

El Crecimiento de un Árbol

1. OBJETIVO:

Que el estudiante identifique la relación funcional entre dos variables, el tipo de esta relación, la determinación de su dominio, su imagen y bosqueje la gráfica de su velocidad instantánea de cambio.

La práctica incide sobre el desarrollo de las siguientes:

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS ¹	COMPETENCIAS GENÉRICAS ²	HABILIDADES SOCIOEMOCIONALES ³				
<p>1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.</p> <p>2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.</p> <p>3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.</p> <p>4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.</p> <p>8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.</p>	<p>Se expresa y se comunica</p> <p>4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. • Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas. <p>Piensa crítica y reflexivamente</p> <p>5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas. • Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información. <p>6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva</p> <ul style="list-style-type: none"> • Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética. <p>Aprende de forma autónoma</p> <p>7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana. <p>Trabaja en forma colaborativa</p> <p>8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. • Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo. 	<p>Colaboración y trabajo en equipo</p> <ul style="list-style-type: none"> • Trabaja en equipo de manera constructiva y ejerce un liderazgo participativo y responsable, • Propone alternativas para actuar y solucionar problemas. • Asume una actitud constructiva. 				
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 2px;">Transversalidad con los cursos de</td> <td style="padding: 2px;">Biología</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 2px;">Ecología</td> </tr> </table>	Transversalidad con los cursos de	Biología		Ecología	
Transversalidad con los cursos de	Biología					
	Ecología					

¹ <http://www.sep.gob.mx/work/sites/sep1/resources/LocalContent/111950/9/a486.htm>

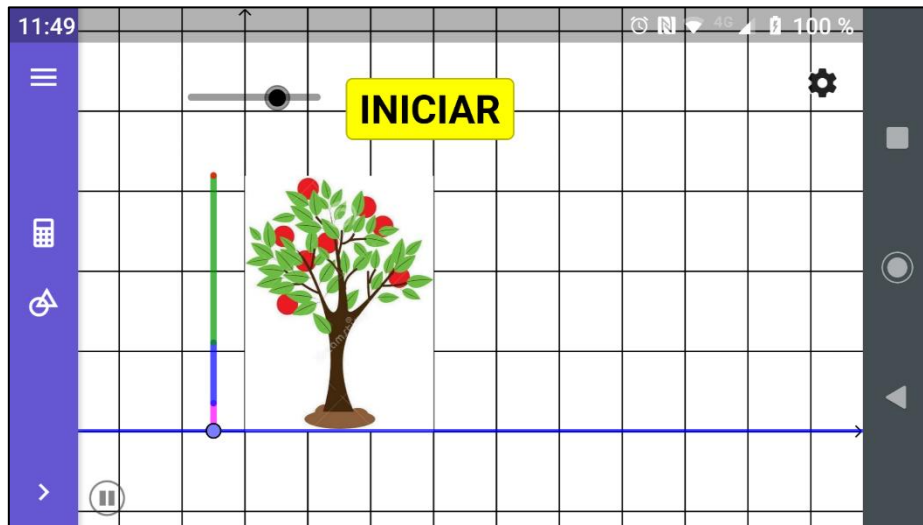
² http://www.sems.gob.mx/aspnv/video/Diptico_Competiciones_altas.pdf

³ https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/264246/Las_HSE_en_nuevo_modelo_educativo.pdf

