

1. Demuestra la siguiente igualdad  $\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 y$

Desarrollamos el seno de la suma y el seno de la diferencia.

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}(x)\cos(y)+\cos(x)\operatorname{sen}(y) \quad , \quad \operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}(x)\cos(y)-\cos(x)\operatorname{sen}(y)$$

Multiplicamos ambas expresiones, tal y como aparece en el término izquierdo de la igualdad de partida.

$$\operatorname{sen}(x+y) \cdot \operatorname{sen}(x-y)=[\operatorname{sen}(x)\cos(y)+\cos(x)\operatorname{sen}(y)] \cdot [\operatorname{sen}(x)\cos(y)-\cos(x)\operatorname{sen}(y)]$$

Operamos el producto suma por diferencia, igual a diferencia de cuadrados.

$$\operatorname{sen}(x+y) \cdot \operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos^2(y)-\cos^2(x) \cdot \operatorname{sen}^2(y)$$

De la relación fundamental de trigonometría tenemos:

$$\cos^2(y)=1-\operatorname{sen}^2(y) \quad , \quad \cos^2(x)=1-\operatorname{sen}^2(x)$$

Sustituimos y operamos.

$$\operatorname{sen}(x+y) \cdot \operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}^2(x) \cdot (1-\operatorname{sen}^2(y))-(1-\operatorname{sen}^2(x)) \cdot \operatorname{sen}^2(y)$$

$$\operatorname{sen}(x+y) \cdot \operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}^2(x)-\operatorname{sen}^2(x) \cdot \operatorname{sen}^2(y)-\operatorname{sen}^2(y)+\operatorname{sen}^2(x) \cdot \operatorname{sen}^2(y)$$

$$\operatorname{sen}(x+y) \cdot \operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}^2(x)-\operatorname{sen}^2(y) \quad \rightarrow \text{c.q.d.}$$

2. Sabiendo que  $\operatorname{sen}(x)=\frac{2}{3}$ , siendo  $x$  un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a)  $\operatorname{sen}(x)=\frac{2}{3} \rightarrow$  por la relación fundamental  $\rightarrow \cos(x)=\pm\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{5}{9}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

Tomamos el valor  $\cos(x)=\frac{\sqrt{5}}{3}$  por ser  $x$  del primer cuadrante.

$$\operatorname{sen}(2x)=2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)=2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4 \cdot \sqrt{5}}{9}$$

b)  $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{3}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$

Tomamos el valor positivo porque la mitad de un ángulo del primer cuadrante, seguirá siendo del primer cuadrante.

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$$

c)  $\operatorname{tg}(2x)=\frac{2 \operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}^2(x)}$ ,  $\operatorname{tg}(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}$

$$\operatorname{tg}(2x)=\frac{2 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}}{1-\left(\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5}}{\frac{25-20}{25}}=4 \cdot \sqrt{5}$$

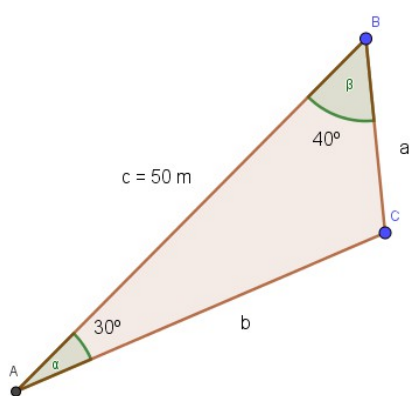
3. Demuestra  $\tan(A) + \tan(B) = \frac{\text{sen}(A+B)}{\cos(A)\cos(B)}$

