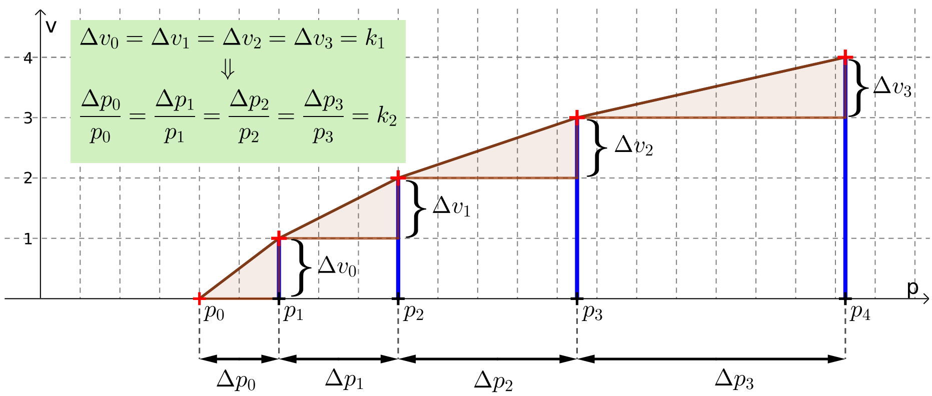
$$\boxed{\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{k}{p}} \tag{2.16}$$

Respektive pro elementární přírůstky:

$$\boxed{\frac{dv}{dp} = \frac{k}{p}} \tag{2.17}$$

To znamená, že **rychlost růstu blaženosti** je *nepřímo úměrná* majetku.

Čím víc máme prachů, tím pomaleji narůstá naše blaženost. To je krástně vidět i z obrázků 2.9 a 2.10, kde směrnice spojnic bodů grafu s rostoucím p klesá.

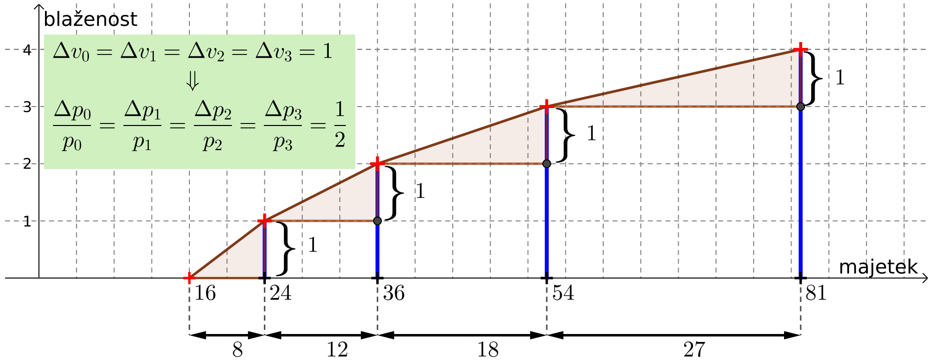


Obrázek 2.9

Nyní si ověříme naše pozorování z příkladu, že posloupnost hodnot majetku $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 \ldots$ je vskutku **geometrická**. Vezmeme dvě libovolné po sobě jdoucí hodnoty této posloupnosti a určíme jejich poměr:

$$\frac{\Delta p_{n+1}}{\Delta p_n} = \frac{p_n + \Delta p_n}{p_n} = 1 + \frac{\Delta p_n}{p_n} = 1 + k_2 = \text{konstanta}$$

Vidíme, že se opravdu jedná o **geometrickou** posloupnost s kvocíkem $q = k_2 + 1$. (Kontrola: $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$)



Obrázek 2.10

Věta 9: Fechnerův zákon – formulace 4

Roste-li **majetek** posloupností **geometrickou**, roste **blaženost**, bohužel kužel, jen posloupností **aritmetickou**!

Nyní již máme asi podezření, že vztah mezi v a p bude logaritmický. Proč? Za prvé grafanec v obrázku 2.9 tak vypadá a za druhé víme, že posloupnost geometrická na ose x a aritmetická na ose y souvisejí s logaritmickou funkcí. Takže si to ověříme. Vezmeme vztah 2.17, zintegrujeme a dostáváme:

$$v = \int \frac{k}{p} dp$$
$$v = k \ln p + C$$

Integrační konstantu C určíme snadno – pro $p = p_0$ (počáteční prachy Josefa Kajetána Molitána) je $v = 0$ (nulová blaženost):

$$
\begin{aligned}
0 &= k \ln p_0 + C \\
C &= -k \ln p_0 \\
v &= k \ln p - k \ln p_0 \\
v &= k(\ln p - \ln p_0) \\
v &= k \cdot \ln \frac{p}{p_0}
\end{aligned}
$$

A je to tady:

Věta 10: Fechnerův zákon – formulace 5

$$\boxed{v = k \cdot \ln \frac{p}{p_0}} \tag{2.18}$$

- **Blaženost** závisí na **majetku logaritmicky**.

Neboli:

- Roste-li **majetek aritmetickou** posloupností, roste **blaženost** jen **logaritmickou** posloupností.

Rozbor vztahu 2.18:

Dosadíme-li za $p = p_0$, dostáváme $v = k \cdot \ln 1 = 0$. Tedy při počáteční hodnotě majetku p_0 je blaženost v nulová.

Jaký význam má konstanta k? Ta je volitelná a umožňuje nám nastavit si **citlivost** daného subjektu – jak citlivě reaguje jeho blaženost (vjem) na nárůst majetku (podnět).

- *Siddha.* Kdo je absolutně odpoután od majetku, má tuto konstantu nulovou. Ať najde jakoukoli částku, s jeho blažeností to nic neudělá. Ta zůstává furt und porád konstantní – z hlediska obyčejného člověka možná nulová, ale on je ve stavu skutečné Blaženosti, která je slovy nepopsatelná a čísly nevyčíslitelná!

- *Normální člověk.* V našem příkladě jsme si stanovili, že když majetek vzrostl z $p_0 = 16$ na hodnotu $p_1 = 24$ (tedy $p_1 = \frac{3}{2}p_0$ – kvocík naší GP byl $\frac{3}{2}$), vzrostla blaženost z hodnoty **0 na 1** (viz obr.2.10) Vypočtěme hodnotu konstanty k:

$$
\begin{aligned}
p =& \frac{3}{2}p_0 \Rightarrow v = 1 \\
1 =& k \cdot \ln \frac{\frac{3}{2}p_0}{p_0} \\
1 =& k \cdot \ln \frac{3}{2} \\
k =& \frac{1}{\ln \frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

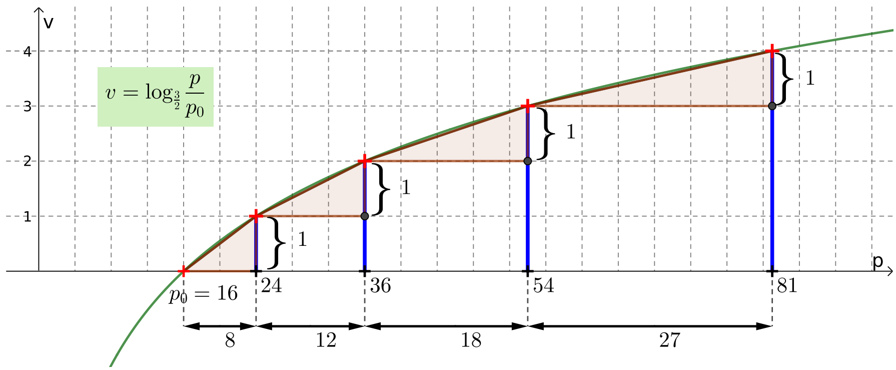
Frknemež-li hodnotu konstanty k do 2.18, dostáváme:

$$
v = \frac{\ln \frac{p}{p_0}}{\ln \frac{3}{2}}
$$

Vidíme, že můžeme od přirozeného logaritmu přejít k logaritmu o základu $\frac{3}{2}$.

$$
\boxed{v = \log_{\frac{3}{2}} \frac{p}{p_0}} \tag{2.19}
$$

Potom grafanec závislosti blaženosti na majetku vypadá tak, jak vokazuje obr. 2.11, což je v souladu s obr.2.10.



Obrázek 2.11

- *Chamtivec.* Ten je dejme tomu dvakrát citlivější na prachy než normální člověk, takže když mu vzroste majetek z $p_0 = 16$ na $p_1 = 24$, vzroste mu blaženost z hodnoty **0 na 2**! Jeho konstanta k bude tedy dvojnásobná než u normálního člověka:

$$k = \frac{2}{\ln \frac{3}{2}}$$

$$v = 2 \cdot \frac{\ln \frac{p}{p_0}}{\ln \frac{3}{2}}$$

A odtud chamtivec bude mít vzorec pro blaženost tento:

$$\boxed{v = 2 \cdot \log_{\frac{3}{2}} \frac{p}{p_0}} \tag{2.20}$$

Předcházející 3 typy lidí můžeme krástně sledovat v apletu https://ggbm.at/y2mtuwmj

- Dejme tomu, že si nyní řekneme, že chceme, aby vzrostla blaženost z 0 na 1 při vzrůstu majetku z p_0 na $2p_0$. Snadno opět vypočteme hodnotu konstanty k:

$$\begin{aligned} p =& 2p_0 \Rightarrow v = 1 \\ 1 =& k \cdot \ln \frac{2p_0}{p_0} \\ 1 =& k \cdot \ln 2 \\ k =& \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

Nyní frkněmež hodnotu konstanty k do 2.18:

$$v = \frac{\ln \frac{p}{p_0}}{\ln 2}$$

Vidíme, že můžeme od přirozeného logaritmu přejít k logaritmu o základu 2.

$$\boxed{v = \log_2 \frac{p}{p_0}} \tag{2.21}$$

Tento vztah budeme používat u zvuku (důvod viz dále).

Kapitola 3

BARVA TÓNU

3.1 Základní frekvence

3.2 Vyšší harmonické frekvence

3.3 Skládání sinusoid, syntetizátor

Kapitola 4

LADĚNÍ

Takže z minulé kapitoly víme, že ucho vnímá frekvence tónů *logaritmicky*, tedy nelineárně. Pro posuzování výškových odlehlostí tónů nejsou důležité rozdíly frekvencí, ale jejich **poměry**. Poměr frekvencí dvou tónů jsme definovali jako **interval** mezi dvěma tóny (viz definice 2).

Chceme-li dělat hudbu, potřebujeme ze spojitého spektra frekvencí (16 Hz; 16 000 Hz) **vybrat určité frekvence**, které budou tvořit posloupnost tónů. V rámci této posloupnosti potom budu vytvářet melodie a souzvuky tónů. Způsob, jakým posloupnost frekvencí vyberu, se nazývá **ladění**.