PLANTEAMIENTO

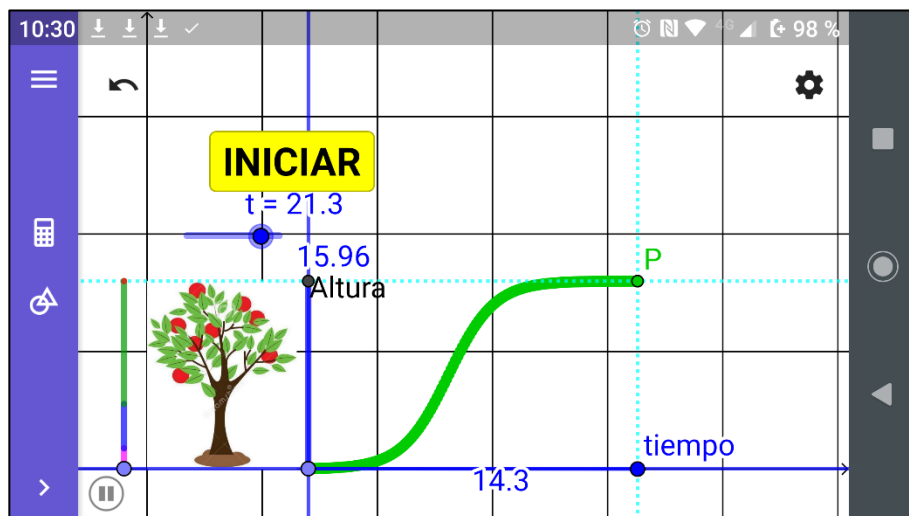
Probablemente, cuando cursabas tu educación primaria, tuviste la grata experiencia (y la puedes repetir) de colocar un frijol en un algodón con agua y, posteriormente, germinada la semilla la llevaste a la tierra para ver cómo crecía la planta; ¿lo recuerdas? Si lo viviste, difícilmente habrás pensado que ésta no solo se relacionaba con la biología, sino que tiene una íntima relación con la matemática, en particular, con el Cálculo.

Para evidenciar esta relación abre en tu dispositivo el archivo **crecimientoárbol.ggb** (<https://www.geogebra.org/m/jfdbknnc>)



En colaboración con tus compañeros de equipo, contesta las preguntas siguientes:

1. ¿Consideras que algo cambia en la imagen que observas? _____
2. Si la respuesta anterior es afirmativa, en tu opinión, ¿qué es lo que cambia? _____
3. Enseguida, abre el archivo **crecimientoárbol2.ggb** en tu dispositivo (<https://www.geogebra.org/m/a9nya7bm>)



4. ¿Qué variables son las que se relacionan en esta gráfica? _____

5. ¿Cuál es la variable dependiente? _____
6. ¿Cuál es la variable independiente? _____
7. ¿Cuál es el dominio de esta función? _____
8. ¿Cuál es su imagen? _____

9. Considerando que la curva que observamos en la imagen anterior, es consecuencia del crecimiento del árbol, ésta representa la gráfica de una función

- a) Lineal b) cuadrática c) exponencial d) ninguna de las anteriores

10. ¿Cuál de los siguientes enunciados definiría mejor el comportamiento gráfico que observas en esta función?

- | | | |
|--|---|--|
| c) A medida que el tiempo transcurre la altura del árbol aumenta y después disminuye | b) A medida que el tiempo transcurre la altura del árbol aumenta rápidamente y después, se estabiliza | a) A medida que el tiempo transcurre la altura del árbol primero aumenta lentamente, después crece rápidamente y finalmente, de forma gradual, se estabiliza |
|--|---|--|

11. Las funciones cuya gráfica se asemeja a la que obtenemos para el crecimiento de las plantas en general, como lo observamos en esta actividad, se denominan funciones **LOGÍSTICAS** o funciones **S**, por su parecido con esta letra. Revisa la página http://e-ducativa.catedu.es/44700165/aula/archivos/repositorio/1750/1998/html/4_la_funcion_logstica.html para mayor información. En ella encontrarás que el modelo de la función logística es

