Problemas – Tema 4

Problemas resueltos - 10 - sistemas con parámetro - inhabilitar Gauss - parte 4 de 4

1. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} ax+7y+5z=0 \\ x+ay+z=3 \\ y+z=-2 \end{matrix}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ **.**

b) Resolver el sistema, si es posible, para $a=4$ **.**

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$ → intercambiamos F_3 con F_2 → $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & a & 1 & 3 \end{array}\right)$ → $F'_3=aF_3-F_1$ (el valor $a=0$ inhabilita esta operación, porque multiplicaría por cero la fila F_3 que estamos transformando. Por lo tanto, si aparece **el caso** $a=0$ **en la discusión de casos, habría que sustituir ese valor antes de la transformación donde se genera el absurdo matemático**).

→ $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & a^2-7 & a-5 & 3a \end{array}\right)$ → $F'_3=F_3-(a^2-7)F_2$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -a^2+a+2 & 2a^2+3a-14 \end{array}\right)$

Discusión de casos:

- Si $-a^2+a+2=0$ → $a=-1$, $a=2$
  - Si $a=-1$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right)$ → Absurdo en F_3 → No hay solución → S.I.
  - Si $a=2$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → F_3 es combinación lineal de otras filas → Infinitas soluciones al tener 2 filas no nulas y 3 incógnitas tras aplicar Gauss → S.C.I. con un parámetro libre
- En general, si $a\neq-1$, $a\neq2$ → Solución única al tener 3 filas no nulas y 3 incógnitas tras aplicar Gauss → S.C.D.

b) Para $a=4$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & 30 \end{array}\right)$ → S.C.D. → $z=-3$ → $y=1$ → $x=2$

2. a) Discute las soluciones del siguiente sistema en función del parámetro m .

$$\begin{Bmatrix} x+my+z=2 \\ mx-y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \end{Bmatrix}$$

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso $m=1$.

a) Escribimos la notación matricial del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ m & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow C_1 \Leftrightarrow C_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ 1 & -1 & m & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow F_2'=F_2-F_1 \quad , \quad F_3'=F_3-2F_2 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ 0 & -(1+m) & m-1 & -2 \\ 0 & 1 & 2-2m & 1 \end{array}\right) \rightarrow F_3'=(1+m)F_3+F_2 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ 0 & -(1+m) & m-1 & -2 \\ 0 & 0 & -2m^2+m+1 & m-1 \end{array}\right)$$

Para discusión de casos tomamos:

$-(1+m)=0 \rightarrow m=-1$ → Ojo, este valor inhabilita la transformación $F_3'=(1+m)F_3+F_2$ → Tendremos que sustituir $m=-1$ en un paso anterior a esa transformación

$-2m^2+m+1=0 \rightarrow m=1 \quad , \quad m=\frac{-1}{2}$

- Si $m=1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Dos filas no nulas tras aplicar Gauss y tres incógnitas → SCI infinitas soluciones con un parámetro libre.
- Si $m=\frac{-1}{2} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1 & 2 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right)$ → En la tercera fila encontramos el absurdo $0=-3/2$ → SI sin solución
- Si $m=-1$ → Sustituimos antes de la transformación no permitida →

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$ → Intercambiamos Fila 2 con Fila 3 → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$ → Tres ecuaciones no nulas tras aplicar Gauss y tres incógnitas → SCD solución única.

- **¡Ojo! No olvidar el caso complementario.** Si $m \neq \{1, -\frac{1}{2}\}$ tendremos rango 3 con 3 incógnitas. SCD con solución única.

b) Para $m=1$ vimos en el apartado anterior que teníamos SCI con un parámetro libre:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$ → De las segunda fila → $-2y=-2$ → $y=1$

De la primera fila (recuerda que la primera columna es la de z y la tercera columna es la de x) →

$z+1+x=2$ → $z=\lambda$ parámetro libre → $x=1-\lambda$

3. Discutir soluciones de $\left\{\begin{matrix}(2-m)x+y+mz=2m^2-1\\ x+my+z=m\\ (2m-1)x+y+z=1\end{matrix}\right\}$ **según los distintos valores de** m **.**

Vamos a resolver por Gauss, por lo que planteamos notación matricial del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2-m & 1 & m & 2m^2-1\\ 1 & m & 1 & m\\ 2m-1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