4.1 Konsonance a disonance

jůtubový kanál **New Tonality**:

https://youtu.be/ChI3geAerE0?feature=shared

tlusté struny: https://youtu.be/beSQSpLwakk?feature=shared

https://youtu.be/b_fU6yVxDZs?feature=shared

https://youtu.be/1Hqm0dYKUx4?feature=shared

https://youtu.be/b_fU6yVxDZs?feature=shared

https://www.mathcha.io/editor/KBMZJcWBUm3TXQjmPZugKekQNSv4KLN

Pythagoras,
souzvuk jednoduchých tónů,
souzvuk složených tónů
rázy
vyšší harmonické
tritón
centy

Aplet „**Rozladěná oktáva = nepříjemný souzvuk**“: https://www.geogebra.org/m/hvpgyfwd#material/yyhfqrnz

Aplet „**Monochord - konsonance**“ https://www.geogebra.org/

m/hvpgyfwd#material/uwdvws59

4.2 Prima a oktáva, oktávová ekvivalence

Vídeo inspirativní: https://youtu.be/wg5QcF2akzQ?feature=shared

Definice 3: Prima

Prima je hudební interval mezi dvěma tóny, jejichž poměr frekvencí je

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1} \tag{4.1}$$

Čiliž oba tóny mají stejnou výšku a zní-li současně, dávají dokonalý **souzvuk** – jsou pro lidské ucho krástně **konsonantní**.

Definice 4: Oktáva

Oktáva je hudební interval mezi dvěma tóny, jejichž poměr frekvencí je

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{2}{1} \tag{4.2}$$

Například tóny s frekvencemi 220 Hz a 440 Hz tvoří oktávu.

Oktáva je po *primě* druhý **nejdůležitější** interval. Zazní-li tóny tvořící oktávu současně, vnímá lidské ucho tento souzvuk skoro stejně souladně jako *primu* – vyšší tón jako by byl totožný s nižším, a přesto je jiný!

Mluvíme o **oktávové ekvivalenci**. The interval is so natural to humans that when men and women are asked to sing in unison, they typically sing in octave. For this reason, notes an octave apart are given the same note name in the Western system of music notation—the name of a note an octave above A is also A.

Mezi všemi tóny s frekvencemi 27,5 Hz, 55 Hz, 110 Hz, 220 Hz, 440 Hz, 880 Hz, 1660 Hz, 3320 Hz jsou oktávové intervaly. Tyto tóny tvoří **oktávovou třídu** a všechny se v tomto případě označují písmenem A.

Většina (ne všechna) ladění využívá oktávové ekvivalence. Díky ní se lze při výběru posloupnosti frekvencí omezit jen na jednu oktávu, tedy na interval mezi frekvencemi f_0 a $2f_0$, kde f_0 je jistá vhodně vybraná *základní frekvence*, od níž odvozujeme celou posloupnost

$$f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots, 2f_0$$

Pač záleží jen na poměrech, můžeme pracovat jen s poměrem frekvencí $\frac{f}{f_0}$, takže celá sranda se bude odehrávat v intervalu

$$\langle 1; 2 \rangle$$

Vidíš, všechna hudba všech dob se nachází v číselném intervalu mezi jedničkou (Jednota) a dvojkou (dualita)!

Nyní vznikají dvě otázky – kolik tónů vybrat a podle jakého klíče je vybírat?

4.3 Kolik tónů vybrat?

Minimální počet (a docela postačující) je asi **5** (*pentatonika* – Čína, blues, dětské písničky). Dále se používá **7** a **12** tónů (diatonická a chromatická stupnice – většina západní hudby), ale také **22** tónů (Indie) a více (31,39,41,53,72 – moderní hudba)!

Čím více tónů vybereme, tím menší jsou mezi nimi intervaly (mikrotonální hudba – https://en.wikipedia.org/wiki/Microtonal_music). Tím složitější je hudba.

4.4 Podle jakého klíče tóny vybírat?

Tóny (frekvence, relativní intervaly – čísla z číselného intervalu $\langle 1; 2 \rangle$) nebudeme jistě vybírat náhodně. Je možná překvapující, že to bude asi vždy nějaký *matematický algoritmus*. Přitom se klade důraz na to, aby co nejvíce intervalů, které vznikají mezi vybranými tóny, bylo intervalů **konsonantních** (souzvučných).

Z hlediska druhu čísel, která se v jednotlivých laděních vyskytují, se setkáváme se dvěma případy:

1. Všechny relativní frekvence, které vybereme, jsou **racionální čísla** – např. $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$ Takovým laděním se říká **PŘIROZENÁ**. (**just intonation**) (například *Pythagorejské alias 3-limit*, *5-limit*, *7-limit*, a další)

2. Některé relativní frekvence budou **racionální** a některé **iracionální**. Tato ladění se nazývají souhrnně **TEMPEROVANÁ ladění** (Například *středotónové temperované ladění* – zde řáděj racionální mocniny čísla 5, např. $\sqrt[4]{5^3}$ plus racionální intervaly $1, \frac{5}{4}, 2$ – nebo *rovnoměrně temperované ladění* – zde řáděj racionální mocniny čísla 2, např. $\sqrt[12]{2}$ plus racionální intervaly $1, 2$.)

Kapitola 5

PŘIROZENÁ LADĚNÍ

5.1 Přirozenost – matka moudrosti

Přirozená ladění (*just intonation*) jsou založena na něčem, co je **přirozeně** obsaženo **v jediném tónu**, který zazní, když brnkneme na strunu nebo foukneme do píšťaly – na **vyšších harmonických frekvencích**. Víme, že vyšší harmonické frekvence jsou násobky frekvence základní – $f, 2f, 3f, 4f, 5f, 6f, 7f, 8f, 9f \ldots$ Intervaly, které se zde objevují, jsou

$$
\begin{array}{l}
\frac{2}{1} \\
\frac{3}{1}, \frac{3}{2} \\
\frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{4}{3} \\
\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4} \\
\frac{6}{1}, \frac{6}{2}, \frac{6}{3}, \frac{6}{4}, \frac{6}{5} \\
\frac{7}{1}, \frac{7}{2}, \frac{7}{3}, \frac{7}{4}, \frac{7}{5}, \frac{7}{6} \\
\frac{8}{1}, \frac{8}{2}, \frac{8}{3}, \frac{8}{4}, \frac{8}{5}, \frac{8}{6}, \frac{8}{7} \\
\frac{9}{1}, \frac{9}{2}, \frac{9}{3}, \frac{9}{4}, \frac{9}{5}, \frac{9}{6}, \frac{9}{7}, \frac{9}{8}, \ldots
\end{array}
$$

Omezíme-li se jen na jednu oktávu (poměry mezi čísly 1 a 2), dostaneme (po krácení zlomků) tyto intervaly:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{4}, \frac{7}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{5}, \frac{8}{7}, \frac{9}{5}, \frac{9}{7}, \frac{9}{8}, \ldots$$

V poměrech se nám objevují postupně mocniny prvočísel $2, 3, 5, 7 \ldots$

Například:

$$\frac{5}{4} = \frac{5^1}{2^3}, \qquad \frac{7}{6} = \frac{7^1}{2^1 \cdot 3^1}, \qquad \frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3}$$

Jednotlivé druhy přirozených ladění se liší tím, **jak vysoká prvočísla** p **použijí**:

1. $p \leq 3$ – **Pythagorejské ladění** (three-limit tuning)
2. $p \leq 5$ – **Five-limit tuning** (často bývá ztotožňováno přímo s přirozeným laděním, přestože je jen jedním z více druhů PL)
3. $p \leq 7$ – **Seven-limit tuning** (La Monte Young, Ben Johnston, Lou Harrison)

Pro $p \geq 7$ zavedl Ben Johnston označení **extended just intonation**.

5.2 4 základní intervaly JI

Príma, kvinta, kvarta, oktáva

obrázek – log

Kapitola 6

PÝTHAGOREJSKÉ LADĚNÍ

6.1 Historie

http://musiclessons.nl/pythagorean_tuning/
https://www.youtube.com/watch?v=DEAzW9uWRTM
https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_tuning
https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_comma

wiki: The so-called "Pythagorean tuning"was used by musicians up to the beginning of the 16th century.

In Greek music it was used to tune tetrachords and the twelve tone Pythagorean temperament was developed by medieval music theorists using the same method of tuning in perfect fifths, however there is no evidence that Pythagoras himself went beyond the tetrachord.

6.2 Oktávové a kvintové skoky

Pýthagorejské ladění je *3-limit tuning*, takže se omezuje jen na mocniny prvočísel 2 a 3. Pro intervaly v jedné oktávě (relativní frekvence od 1 do 2) připadají tedy v úvahu jen poměry

$$\frac{3^m}{2^n} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{2^m}{3^n}; \qquad m, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \tag{6.1}$$

takové, aby daný zlomek byl z číselného intervalu $\langle 1; 2\rangle$.

Například tedy

$$\frac{3^3}{2^4} = \frac{27}{16} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{2^2}{3^1} = \frac{4}{3}$$

Mezi všemi těmito poměry jsou 4 základní:

$$\begin{aligned}
\frac{2^1}{3^0} &= \frac{2}{1} \quad \text{oktávový skok nahoru}\\
\frac{3^0}{2^1} &= \frac{1}{2} \quad \text{oktávový skok dolů}\\
\frac{3^1}{2^1} &= \frac{3}{2} \quad \text{kvintový skok nahoru}\\
\frac{2^1}{3^1} &= \frac{2}{3} \quad \text{kvintový skok dolů}
\end{aligned}$$

Všechny ostatní intervaly typu 6.1 lze z těchto skoků složit. Například interval $\frac{27}{16} = \frac{3^3}{2^4}$ lze zapsat jako:

$$\frac{3^3}{2^4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

To lze interpretovat jako tři kvintové skoky nahoru a jeden oktávový skok dolů.

Nebo interval $\frac{4}{3} = \frac{2^2}{3^1}$ (kvarta) lze zapsat jako:

$$\frac{2^2}{3^1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1}$$

To lze interpretovat jako jeden kvintový skok dolů a jeden oktávový skok nahoru.

Vidíme, že Pýthagorejské ladění kvůli svému požadavku používat pouze prvočísla 2 a 3 znamená ladění, které je výhradně sestaveno pomocí **kvintových a oktávových skoků**, které se dějí **nahoru či dolů**. Jinými slovy základními intervaly Pýthagorejského ladění je **oktáva** a **kvinta**.

Přitom oktávy nemohou kvůli oktávové ekvivalenci přinést nic nového – slouží jen k navrácení tónu, který nám kvůli kvintovým skokům přeteče mimo **číselný** interval $\langle 1; 2\rangle$ zpět do tohoto intervalu.

To, co má schopnost tvořit nové intervaly, je tedy pouze kvinta! Kvintovými skoky nahoru či dolů tvoříme nové tóny a oktávové skoky nahoru či dolů nám tyto nové tóny vracejí do naší oktávy v intervalu $\langle 1; 2 \rangle$.

Kvinta je tudíž v Pýthagorejském ladění jediným a výhradním **generátorem** dalších tónů.

Tak jdeme generovat hudební světy! Vygenerujeme si v oktávě pro srandu různé počty tónů – 5,7,12,22,41,53.

6.3 Pýthagorejská pentatonika

(viz aplet v GeoGebře https://ggbm.at/sbuzvgnu)

Začneme tím, že si vygenerujeme pomocí kvintových skoků k základnímu tónu (rel. frekvence je 1) 4 další tóny. Tím vznikne stupnice pěti tónů. To by mohlo pro začátek pro tvorbu hudby stačit, ne? Stupnicím, které se skládají z pěti tónů (šestý je oktáva k tónu základnímu), se říká **stupnice pentatonické**. Existuje více druhů pentatonických stupnic, my použijeme pythagorejský **kvintový** generátor – dostaneme **pythagorejskou pentatoniku**.