$$P(t) = \frac{1}{1 + ke^{-at}}$$

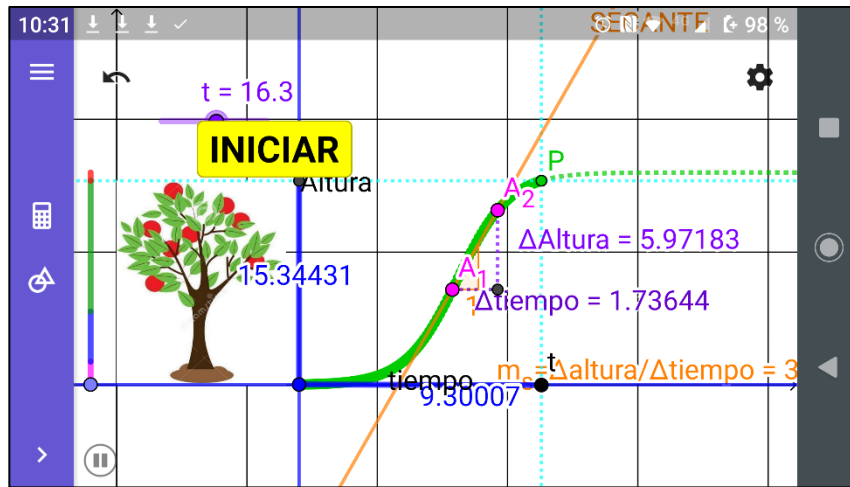
Los valores de k y a varían según los datos a modelar.

Esta expresión nos deja claro que la **función logística** o **función S** también es un tipo de función **exponencial**.

12. Habiendo identificado las variables presentes en esta función, ¿cómo la representarías?

- a) *tiempo*(*Altura*) b) *Altura*(*tiempo*) c) *Altura*(*P*)

13. Ahora, hablemos de cómo cambia la *Altura*(*tiempo*), cuando alcanza su altura máxima. Para ello, abre el archivo **crecimientoárbol3.ggb** (<https://www.geogebra.org/m/kgfzx6qp>)



14. Enseguida, coloca a A_1 y A_2 en dos posiciones distantes y ve acercando A_1 a A_2 **GRADUALMENTE** (únicamente mueve a A_1 ; a A_2 mantenlo fijo). Para cada nueva posición de A_1 anota los valores de Δ tiempo, de Δ Altura y de m_s en la tabla siguiente. Repite esto hasta que A_1 quede tan cerca como sea posible de A_2 **sin que se lleguen a unir**. Para ello, haz **Zoom In (acercamiento)** para tener en pantalla a los puntos A_1 y A_2 , al menos 5 veces hasta que los Δ sean del orden de las cienmilésimas

Δ tiempo	Δ Altura	$m_s = \frac{\Delta \text{Altura}}{\Delta \text{tiempo}}$	$ \Delta m_s $

NOTA: Recuerda que en actividades anteriores a la expresión $\frac{\Delta \text{Altura}}{\Delta \text{tiempo}}$ le denominamos **velocidad de cambio promedio**

15. ¿Cómo calificarías al **último** valor de Δ tiempo que registraste en la tabla anterior?

a) valor grande

b) valor pequeño

c) valor infinitamente pequeño

16. ¿Cómo calificarías al **último** valor de Δ Altura que registraste en la tabla anterior?

a) valor grande

b) valor pequeño

c) valor infinitamente pequeño

17. Sin embargo, al realizar estos cambios ¿qué observas que sucede con el valor de $m_s = \frac{\Delta \text{Altura}}{\Delta \text{tiempo}}$ que registraste en la tabla anterior?

a) Cada vez m_s se vuelve más y más grande

b) Cada vez m_s se vuelve más y más pequeña

c) El valor de m_s prácticamente no cambia

Aquí es importante destacar que, si se continua acercando el punto A_1 al punto A_2 el valor de la $m_s = \frac{\Delta \text{Altura}}{\Delta \text{tiempo}}$ ya no cambia. En matemáticas esto se expresa con la frase **“porque ya llegó al límite”**.