Intercambiamos la posición de las columnas 1 y 3: $C_1 \Leftrightarrow C_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}m & 1 & 2-m & 2m^2-1\\ 1 & m & 1 & m\\ 1 & 1 & 2m-1 & 1\end{array}\right)$$

$F'_2 = mF_2 - F_1$ (ojo: $m=0$ inhabilita Gauss), $F'_3 = F_3 - F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}m & 1 & 2-m & 2m^2-1\\ 0 & m^2-1 & 2m-2 & 1-m^2\\ 0 & 1-m & 2m-2 & 1-m\end{array}\right)$$

Intercambiamos la columna 2 y ala columna 3: $C_2 \Leftrightarrow C_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}m & 2-m & 1 & 2m^2-1\\ 0 & 2m-2 & m^2-1 & 1-m^2\\ 0 & 2m-2 & 1-m & 1-m\end{array}\right)$$

$F'_3 = F_3 - F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}m & 2-m & 1 & 2m^2-1\\ 0 & 2m-2 & m^2-1 & 1-m^2\\ 0 & 0 & -m^2-m+2 & -m+m^2\end{array}\right)$$

Igualamos a cero los coeficientes de la diagonal principal que dependen del parámetro.

$m=0$ (inhabilita una transformación de Gauss, como ya hemos indicado anteriormente)

$2m-2=0 \quad \rightarrow \quad m=1$

$-m^2-m+2=0 \quad \rightarrow \quad m=1 \quad , \quad m=-2$

Realizamos discusión de casos.

Si $m=0$ → Sustituimos este valor antes de la transformación no permitida de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \quad C_1 \longleftrightarrow C_2 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \quad F'_3=F_3-F_1$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \quad F'_3=F_3-F_2 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el rango del sistema es 3. Estamos ante Sistema Compatible Determinado de solución única.

Si $m=1$ → Sustituimos en la matriz final de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ → Queda una única ecuación no nula tras aplicar Gauss, sin absurdos matemáticos

Al tener 3 incógnitas, estamos ante Sistema Compatible Indeterminado con 2 parámetros libres. Infinitas soluciones.

Si $m=-2$ → Sustituimos en la matriz final de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$ → En la tercera fila aparece un absurdo: $0=6$

Sistema Incompatible, sin solución

No olvidar el caso complementario: Si $m=\{-2,0,1\}$

Tras aplicar Gauss, eliminar filas proporcionales y comprobar que no hay absurdos matemáticos, quedan tres ecuaciones no nulas y tres incógnitas. Sistema Compatible Determinado, solución única.

4. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} a x+7y+5z=0 \\ x+ay+z=3 \\ y+z=-2 \end{matrix}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ **.**

b) Resolver el sistema, si es posible, para $a=4$ **.**

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$ → intercambiamos F_3 con F_2 → $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & a & 1 & 3 \end{array}\right)$ → $F'_3=aF_3-F_1$ (el valor $a=0$ inhabilita esta operación, porque multiplicaría por cero la fila F_3 que estamos transformando. Por lo tanto, **el caso** $a=0$ **no se considera en la futura discusión de casos una vez triangulada la matriz**).

→ $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & a^2-7 & a-5 & 3a \end{array}\right)$ → $F'_3=F_3-(a^2-7)F_2$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -a^2+a+2 & 2a^2+3a-14 \end{array}\right)$

Discusión de casos:

- Si $-a^2+a+2=0$ → $a=-1$, $a=2$
  - Si $a=-1$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right)$ → Absurdo en F_3 → No hay solución → S.I.
  - Si $a=2$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → F_3 es combinación lineal de otras filas → Infinitas soluciones → S.C.I.
- Si $a=0$ → inhabilita Gauss → sustituir en el paso previo a la operación no permitida.

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ → $F_1\longleftrightarrow F_3$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right)$ → $F'_3=F_3-7F_2$ →

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 17 \end{array}\right)$ → SCD solución única
- En general, si $a\neq-1$, $a\neq 2$ → Solución única → S.C.D.

b) Para $a=4$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & 30 \end{array}\right)$ → S.C.D. → $z=-3$ → $y=1$ → $x=2$