Protože kvintové skoky můžeme dělat nahoru nebo dolů, máme 5 možností, jak udělat 4 kvintové skoky. Tím vzniká 5 *módů* Pýthagorejské pentatoniky :

5 módů Pýthagorejské pentatoniky

1. mód – 4 nahoru + 0 dolů
2. mód – 3 nahoru + 1 dolů
3. mód – 2 nahoru + 2 dolů
4. mód – 1 nahoru + 3 dolů
5. mód – 0 nahoru + 4 dolů

Konkrétně pro 1. mód (oktávovými skoky se vracíme do číselného intervalu $\langle 1; 2 \rangle$):

$$\begin{aligned}
&1\\
&1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\\
&\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \sim \frac{9}{8}\\
&\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}\\
&\frac{27}{16} \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{32} \sim \frac{81}{64}
\end{aligned}$$

Takže pro **mód 1 (4n+0d)** dostáváme posloupnost intervalů (podle velikosti)

1. Durová pentatonika (4 ↑ + 0 ↓ dolů)

$$1; \quad \frac{9}{8}; \quad \frac{81}{64}; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{27}{16} \tag{6.2}$$

Analogicky dostáváme hodnoty pro zbylé módy posloupnosti.

2. Bluesová durová pentatonika ($3 \uparrow + 1 \downarrow$ dolů)

$$1; \quad \frac{9}{8}; \quad \frac{4}{3}; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{27}{16} \tag{6.3}$$

3. Egyptská (suspended) pentatonika ($2 \uparrow + 2 \downarrow$ dolů)

$$1; \quad \frac{9}{8}; \quad \frac{4}{3}; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{16}{9} \tag{6.4}$$

4. Mollová pentatonika ($1 \uparrow + 3 \downarrow$ dolů)

$$1; \quad \frac{32}{27}; \quad \frac{4}{3}; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{16}{9} \tag{6.5}$$

5. Bluesová mollová pentatonika ($0 \uparrow + 4 \downarrow$ dolů)

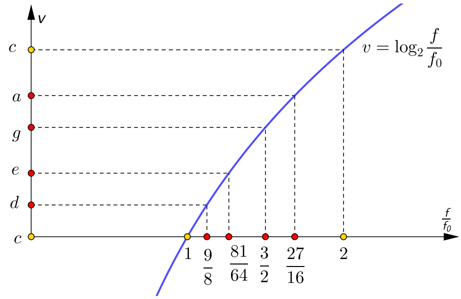
$$1; \quad \frac{32}{27}; \quad \frac{4}{3}; \quad \frac{128}{81}; \quad \frac{16}{9} \tag{6.6}$$

Výpočtem se snadno přesvědčíme, že itervaly mezi tóny ve všech módech jsou jen dvojího druhu:

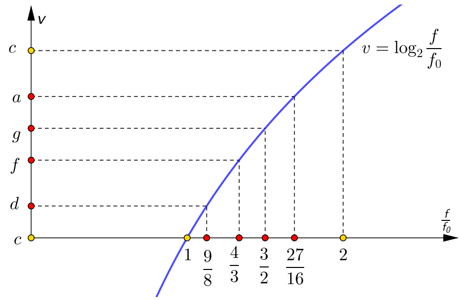
$$\boxed{\frac{9}{8} \quad \text{a} \quad \frac{32}{27}}$$

- $\frac{9}{8}$ je **pýthagorejský celý tón** (zkratka M2 – *major second*)
- $\frac{32}{27}$ je **pýthagorejská malá tercie** (zkratka m3 – *minor third*)

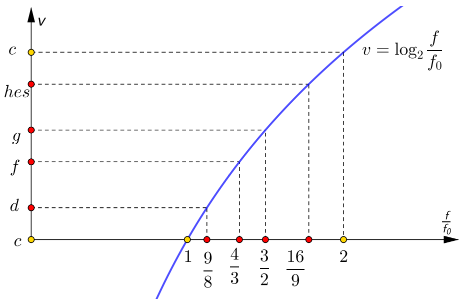
Abychom měli o ladění lepší představu, je vhodné si udělat grafy závislosti výšky tónů pentatoniky na relativní frekvenci (obr. 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5). V obrázcích jsme tóny označili pro přehlednost malými písmeny – vysvětlení viz dále.



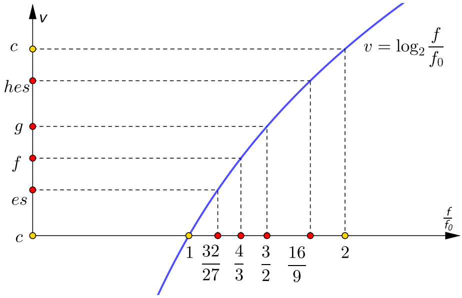
Obrázek 6.1: Pythag. pentatonika – mód 1 (4 kvinty nahoru + 0 dolů)



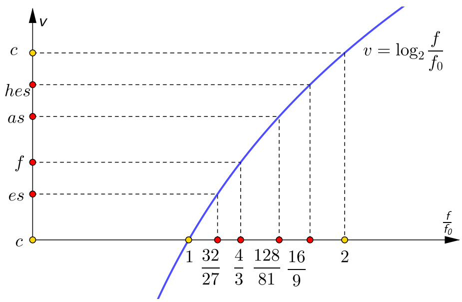
Obrázek 6.2: Pythag. pentatonika – mód 2 (3 kvinty nahoru + 1 dolů)



Obrázek 6.3: Pythag. pentatonika – mód 3 (2 kvinty nahoru + 2 dolů)



Obrázek 6.4: Pythag. pentatonika – mód 4 (1 kvinty nahoru + 3 dolů)



Obrázek 6.5: Pythag. pentatonika – mód 5 (0 kvint nahoru + 4 dolů)

Označme **pýthagorejský celý tón** jako **a** a **pythagorejskou malou tercii** jako **B** . Potom lze posloupnosti intervalů mezi tóny jednotlivých módů psát takto (viz obrázky 6.1 – 6.5):

5 módů Pýthagorejské pentatoniky

1. mód: $aaBaB$
2. mód: $aBaaB$
3. mód: $aBaBa$
4. mód: $BaaBa$
5. mód: $BaBaa$

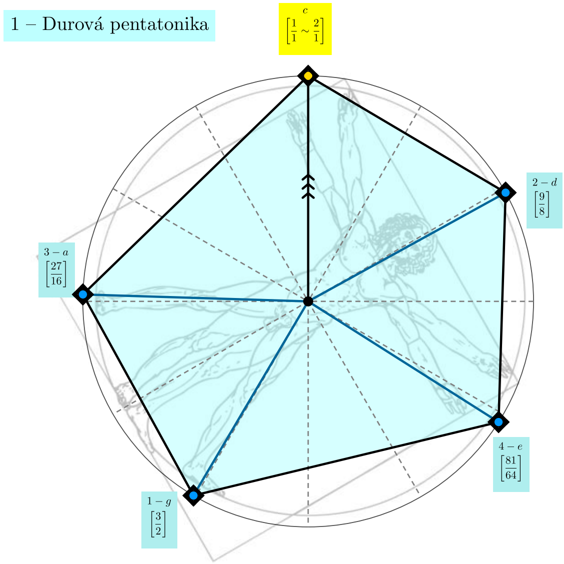
Vidíme, že jednotlivé posloupnosti jsou jen vzájemné cyklické záměny:

Mód 3 → Mód 1 → Mód 4 → Mód 2 → Mód 5 → Mód 3

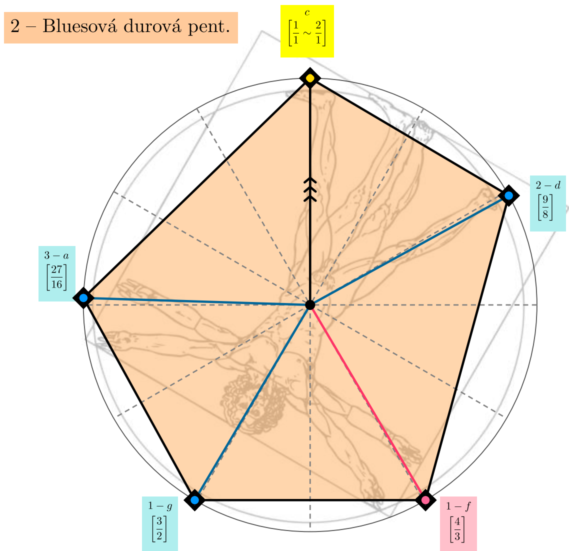
Proto je vhodné udělat kruhové schéma jednotlivých módů (viz obr.6.6 až 6.10). **Žlutě** je označen základní tón, **modře** tóny vzniklé vzestupnými kvintami a **červeně** tóny vzniklé sestupnými kvintami. Polohy bodů jsou vyneseny logaritmicky podle vztahu

$$\boxed{\alpha = 360° \cdot \log_2 \frac{f}{f_0}} \tag{6.7}$$

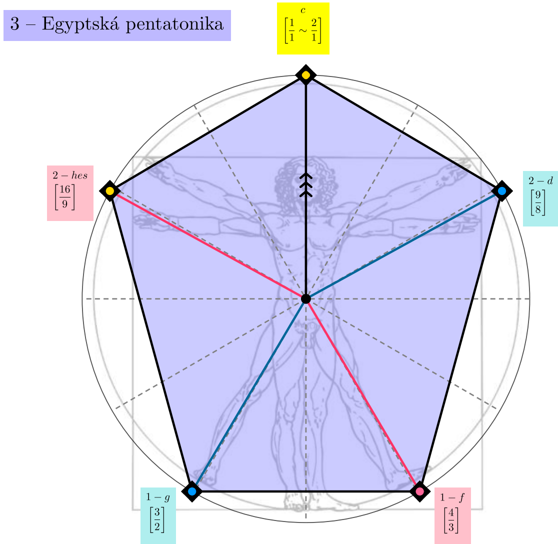
kde α je středový úhel mezi základním tónem a daným tónem. Tóny tvoří **nepravidelný pětiúhelník**, který je ale **osově souměrný**. Jednotlivé cyklické záměny znamenají rotaci pětiúhelníku kolem středu jemu opsané kružnice. Kvůli jepší orientaci jsem na pozadí pětiúhelníku frknul Vitruviánského muže. Celou tuhle srandičku můžeme pěkně



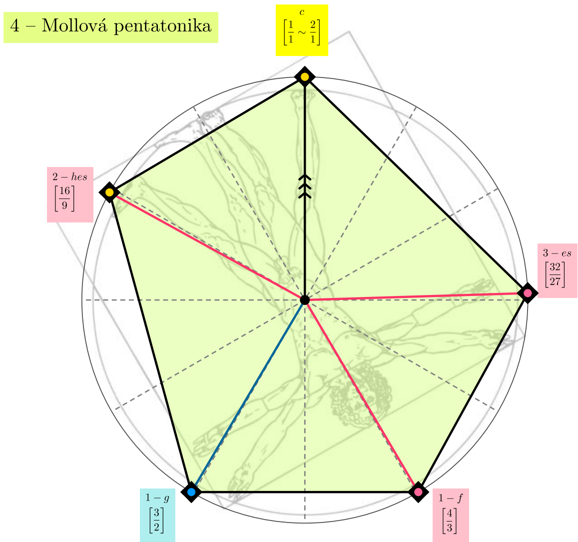
Obrázek 6.6: **Durová** pentatonika – Mód 1