18. ¿Cómo consideras el último valor de $|\Delta m_s|$?

a) valor grande

b) valor pequeño

c) valor infinitamente pequeño

La noción de valores infinitamente pequeños surgió en los inicios del **Cálculo** y se les dio el nombre de **DIFERENCIALES**. Son cambios infinitamente pequeños, pero que no llegan a ser iguales a cero. Por ello, para escribirlos ya no se utiliza el símbolo Δ sino que se representan con una d y la razón de cambio promedio que en nuestro caso es

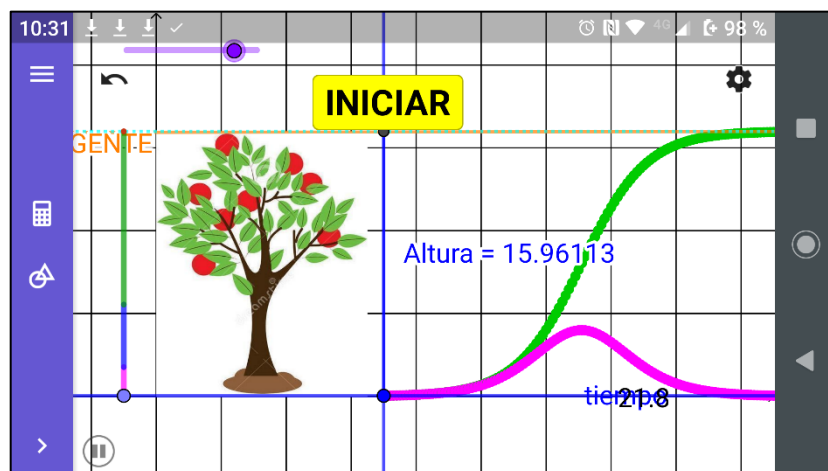
$$m_s = \frac{\Delta \text{Altura}}{\Delta \text{tiempo}}$$

y entonces podemos decir que

$$\lim_{\Delta \text{tiempo} \rightarrow 0} \frac{\Delta \text{Altura}}{\Delta \text{tiempo}} = m_t = \frac{d \text{Altura}}{d \text{tiempo}}$$

que se considera una **velocidad instantánea** porque la diferencia de tiempo entre ambos puntos es prácticamente, insignificante.

Antes de continuar, analicemos cómo se comporta esta función y su velocidad de crecimiento. Para ello, carga en tu dispositivo la actividad **crecimientoárbol4.ggb** (<https://www.geogebra.org/m/rjg8xg2q>)



19. Considerando que toda la función es creciente, durante todo su crecimiento su **velocidad de crecimiento** es:

a) positiva

b) negativa

c) cero

20. Cuando al principio, la planta crece lentamente, su velocidad es

a) alta

b) baja

c) cero

21. Cuando, después de la etapa inicial, la planta comienza a crecer más rápidamente, su velocidad de crecimiento es:

a) alta

b) baja

c) cero

22. Y, cuando la planta comienza a llegar a su etapa adulta (árbol), y su crecimiento se vuelve muy lento, su velocidad de crecimiento es:

a) alta

b) baja

c) casi cero

23. Resumiendo tus respuestas anteriores, desde que la planta brota del suelo hasta que el árbol llega a su madurez, podemos decir que la **VELOCIDAD DE CRECIMIENTO** pasa de:

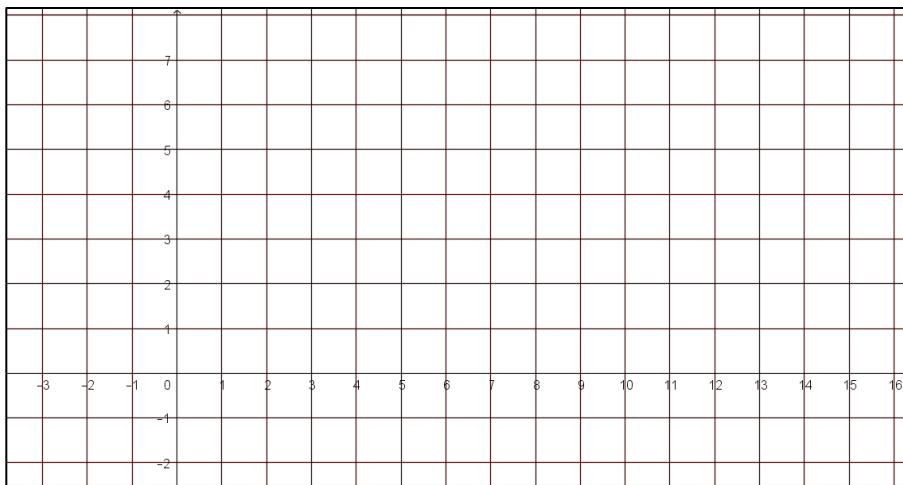
a) aumentar a disminuir

b) disminuir a aumentar

c) aumentar y aumentar

d) disminuir y disminuir

24. Bosqueja una gráfica donde expreses cómo se comporta la velocidad de crecimiento del árbol a medida que su tiempo de vida transcurre, que coincida con la opción que seleccionaste en la pregunta anterior:



Cuando en una función se identifica en un punto, la presencia de un cambio en el comportamiento de su velocidad (**creciente – decreciente o decreciente – creciente**) se dice que ese punto es **UN PUNTO DE INFLEXIÓN**.

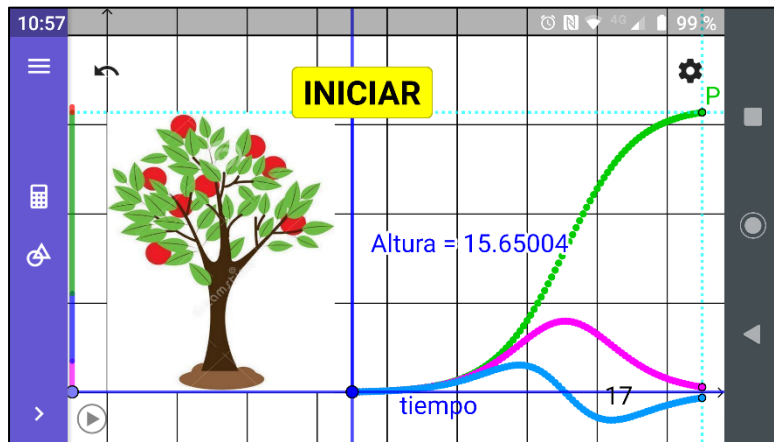
25. Observa que, en la pantalla de tu dispositivo, además de la gráfica de la función **Altura(tiempo)** aparece una segunda gráfica. Si consideramos que ésta es la gráfica de una función, ¿qué variables están presentes en ella?, ¿cuál sería la variable dependiente?, ¿cuál la independiente? Comenta tu respuesta con tus compañeros de equipo _____

26. ¿Ubicas en la gráfica de la función **Altura(tiempo)**, la presencia de un punto de inflexión?, ¿dónde? _____

Para concluir esta actividad, es importante mencionar un aspecto relacionado con un cierto tipo de comportamiento en algunas funciones. En ciertos casos, se observa que una función, como en este caso **Altura(tiempo)**, a medida que la variable independiente aumenta (*tiempo*), el valor de su variable dependiente (*Altura*) prácticamente no cambia y podríamos pensar que su valor tiene un tope o límite. Este límite se representa con una línea recta llamada **ASÍNTOTA**.

27. Para el caso de nuestra actividad, ¿cuál es la ecuación de la asíntota de la función **Altura(tiempo)**? _____

28. A continuación, abre en tu dispositivo el archivo **crecimientodearbol5.ggb** (<https://www.geogebra.org/m/sp7hukyd>)



29. ¿Qué nuevo elemento idénticas en este gráfico respecto del anterior?, ¿es el gráfico de una función? _____

30. ¿Encuentras alguna relación entre los tres gráficos?, ¿cuál? _____

31. Si tu respuesta es afirmativa, ¿qué variables están presentes en esa función?, ¿cuál es la variable dependiente?, ¿cuál es la variable independiente? _____

32. Investiga cuáles son las diferentes etapas que se pueden identificar en el crecimiento de un árbol y cuáles son críticas para su vida _____

33. ¿Cuáles son los principales peligros a los que se enfrentan las diferentes especies de vegetación?, ¿qué hacer para prevenirlos? _____