$\text{sen}(A+B) = \text{sen}(A)\cos(B) + \cos(A)\text{sen}(B) \rightarrow$  Sustituimos esta expresión en el segundo miembro de la igualdad

$$\frac{\text{sen}(A)\cos(B) + \cos(A)\text{sen}(B)}{\cos(A)\cos(B)} = \frac{\text{sen}(A)\cos(B)}{\cos(A)\cos(B)} + \frac{\cos(A)\text{sen}(B)}{\cos(A)\cos(B)} \rightarrow \text{Simplificamos}$$

$$\frac{\text{sen}(A)\cancel{\cos(B)}}{\cos(A)\cancel{\cos(B)}} + \frac{\cancel{\cos(A)}\text{sen}(B)}{\cancel{\cos(A)}\cos(B)} = \frac{\text{sen}(A)}{\cos(A)} + \frac{\text{sen}(B)}{\cos(B)} = \text{tg}(A) + \text{tg}(B) \rightarrow \text{c.q.d.}$$

4. Un terreno triangular tiene 50m de longitud en uno de sus lados. Los otros dos lados forman con el de 50m, ángulos de 40° y 30°. Calcula las longitudes de los lados. Haz un dibujo que ilustre los datos del enunciado.



Datos del enunciado:  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $\hat{B} = 40^\circ \rightarrow$  Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo debe ser  $180^\circ \rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$

Usamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} \rightarrow \frac{a}{\text{sen}(30^\circ)} = \frac{50}{\text{sen}(110^\circ)} \rightarrow a = 26,6 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} \rightarrow \frac{b}{\text{sen}(40^\circ)} = \frac{50}{\text{sen}(110^\circ)} \rightarrow b = 34,2 \text{ m}$$

5. Resuelve  $\text{tg}(x) \cdot \text{sec}(x) = \sqrt{2}$

$$\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}, \quad \text{sec}(x) = \frac{1}{\cos(x)} \rightarrow \text{Sustituimos en la ecuación} \rightarrow \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\text{sen}(x)}{1 - \text{sen}^2(x)} = \sqrt{2} \rightarrow \text{sen}(x) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\text{sen}^2(x) \rightarrow \sqrt{2}\text{sen}^2(x) + \text{sen}(x) - \sqrt{2} = 0$$

Cambio variable  $\text{sen}(x) = t \rightarrow \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} = 0 \rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1 \pm 3}{2\sqrt{2}}$

$$t_1 = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}, \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Deshacemos el cambio de variable  $\rightarrow \text{sen}(x) = -\sqrt{2} \rightarrow$  No hay solución, porque la imagen del seno está acotada el intervalo  $[-1, 1]$

$$\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{Solución: } x = 45^\circ + 360^\circ k, x = 135^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{R}$$

6. Sabiendo que  $\cotg(x) = \frac{-1}{4}$  y que  $x$  es un ángulo del segundo cuadrante, deduce los siguientes apartados empleando las relaciones trigonométricas estudiadas en el tema.

a)  $\operatorname{cosec}(x)$  → De la relación fundamental de trigonometría →  $\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{cos}^2(x) = 1$  → Dividimos todo por  $\operatorname{sen}^2(x)$  →  $1 + \cotg^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$  →  $1 + \frac{1}{16} = \operatorname{cosec}^2(x)$  →  $\pm\sqrt{\frac{17}{16}} = \operatorname{cosec}(x)$  → Elegimos el signo positivo, porque el ángulo está en el segundo cuadrante →  $\operatorname{cosec}(x) = \frac{\sqrt{17}}{4}$

b)  $\cos(2x)$  → Del apartado anterior  $\operatorname{cosec}(x) = \frac{\sqrt{17}}{4}$  →  $\operatorname{sen}(x) = \frac{4\sqrt{17}}{17}$  → De la relación fundamental de trigonometría →  $\cos(x) = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)}$  → Nos quedamos con el signo negativo, porque el ángulo está en el segundo cuadrante →  $\cos(x) = \sqrt{1 - \frac{16}{17}} = \sqrt{\frac{1}{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$

De la fórmula del coseno del ángulo doble →  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{17} - \frac{16}{17} = \frac{-15}{17}$