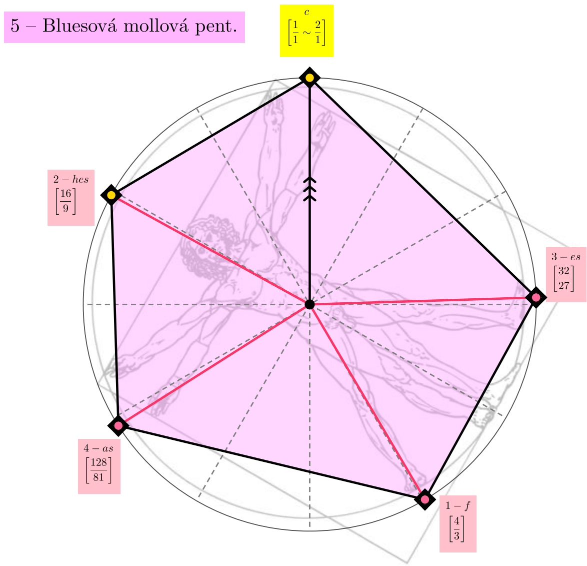
Obrázek 6.7: **Bluesová durová** pentatonika – Mód 2



Obrázek 6.8: **Egyptská (suspended)** pentatonika – Mód 3



Obrázek 6.9: **Molová** pentatonika – Mód 4



Obrázek 6.10: **Bluesová molová** pentatonika – Mód 5

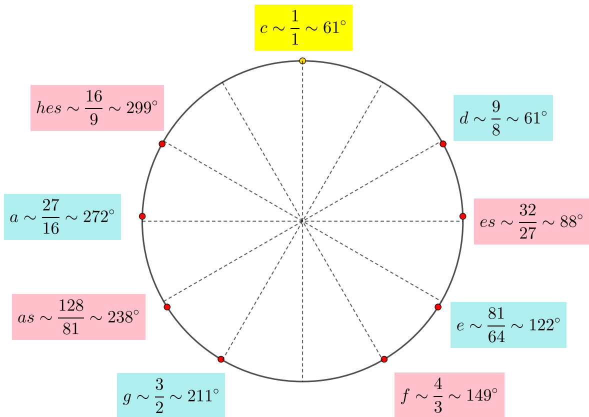
sledovat v apletu v GeověGebře – https://ggbm.at/sbuzvgnu

Konkrétní velikost úhlu například u tónu $\frac{9}{8}$ je $\alpha = 360° \cdot \log_2 \frac{9}{8} \doteq 61°$ nebo tónu $\frac{4}{3}$ je přiřazen úhel $\alpha = 360° \cdot \log_2 \frac{4}{3} \doteq 149°$. To jsou hodnoty velice blízké poloze čísel na **ciferníku hodin** – pojďme se na to juknout blíže! Spočítáme si hodnoty úhlů pro všechny tóny, které nám dalo pět módů pentatoniky a vyneseme na kružnici – viz obr.6.11.

Vidíme, že máme obsazeny skoro všechny pozice na ciferníku a úhly tónů se mírně liší (max. o 2 stupně) od hodnot úhlů čísel na ciferníku. Zbývá obsadit 3 pozice a budeme mít všech **12 tónů pýthagorejské chromatické stupnice**, k níž se dostaneme za chvíli.

Nyní nám jistě již náš ciferník začíná připomínat **12 kláves klavíru**. Zde vidíme graficky, proč jich je 12 – celá oktáva je docela rozumně **skoro** rovnoměrně rozdělena (resp. bude, až tam přidáme ty 3 zbylé tóny) na 12 skoro stejných intervalů.

Víme, že na klavíru má každá klávesa (v jedné oktávě) svůj název – proto jsme už předtím začali takto tóny Pýthagorejského ladění označovat. Bílých kláves je v oktávě 7 (c, d, e, f, g, a, h, c – nám zatím chybí jen h) a černých je 5. Je dobré si uvědomit, že zde budujeme Pýthagorejské ladění, které je **nerovnoměrné**. Klavír je však v dnešní době naladěn **rovnoměrně** (rovnoměrné temperované ladění – viz později) – a to tak, že jednotlivé tóny sedí přesně na cifrách číselníku, tedy jejich poloha je dána úhly $0°, 30°, 60°, 90°, 120°, \ldots 360°$.

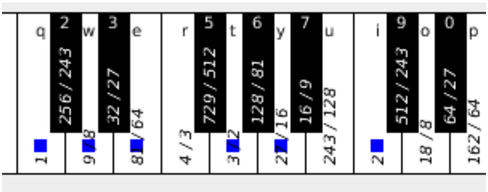


Obrázek 6.11: Co nám dalo pět módů pentatoniky?

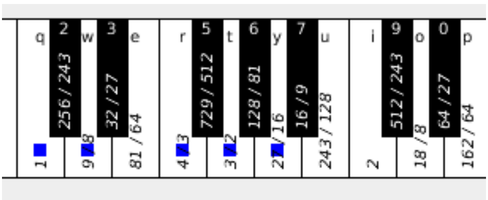
6.4 Jak Pýthagorejská pentatonika zní?

Ještě se podívejme, jak Pýthagorejská pentatonika zní - viz obr. 6.12 až 6.16 + odkazy na videa se zvukem v popisku obrázků. Nahrávky byly pořízeny pomocí prográmku https://www.physics.byu.edu/faculty/durfee/TemperamentStudio/, který umožňuje nastavit si různé druhy ladění.

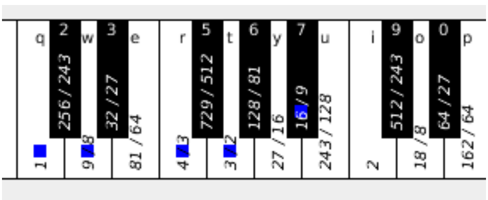
Všimněme si ještě (obr.6.13), že kdybychom Mód 3. **Bluesová durová** posunuli o půl tónu výše, dostaneme pět černých kláves na klavíru.



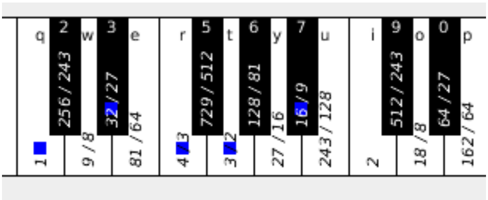
Obrázek 6.12: 1. **Durová**
https://youtu.be/ms-uRrtqW4g



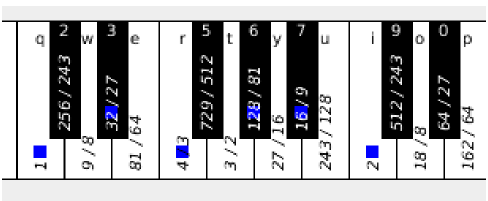
Obrázek 6.13: 2. **Bluesová durová**
https://youtu.be/FZvJDR0O6j8



Obrázek 6.14: 3. **Egyptská**:
https://youtu.be/fZnqx46VjVE



Obrázek 6.15: 4. **Molová**:
https://youtu.be/ZVW3OnWLHy4



Obrázek 6.16: 5. **Bluesová molová**:
https://youtu.be/s8mu9Y0QQbw

6.5 Pýthagorejská heptatonika

Nyní chceme počet tónů v oktávě zvýšit. Místo čtyř kvintových skoků, které jsme použili v pentatonice, použijeme kvintových skoků **šest**. (Pět skoků by bylo málo – prostor oktávy by byl šesti tóny vyplněn dosti nerovnoměrně.) Dostaneme sedmitónovou stupnici – **heptatoniku**. Viz aplet v GeoGebře: https://ggbm.at/uq6axb7n a obrázky 6.17 až 6.29. Protože skoky můžeme opět dělat nahoru i dolů, dostáváme 7 *módů* Pýthagorejské heptatoniky:

7 módů Pýthagorejské heptatoniky

1. mód – 5 nahoru + 1 dolů
2. mód – 3 nahoru + 3 dolů
3. mód – 1 nahoru + 5 dolů
4. mód – 6 nahoru + 0 dolů
5. mód – 4 nahoru + 2 dolů
6. mód – 2 nahoru + 4 dolů
7. mód – 0 nahoru + 6 dolů

Obdobně jako u pentatonik dopočítáme hodnoty intervalů jednotlivých módů.

1. Jónský módus (durová stupnice) (5 ↑ + 1 ↓)

$$1;\quad \frac{9}{8};\quad \frac{81}{64};\quad \frac{4}{\underline{3}};\quad \frac{3}{2};\quad \frac{27}{16};\quad \frac{243}{\underline{\underline{128}}} \tag{6.8}$$

Jónský módus (obr.6.17) je naše **durová** stupnice. Základem tohoto módu (viz obr.6.18) je pentatonika **1. durová** (nepodtržené tóny), k níž přidáme z pentatoniky **2. bluesové durové** podtržený tón ($e - \underline{\frac{4}{3}}$) a **nový** dvakrát podtržený tón ($h - \underline{\underline{\frac{243}{128}}}$), který se v pentatonikách nevyskytuje. (Je to první z těch tří chybějících do 12-ti tónové pýthagorejské stupnice).

2. Dórský módus ($3 \uparrow + 3 \downarrow$)

$$1; \quad \frac{9}{8}; \quad \underline{\frac{32}{27}}; \quad \frac{4}{3}; \quad \frac{3}{2}; \quad \underline{\frac{27}{16}}; \quad \frac{16}{9} \tag{6.9}$$

Základem Dórského módu (obr.6.19) je pentatonika **3. egyptská** (nepodtržené tóny), kterou doplníme tónem $es - \frac{32}{27}$ z pentatoniky **2. bluesové** a tónem $a - \frac{27}{16}$ z pentatoniky **4. mollové** (obr.6.20).

Dórský mód neobsahuje **žádné nové tóny**, které by se nevyskytovaly v pentatonikách.

3. Frygický módus ($1 \uparrow + 5 \downarrow$)

$$1; \quad \underline{\underline{\frac{256}{243}}}; \quad \frac{32}{27}; \quad \frac{4}{3}; \quad \underline{\frac{3}{2}}; \quad \frac{128}{81}; \quad \frac{16}{9} \tag{6.10}$$

Základem Frygického módu (obr.6.21) je pentatonika **5. bluesová mollová** (nepodtržené tóny), kterou doplníme tónem $g - \frac{3}{2}$ z pentatoniky **4. mollové** a tónem $a - \frac{27}{16}$ z pentatoniky **4. mollové** (obr.6.22).

Frygický mód přináší **nový tón** *des* $\sim \frac{256}{243}$, který se nevyskytoval v pentatonikách. (Je to druhý z těch tří chybějících do 12-ti tónové pýthagorejské stupnice).

4. Lydický módus (6 ↑ + 0 ↓)

$$1;\quad \frac{9}{8};\quad \frac{81}{64};\quad \underline{\underline{\frac{729}{512}}};\quad \frac{3}{2};\quad \frac{27}{16};\quad \underline{\underline{\frac{243}{128}}} \tag{6.11}$$

Základem Lydického módu (obr.6.23) je pentatonika **1. durová** (nepodtržené tóny).

