Rechnerische Bestimmung der Tangentensteigung über den Grenzwert

Dieses Arbeitsblatt gehört zum GeoGebraBook *Einführung Differenzialrechnung Kompakt*. Nach der schrittweisen Bestimmung von Tangentensteigungen für eine Stelle x_0 wird hier ein Weg gezeigt, das über eine Grenzwertbildung schneller und sauberer zu machen.

Aufgabe

Bestimme die Steigung der Tangenten an den Graphen der Funktion $f(x) = -2x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Lösung

Strategie:
Beim schrittweisen berechnen der Tangentensteigung haben wir immer kleinere Werte für h eingesetzt, um den Grenzwert am Ende erahnen zu können. Jetzt lassen wir h als Variable stehen und kümmern uns erst am Ende um die Grenzwertbildung.

$$\begin{aligned}
m_t &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} && \mid \text{Funktion einsetzen}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2\cdot(x_0+h)^2-(-2)\cdot x_0^2}{h} && \mid x_0 = 2 \text{ einsetzen}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2\cdot(2+h)^2-(-2)\cdot 2^2}{h} && \mid \text{vereinfachen}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2\cdot(2+h)^2+8}{h} && \mid \text{binomische Fromeln anwenden}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2\cdot(2^2+2\cdot 2\cdot h+h^2)+8}{h} && \mid \text{vereinfachen, ausmultiplizieren}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{-8}-8h-2h^2\cancel{+8}}{h} && \mid \text{ausklammern von } h\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(-8-2h)}{\cancel{h}} && \mid \text{kürzen}\\
&= \lim_{h\to 0}(-8-2h) && \mid \text{h gegen Null gehen lassen}\\
&= -8
\end{aligned}$$

Durch das Ausklammern und kürzen von h wird erreicht, dass das h aus dem Nenner verschwindet. Und damit lässt sich der Grenzwert für $h \to 0$ nun leicht bilden. Das geht bei vielen Funktionen in ganz ähnlicher Weise.

Übung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 2$. Bestimme die Steigung an der Stelle $x_0 = 0,25$.
(Ergebnis: $f'(0,25) = 0,5$)