Tento mód přináší dva tóny, které nejsou v pentatonikách (dvakrát podtržené). Je to tón $h \sim \frac{243}{128}$, který nám dal už módus 1. Jónský. Dále úplně **novým** tónem je $fis \sim \frac{729}{512}$ (obr.6.24). U 7. módu dostaneme tón velice podobný tomuto tónu, což jak se ukáže, bude **zdrojem komplikací**...

5. Mixolydický módus (4 ↑ + 2 ↓)

$$1;\quad \frac{9}{8};\quad \underline{\frac{81}{64}};\quad \frac{4}{3};\quad \frac{3}{2};\quad \frac{27}{16};\quad \underline{\frac{16}{9}} \tag{6.12}$$

Základem Mixolydického módu (obr.6.25) je pentatonika **2. Bluesová durová** (nepodtržené tóny), kterou doplníme tónem $hes \sim \frac{16}{9}$ z pentatoniky **3. Egyptské** a tónem $e \sim \frac{81}{64}$ z pentatoniky **1. Durové** (obr.6.26).

Mixolydický mód neobsahuje **žádné nové tóny**, které by se nevyskytovaly v pentatonikách.

6. Aiolský módus (mollová stupnice) (2 ↑ + 4 ↓)

$$1;\quad \underline{\frac{9}{8}};\quad \frac{32}{27};\quad \frac{4}{3};\quad \frac{3}{2};\quad \underline{\frac{128}{81}};\quad \frac{16}{9} \tag{6.13}$$

Základem Aiolského módu (obr.6.27) je pentatonika **4. Mollová** (nepodtržené tóny), kterou doplníme tónem $d \sim \frac{9}{8}$ z pentatoniky **3. Egypt-**

ské a tónem *as* $\sim \frac{128}{81}$ z pentatoniky **5. Bluesové mollové** (obr.6.28).

Aiolský mód neobsahuje **žádné nové tóny**, které by se nevyskytovaly v pentatonikách.

7. Lokrický módus (0 ↑ + 6 ↓)

$$1;\quad \underline{\underline{\frac{256}{243}}};\quad \frac{32}{27};\quad \frac{4}{3};\quad \underline{\underline{\frac{1024}{729}}};\quad \frac{128}{81};\quad \frac{16}{9} \tag{6.14}$$

Základem Lokrického módu (obr.6.29) je pentatonika **5. bluesová mollová** (nepodtržené tóny).

Tento mód přináší dva tóny, které nejsou v pentatonikách (dvakrát podtržené). Je to tón *des* $\sim \frac{256}{243}$, který nám dal už módus 3. Frygický. Dále úplně **novým** tónem je *ges* $\sim \frac{1024}{729} \doteq 1,40$ (obr.6.30). U 4. módu jsme dostali tón velice podobný tomuto tónu, a sice tón *fis* $\sim \frac{729}{512} \doteq 1,42$. Proč *fis* a *ges* nesplývají? A jaké to má důsledky? Na to si posvítíme již za chvíli!

Celkový přehled všech módů pýthagorejské heptatoniky a jejich vztahu k pentatonickým módům vidíme na obr.6.11 a dále v apletu v GeoGebře https://ggbm.at/rkk4rppk.

Výpočtem se snadno přesvědčíme, že stejně jako u pentatoniky jsou i u heptatoniky itervaly mezi tóny ve všech módech jen dvojího druhu:

Intervaly Pýthagorejské heptatoniky

- $\frac{9}{8}$ je **pýthagorejský celý tón**
- $\frac{256}{243}$ je **pýthagorejský malý půltón** (*pýthagorejské limma, pýthagorejský diatonický půltón*)

Označme **celý tón** jako **C** a **malý půltón** jako **p**. Potom lze posloupnosti intervalů mezi tóny jednotlivých módů psát takto:

7 módů Pýthagorejské heptatoniky

1. mód: $CCpCCCp$ – durová
2. mód: $CpCCCpC$
3. mód: $pCCCpCC$
4. mód: $CCCpCCp$
5. mód: $CCpCCpC$
6. mód: $CpCCpCC$ – mollová
7. mód: $pCCpCCC$

Vidíme, že jednotlivé posloupnosti jsou jako u pentatoniky opět jen vzájemné cyklické záměny. To souhlasí i s kruhovými schématy, kdy jednotlivé módy heptatoniky jsou znázorněny jako vzájemně pootočené **heptagony**.

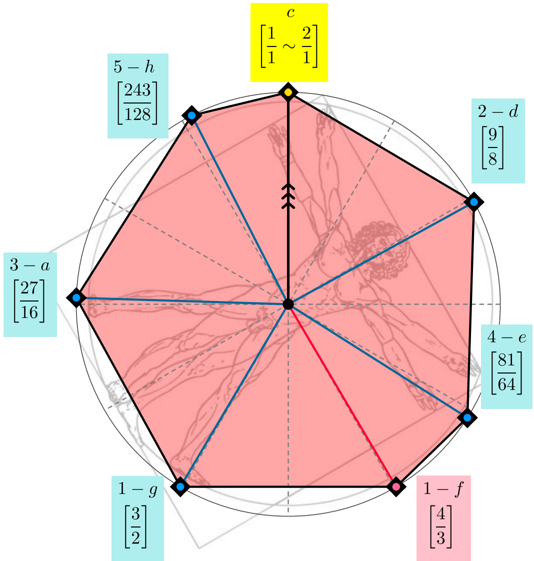
Vidíme, že naše pýthagorejská heptatonika obsahuje **2 půltóny** a **5 celých tónů**, přičemž oba půltóny jsou vždy odděleny dvěma či třemi celými tóny, takže jsou **co nejdál od sebe**. (tedy nikoli například $CCppCCC$ nebo $CCpCpCC$). Taková stupnice se nazývá **diatonická**.

Definice 5: Diatonická stupnice

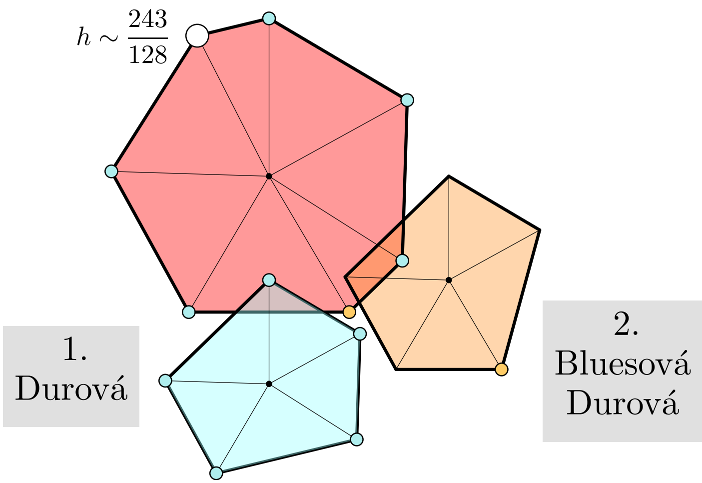
Diatonická stupnice je stupnice, která splňuje tři podmínky:
1) má sedm tónů (heptatonika)
2) z toho jsou 2 půltóny a 5 celých tónů
3) půltóny jsou co nejdál od sebe (tedy jsou odděleny dvěma nebo třemi celými tóny)

Na klavíru tvoří diatonickou stupnici 7 bílých kláves

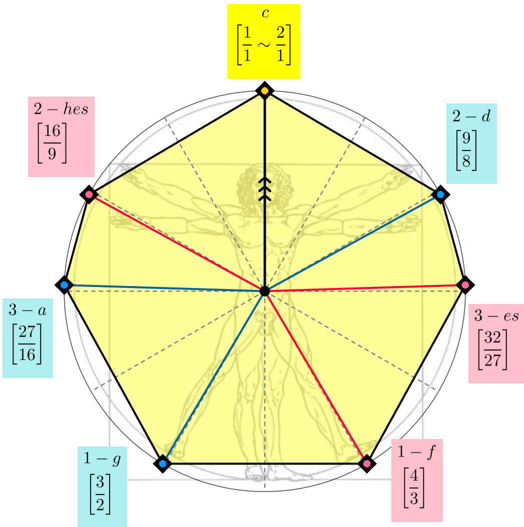
(c, d, e, f, g, a, h, c). (Ale nikoli v pýthagorejském, nýbrž v temperovaném ladění!).



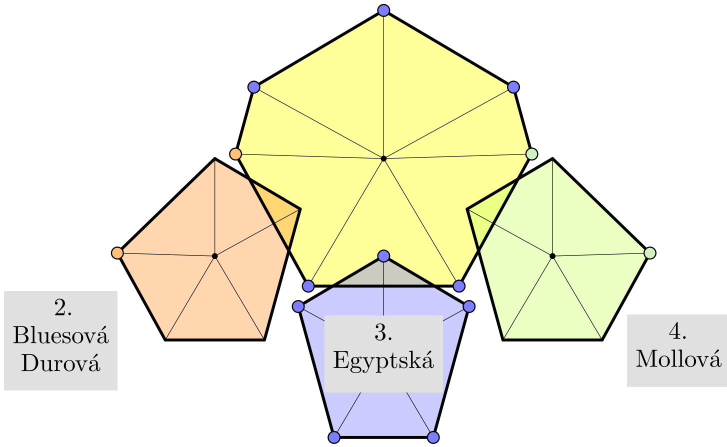
Obrázek 6.17: 1 – Jónský módus – **durová stupnice**



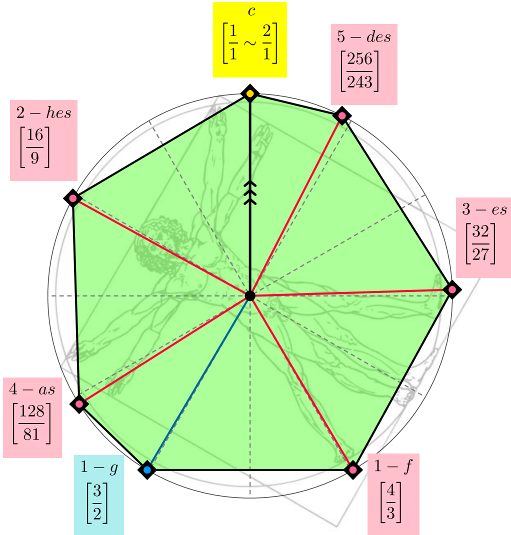
Obrázek 6.18: 1 – Jónský módus – stavba



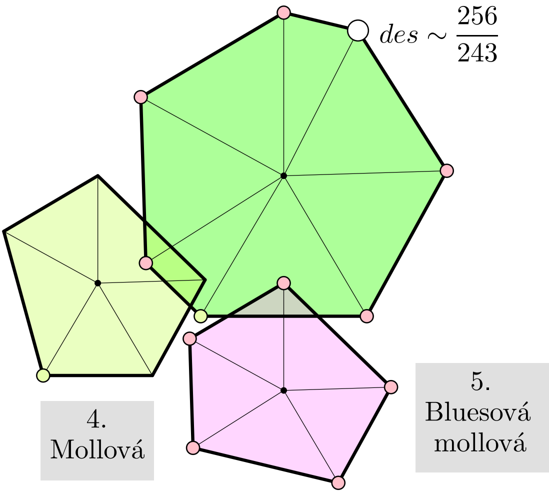
Obrázek 6.19: 2. Dórský módus



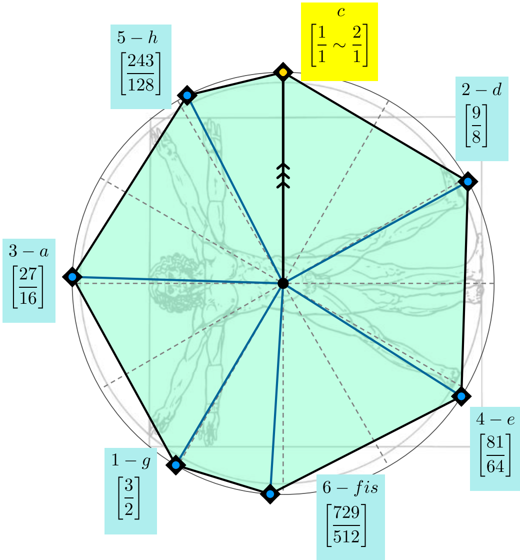
Obrázek 6.20: 2. Dórský módus – stavba



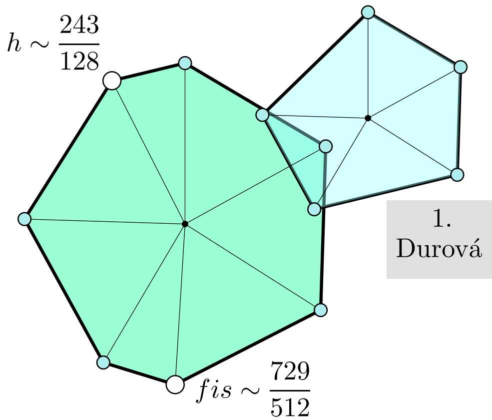
Obrázek 6.21: 3. Frygický módus



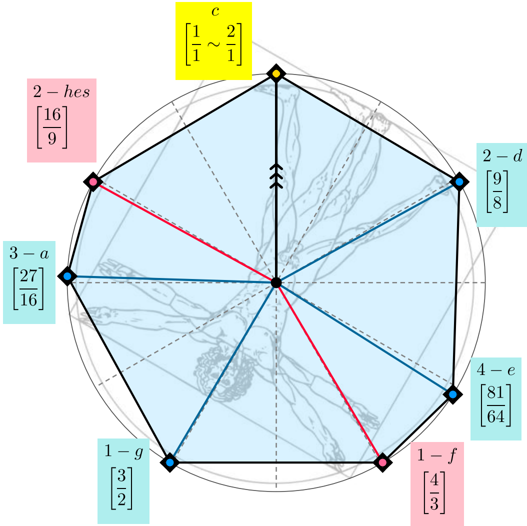
Obrázek 6.22: 3. Frygický módus – stavba



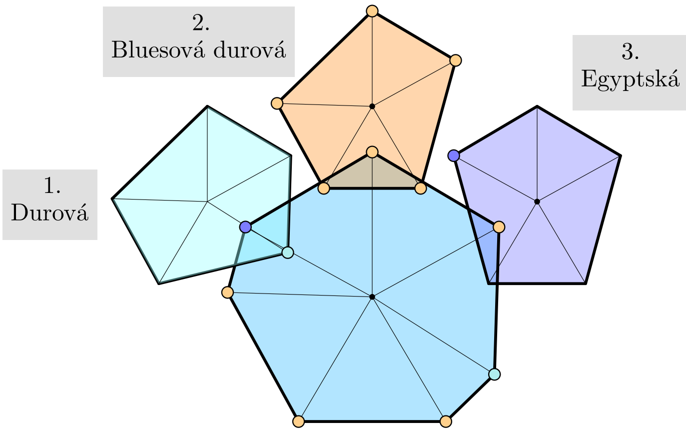
Obrázek 6.23: 4. Lydický módus



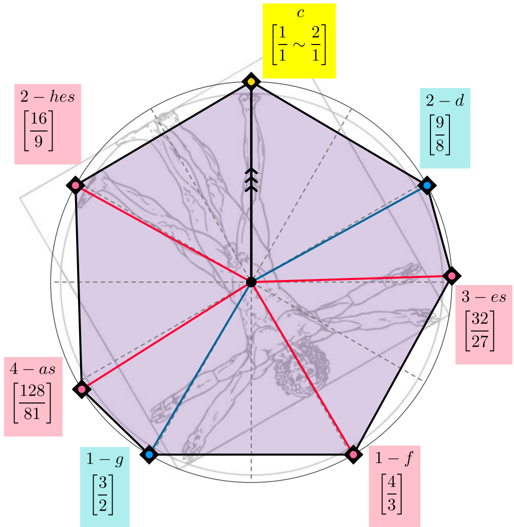
Obrázek 6.24: 4. Lydický módus – stavba



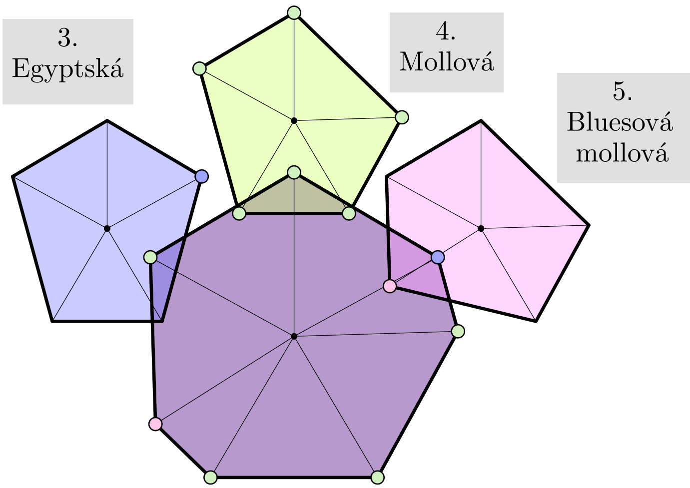
Obrázek 6.25: 5. Mixolydický módus



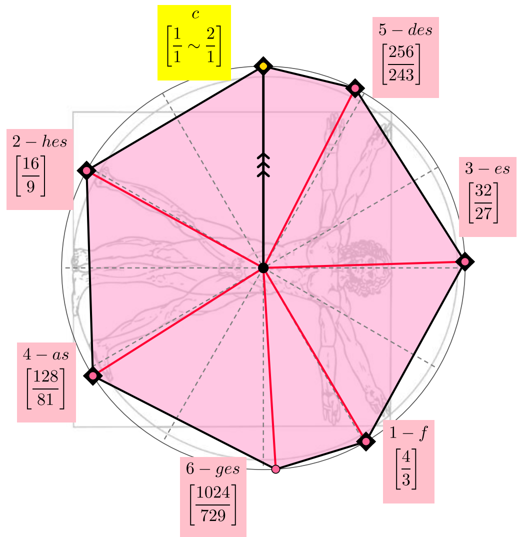
Obrázek 6.26: 5. Mixolydický módus – stavba



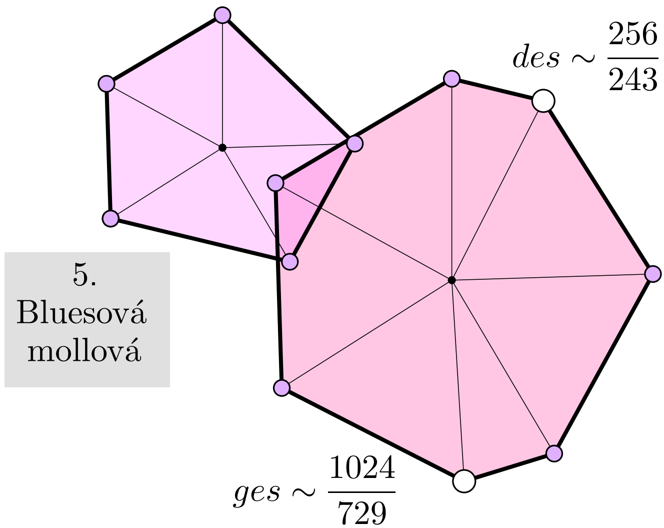
Obrázek 6.27: 6. Aiolský módus



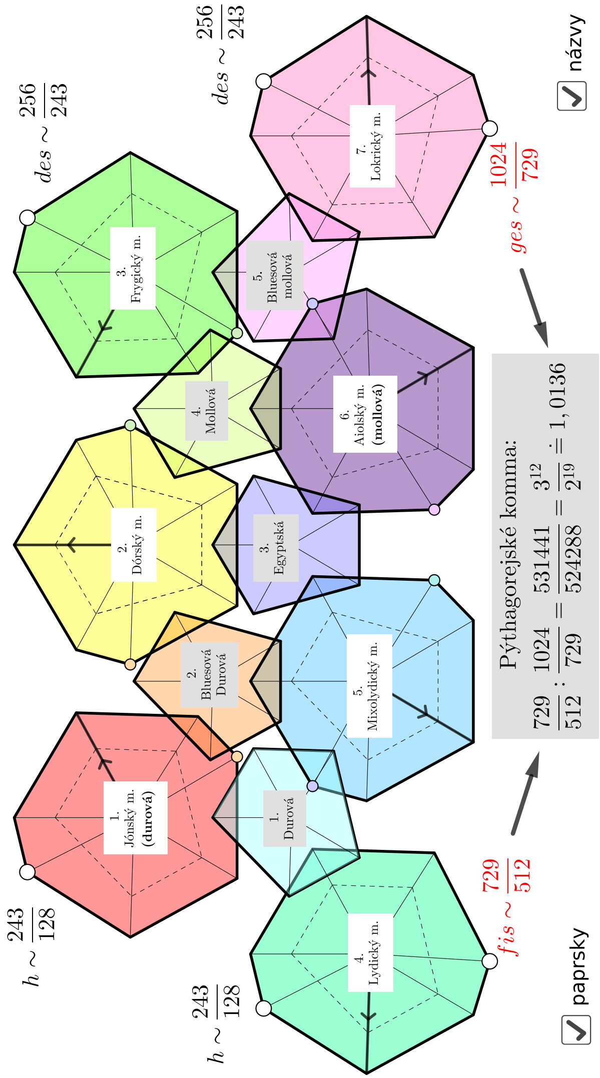
Obrázek 6.28: 6. Aiolský módus – stavba



Obrázek 6.29: 7. Lokrický módus

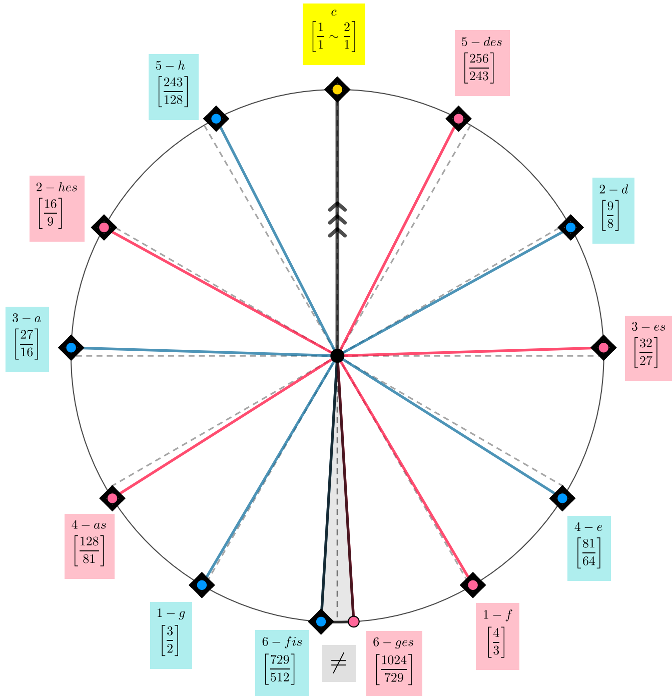


Obrázek 6.30: 7. Lokrický módus – stavba



Obrázek 6.31: Vztahy mezi módy pentatoniky a heptatoniky

6.6 Pýthagorejské komma poprvé útočí



Obrázek 6.32

Co nám dalo sedm módů heptatoniky? Dalo nám celkem 13 tónů (základní tón c + 6 kvint nahoru + 6 kvint dolů – viz obr.6.32 a aplet v GeověGebře https://ggbm.at/dkn6basa). Vidíme, že šestá *vzestupná* kvinta $fis \sim \frac{729}{512} \doteq 1,42$ je o trošičku vyšší než šestá *sestupná* kvinta $ges \sim \frac{1024}{729} \doteq 1,40$. To je ale lapálie.

To, že nám to nevyjde, bylo ale jasné už od začátku – již první vzestupná kvinta g nepadla na ciferníku přesně do čísla 7, ale kousek dál, stejně tak první sestupná kvinta f vyšla kousek před číslo 5. Dalšími skoky se tato odchylka jen zvyšovala.

Početně je to také zřejmé – aby se nějaká kvinta sešla s jinou, muselo by platit

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m \cdot 2^r = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 2^s$$

zde mocniny čísla 3/2 znamenají kvintový skok nahoru či dolů – podla znaménka m, n a mocniny čísla 2 znamenají návrat nahoru či dolů (podle znaménka r, s) do naší oktávy. Po úpravě by muselo platit

$$3^{m-n} = 2^{s+m-r-n}$$

čili

$$3^p = 2^q \tag{6.15}$$

Ale tato rovnost nemůže nastat, pač levá strana je lichá a pravá sudá.

Kdybychom chtěli, aby tóny fis a ges splynuly v jeden (na ciferníku v čísle 6), museli bychom **dokonalou kvintu** $\frac{3}{2}$, která nám generuje další tóny **zmenšit** trošku tak, aby první vygenerovaný tón g padl na ciferníku přesně tam, kde je číslo 7. Pak by nám všechny další vygenerované tóny padaly přesně na čísla na ciferníku a tóny fis a ges by splynuly v jeden v čísle 6. Tento postup je základem *rovnoměrného temperovaného* ladění (viz později).

Rozdíl mezi tóny fis a ges je sice docela malý, ale významný. Tento interval se nazývá **Pýthagorejské komma** a jeho hodnota je:

Pýthagorejské komma

$$\frac{729}{512} : \frac{1024}{729} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} \doteq 1,0136 \tag{6.16}$$

V dalším uvidíme že se nám bude Pýthagorejské komma objevovat ještě několikrát.

Zatím jsme vyvodili pomocí vzestupných a sestupných kvint sedm módů heptatoniky (vznikla *diatonická stupnice*). Sedm tónů je príma, například *Jónský módus* ($5 \uparrow +1 \downarrow$) – tedy naše durová stupnice (c, d, e, f, g, a, h, c) tvoří všechny **bílé klávesy na klavíru** a umožní nám zahrát spoustu bezvadnejch songů. Třeba „Ovčácí čtverácí“. Pokud bychom však chtěli zahrát tuhle pecku vod déčka, tak nám bude chybět klávesa, pač potřebujeme fis (černá klávesa). Proto je rozumné si prostor oktávy tvořený 7 tóny, kde se střídají celé tóny a půltóny, doplnit na 12 tónů (jak nám nabízí obrázek 6.32), kde je oktáva rozdělena po půltónech. Takže si vytvoříme 12-ti tónovou – tzv. **chromatickou** – stupnici.

6.7 Pýthagorejská chromatická stupnice

Lecgo-uonit! Nó, upřímně řečeno, už máme těmi heptatonickými módy pěkně **našlápnuto** – v obrázku 6.32 máme pohromadě všechny tóny, které je schopno vygenerovat 6 vzestupných a 6 sestupných kvint (spolu se základním tńem c je jich 13 – jeden je bohužel kužel rozštěpený). Jak víme z tvorby pentatonik a heptatonik, je toto ale jen jeden z 12 možných módů pro 12-titoniku ($6 \uparrow +6 \downarrow$). Na tvorbu jednotlivých dalších módů se ale vykašleme, pač víme, že podstatné jsou jen ty **krajní** ($11 \uparrow +0 \downarrow$ a $0 \uparrow +11 \downarrow$). Dopočítáme si frekvence 11-ti vzestupných a 11-ti sestupných kvint a zobrazíme si je (viz obr.6.33 + aplet v Geově Gebře https://ggbm.at/mqy3kumn) (V obrázku jsou ještě 12-té kvinty, kdy vzestupná překročí tón c o pýthagorejské komma a sestupná je o toto komma níže než tón c). Co tomu říkáš? To je **silice**! Vidíme, že se nám každý tón na ciferníku (kromě základního c) **rozštěpil na dva** a mezi nimi je pýthagorejské komma!

Nyní máme dvě možnosti – zachovat rozštěpení a vytvořit stupnici s 22 tóny nebo použít jen 12 tónů.

6.7.1 12-ti tónová stupnice

Vybereme k základnímu tónu c 11 tónů. Vezmeme ty, které jsou dány co nejnižšími číselnými poměry. V obrázku 6.33 jsou to tóny označené černými čtverečky. Porovnáním s obrázkem 6.32 vidíme, že jsou to všechno tóny, které jsme už dostali díky sedmi módům heptatoniky – kromě tónu $ges \sim \frac{1024}{729}$, který vypustíme.

Vypadá to takto: obr.6.34 + aplet v GeoGebře https://ggbm.at/tmm5sj7h. Dostáváme dva druhy půltónů a dva druhy celých tónů:

Celé tóny a půltóny Pýthagorejské 12-ti tónové stupnice

- $\frac{9}{8} = 1,125$ je **pýthagorejský velký celý tón**
- $\frac{65536}{59049} \doteq 1,110$ je **pýthagorejský malý celý tón**
- $\frac{2187}{2048} \doteq 1,068$ je **pýthagorejský velký půltón** (*pýthagorejské apotomé, pýthagorejský chromatický půltón*)
- $\frac{256}{243} \doteq 1,053$ je **pýthagorejský malý půltón** (*pýthagorejské limma, pýthagorejský diatonický půltón*)

V obrázku 6.35 vidíme kvintu vytvořenou od tónu c, která je čistá. podobně čisté jsou i kvinty vytvořené od dalších tónů naší stupnice, až na jedinou kvintu, vytvořenou od tónu fis (obr.6.36). Ta je o trochu nižší než čistá kvinta a zove se **vlčí kvinta** (je jako vytí vlků). Odpovídá jí interval $\frac{2^{18}}{3^{11}} \doteq 1,48$ – nikoli tedy potřebných 1,5. Tato nedokonalost je způsobena tím, že tón fis jsme vytvořili jako 6.*vzestupnou* kvintu, kdežto *des* jako 5.*sestupnou* kvintu. Jak již víme (vztah 6.15), posloupnost kvint není uzavřená a žádné dvě kvinty (ať už vzestupné či sestupné) se nemohou nikdy sejít.

Kvinty pýthagorejské 12-ti tónové stupnice

- $\frac{3}{2} = 1,5$ je **čistá kvinta** – je jich 11, od každého tónu kromě fis
- $\frac{2^{18}}{3^{11}} = \frac{262144}{177147} \doteq 1,480$ je **vlčí kvinta** – je jen 1, od fis viz video na tubě: https://youtu.be/J4HwXwvCRp8

Snadno ověříme, že vlčí kvinta je o pýthagorejské komma nižší než čistá kvinta

$$\frac{\text{čistá kvinta}}{\text{vlčí kvinta}} = \frac{3:2}{2^{18}:3^{11}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \text{Pýthagorejské komma}$$

Tento vztah je krástně vidět i z obrázku 6.36. Od tónu fis bychom čistou kvintu dostali skokem na *cis*, které jsme ale při výběru tónů do 12-ti tónové stupnice nepoužili. A rozdíl mezi *cis* a *des* je právě *vlčí kvinta.*

6.7.2 Problémy pýthagorejského ladění

1) Vlčí kvinta

Viz výše (https://youtu.be/J4HwXwvCRp8).

2) Tercie

Tercie $\frac{81}{64}$ znějí dost blbě! (https://youtu.be/hV9oWk0QrBo)

3) Akordy

Akordy C, G, F zněnjí v pýthagorejském ladění hrozně – mohou za to tercie (https://youtu.be/82tKQmcU0ak).

4) Transpozice

Dejme tomu, že naladíme klávesy klavíru od tónu c v pýthagorejském ladění. Zahrajeme nějakou skladbu, která zní od tohoto tónu dobře. Protože půltóny nejsou totožné (zde máme 2 různé půltóny), tak zahrajeme-li tutéž skladbu od jiného tónu, například od fis, změní se pořadí velkých a malých půltónů a skladba bude znít **falešně**. (https://youtu.be/yDWaeK1rUtY). V ukázce v odkazu výše je například koleda „Veselé vánoční hody“, která začíná tóny $c - e - g$ (stejně jako „Ovčáci čtveráci“). Po transpozici do tónu fis budou první tři tóny $fis - hes - des$. (viz obr.6.37). Interval mezi tóny 2 a 3 se nezmění (malá tercie $\frac{32}{27}$), ale interval mezi tóny 1 a 2 se transpozicí sníží z velké tercie $\frac{81}{64}$ o *pýthagorejské komma* na hodnotu $\frac{8192}{6591}$.

Kdybychom chtěli, aby skladba po transpozici zněla stále stejně, museli bychom mít všechny púltóny stejné – to dokáže jen **rovnoměrně temperované ladění** – viz dále.

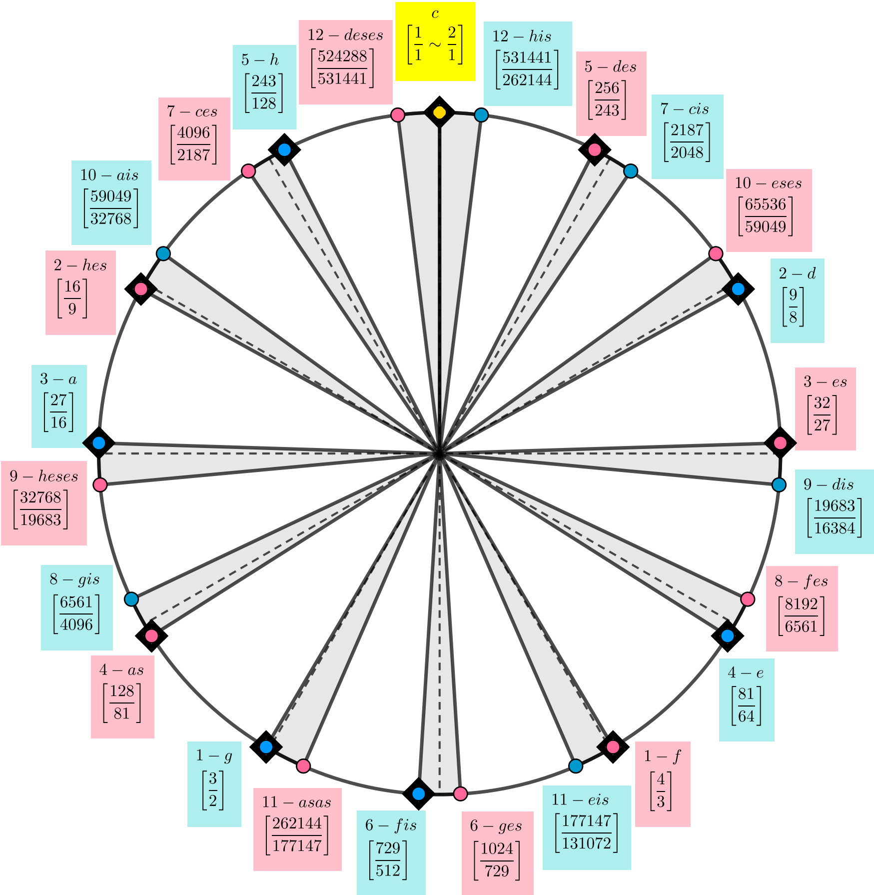
Shrnutí

Pýthagorejské ladění se v hudbě používalo až do středověku. Kvůli špatně znějícím akordům brzdilo rozvoj polyfonie. Ty klucí se s tím halt museli poprat.

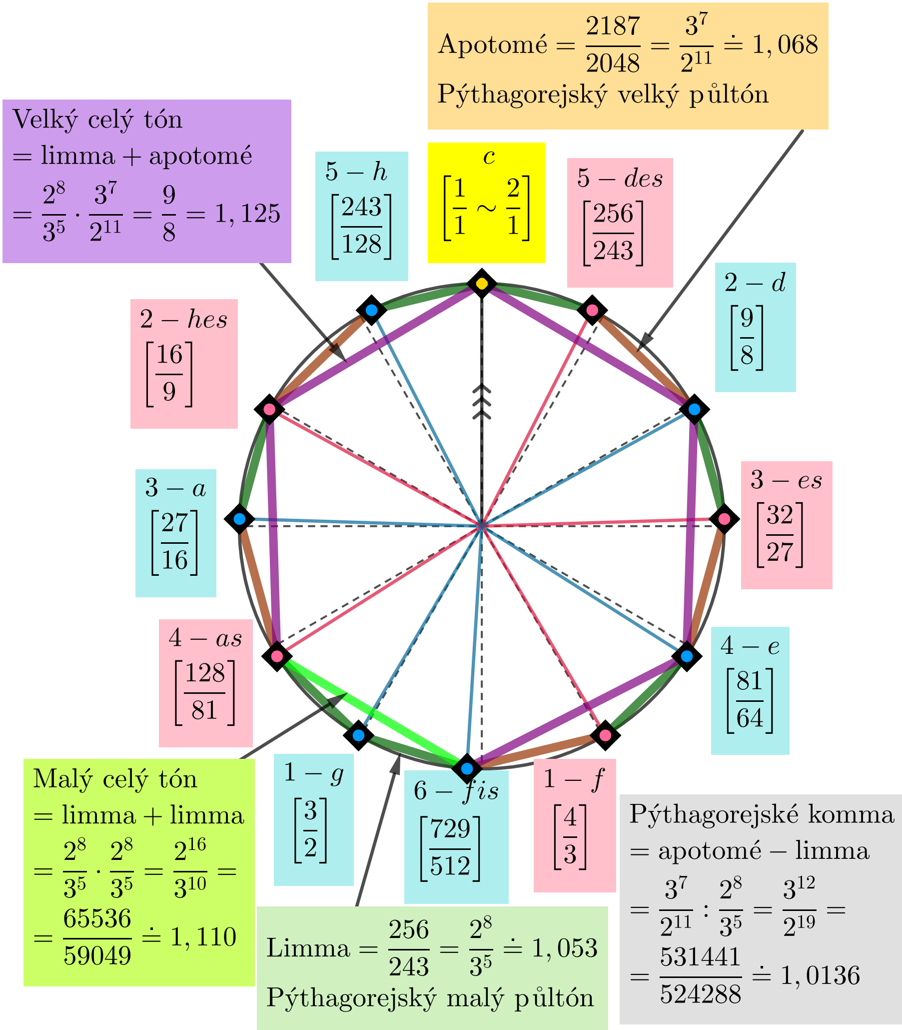
Tyto problémy ale neodrazují ani dnešní hudebníky:

Mikrotonální kytara:
https://www.youtube.com/channel/UCf7D886oBahxSSwBRVIib0A a také https://www.youtube.com/watch?v=MYK_PF9WTRE

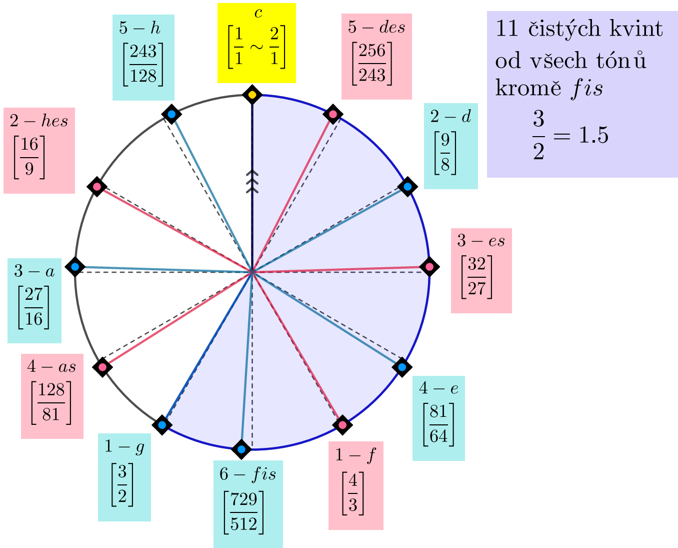
Lou Harrison - Sonata in Ishartum:
https://www.youtube.com/watch?v=JxNgd-kn5go



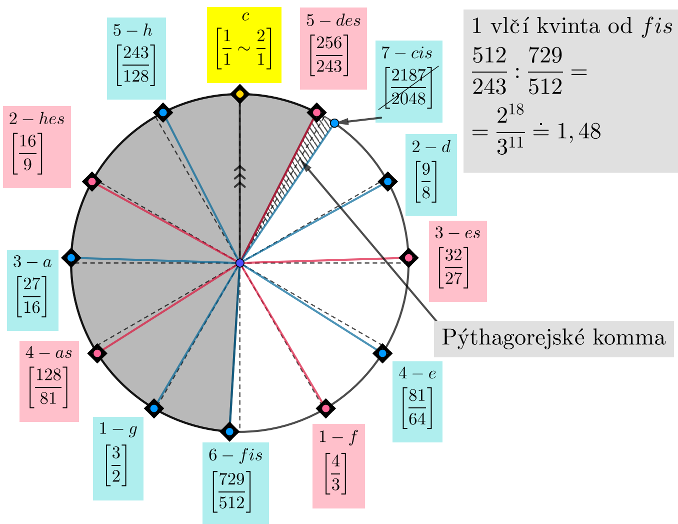
Obrázek 6.33: 12 kvint nahoru + 12 kvint dolů!



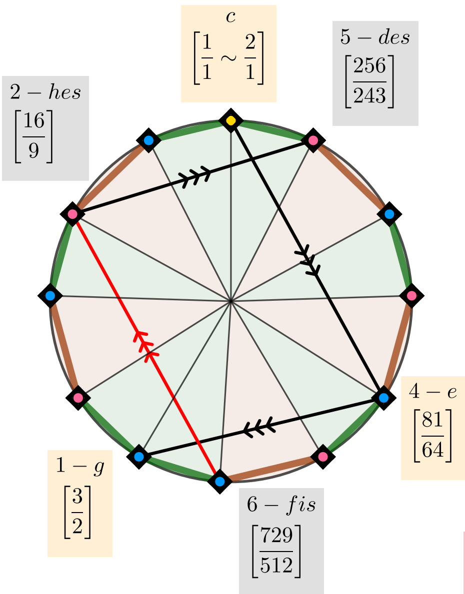
Obrázek 6.34: Pýthagorejská 12-ti tónová



Obrázek 6.35: Čisté kvinty



Obrázek 6.36: Vlčí kvinta



$Apotomé = \frac{3^7}{2^{11}} \doteq 1,068$

Pýthagorejský velký půltón

$Limma = \frac{2^8}{3^5} \doteq 1,053$

Pýthagorejský malý půltón

$c - e : LALA \sim \frac{81}{64} \doteq 1,266$

$e - g : LAL \sim \frac{32}{27} \doteq 1,185$

$fis - hes : LLAL \sim \frac{8192}{6591} \doteq 1,249$

$hes - des : ALL \sim \frac{32}{27} \doteq 1,185$

Rozdíl mezi $c - e$ a $fis - hes$ je $A - L$, což je *pýthagorejské komma*!

Obrázek 6.37: Veselé vánoční hody – problém transpozice

Kapitola 7

5-LIMITNÍ LADĚNÍ

7.1 5-limit

https://en.wikipedia.org/wiki/Five-limit_tuning

In Pythagorean tuning, perhaps the first tuning system theorized in the West,[7] the only highly consonant intervals were the perfect fifth and its inversion, the perfect fourth. The Pythagorean major third (81:64) and minor third (32:27) were dissonant, and this prevented musicians from using triads and chords, forcing them for centuries to write music with relatively simple texture. In late Middle Ages, musicians realized that by slightly tempering the pitch of some notes, the Pythagorean thirds could be made consonant. For instance, if you decrease by a syntonic comma (81:80) the frequency of E, C-E (a major third), and E-G (a minor third) become just. Namely, C-E is narrowed to a justly intonated ratio of

and at the same time E-G is widened to the just ratio of

The drawback is that the fifths A-E and E-B, by flattening E, become almost as dissonant as the Pythagorean wolf fifth. But the fifth C-G stays consonant, since only E has been flattened (C-E * E-G = 5/4 * 6/5 = 3/2), and can be used together with C-E to produce a C-major triad (C-E-G).

By generalizing this simple rationale, Gioseffo Zarlino, in the late sixteenth century, created the first justly intonated 7-tone (diatonic) scale, which contained pure perfect fifths (3:2), pure major thirds, and pure minor thirds:

This is a sequence of just major thirds (M3, ratio 5:4) and just minor thirds (m3, ratio 6:5), starting from F:

F + M3 + m3 + M3 + m3 + M3 + m3

Since M3 + m3 = P5 (perfect fifth), i.e., 5/4 * 6/5 = 3/2, this is exactly equivalent to the diatonic scale obtained in 5-limit just intonation, and hence can be viewed as a subset of the construction table used for the 12-tone (chromatic) scale:

where both rows are sequences of just fifths, and F-A, C-E, G-B are just major thirds: M3 M3 M3 + + + F + P5 + P5 + P5

Aplety v GeoGebře: https://www.geogebra.org/m/hvpgyfwd#chapter/380467

Kapitola 8

TEMPEROVANÁ LADĚNÍ

8.1 Středotónové ladění

8.2 Rovnoměrně temperované ladění