impa

PROFMAT-IMPA

Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos

Relógio de Pêndulo e Engrenagens

Sérgio Antoun Serrano

Orientador: Paulo Cezar Pinto Carvalho

Rio de Janeiro
2014

Resumo

Nesta tese apresentamos a construção e utilização de mecanismos virtuais, o mais próximo possível da realidade, com o objetivo de facilitar a visualização do ensino de determinados conteúdos matemáticos. Para a construção foi utilizado o software GeoGebra, que por sua característica dinâmica, permite a interação entre aluno e instrumento. Na proposta contamos um pouco da história e detalhamos a construção do pantógrafo, do elipsógrafo, do relógio de pêndulo e engrenagens e do teodolito. Apresentamos a justificativa Matemática para a utilização desses instrumentos e os conteúdos envolvidos na construção e funcionamento. Também mostraremos alguns comandos avançados do GeoGebra, que foram fundamentais para as construções. Completando o trabalho, apresentaremos sugestões de conteúdos que podem ser trabalhados com os alunos, em salas de aula do Ensino Fundamental e Médio.

Palavras-chave: GeoGebra, Instrumentos, Pêndulo e Engrenagens.

Sumário

Índice de figuras

1. Introdução

O trabalho visa mostrar aos professores uma nova abordagem para utilização do software GeoGebra através da confecção de instrumentos virtuais, o mais próximo possível do instrumento real, inclusive com suas limitações físicas. Vale mencionar ainda, que este trabalho configura da conclusão do curso de Pós-graduação *Stricto Sensu* do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Que por sua vez, foi desenvolvido parcialmente em grupo, visto que, o projeto que deu origem ao mesmo foi elaborado por Jean Carlo da Silva Cordeiro, Patrícia Mello Bittencourt, Sergio Antoun Serrano e Esther Zilkha e orientado pelo Professor PhD Paulo Cezar Pinto Carvalho.

O objetivo do grupo foi utilizar o software GeoGebra para a construção de instrumentos, de forma a mostrar ao aluno a aparência e o funcionamento do elipsógrafo, do pantógrafo, do relógio de pêndulo e do teodolito. Cada integrante do grupo escolheu um instrumento, pesquisou o seu histórico, suas características de funcionamento, sua aplicabilidade e, por fim, fez a construção no GeoGebra. Como o objetivo do trabalho é também mostrar uma outra utilização deste software, foi descrita toda a sequência de comandos utilizada para a construção, bem como as dificuldades encontradas.

1.1. Justificativa

O ensino da Matemática é um desafio diário para professores que encontram muita resistência por parte de seus alunos. Diversos artigos discutem sobre essa dificuldade de aprendizagem. Lorenzato (2006) indica que conceitos matemáticos de espaço, número e forma devem ser mostrados de diferentes maneiras aos alunos com o objetivo de desenvolver diversos processos mentais básicos para a aprendizagem Matemática. Dentre esses processos, destacam-se a correspondência, a comparação e a classificação.

Em relação à Geometria, a Teoria dos Van-Hiele define cinco níveis de aprendizado: reconhecimento das formas, análise comparativa, argumentação lógica informal, dedução das demonstrações dessas argumentações e estabelecimento formal de teoremas. Assim, para o processo de ensino aprendizagem ser efetivo, deve seguir uma sequência que permita ao aluno expandir seus conhecimentos a partir da observação informal das figuras, evoluindo até compreender os sistemas axiomáticos da Geometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, o PCN, descrevem os conteúdos matemáticos necessários a cada ciclo da vida escolar do aluno. Também faz a análise dos objetivos a serem alcançados e a visão pedagógica da construção desse conhecimento. O PCN divide o ensino fundamental em 4 ciclos, cada um contendo duas séries e divide o conteúdo matemático em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. O Ensino Médio é dividido em 3 anos e o conteúdo de cada um desses anos é divididos em três temas estruturadores: Álgebra (números e funções), Geometria e Medidas e Análise de dados. O bloco de conteúdo de Espaço e Forma, do Ensino Fundamental, e o de Geometria e Medidas, do Ensino Médio, descrevem os conteúdos geométricos como parte importante do currículo da Matemática por desenvolver no aluno um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que ele vive. Além disso, o trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem dos números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças e identificar regularidades. O PCN sugere ao professor a prática das construções geométricas e a utilização de instrumentos para viabilizar a visualização e aplicação das propriedades das figuras e da construção de outras relações. Conforme Piaget (1967), “Todo conhecimento é ligado à ação de conhecer um objeto ou evento e assimilá-lo a um esquema de ação. Isto é verdade do mais elementar nível sensório motor ao mais elevado nível de operações lógico-matemáticas”.

Ao longo dos anos, as tecnologias digitais têm evoluído e se tornado uma excelente ferramenta para o professor. Gravina e Santarosa (1998) analisaram a contribuição dos ambientes informatizados na aprendizagem Matemática, verificando que esses ambientes, já naquela época, demonstravam ser ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem. A principal vantagem é a possibilidade de alterar os limites entre o concreto e o formal. Em seu trabalho, as autoras citam Hebenstreint (1987): “o computador permite criar um novo tipo de objeto – ‘os objetos concreto - abstratos’. Concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais”. Dessa forma, a utilização dessas ferramentas é lícita e de excelentes resultados.

A proposta de criar, no GeoGebra, alguns instrumentos para a utilização em sala de aula está em consonância com as ideias desenvolvidas nos parágrafos anteriores. Os instrumentos foram criados para dar ao aluno a sensação de um instrumento real, favorecendo seu processo cognitivo de aprendizagem.

1.2. Organização do Trabalho

O trabalho está organizado em oito capítulos. O primeiro capítulo faz uma contextualização sobre a proposta do trabalho e a prática educacional. O segundo capítulo descreve a origem e a utilização do programa GeoGebra. Neste capítulo são descritos alguns comandos especiais utilizados na confecção dos instrumentos. Esses dois capítulos são comuns aos quatro trabalhos. No terceiro capítulo, cada autor descreve seu instrumento, contando sua origem, construção e funcionamento. No quarto capítulo, é apresentada a sequência de construção de cada instrumento, listando os comandos utilizados. No quinto capítulo será apresentada a justificativa Matemática para o funcionamento e utilização do instrumento. No sexto capítulo, cada autor apresenta sugestões para a utilização do seu instrumento em sala de aula. Os capítulos finais trazem a conclusão e as referências bibliográficas utilizadas no trabalho.

2. Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos

2.1. Introdução:

A palavra GeoGebra surgiu da aglutinação das palavras Geometria e Álgebra e é o nome do aplicativo de Matemática Dinâmica que combina conceitos de Geometria e Álgebra em uma única interface. Sua distribuição é livre, nos termos da GNU General Public License e escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas.

2.2. História

O GeoGebra foi objeto de tese de doutorado de Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburgo, Áustria em 2001. Ele criou e desenvolveu esse software com o objetivo de obter um instrumento adequado ao ensino da Matemática em todos os níveis (do Ensino Fundamental ao Ensino Superior), combinando recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. É um software gratuito, de fácil download e com versão portável, muito útil, que pode ser acessada normalmente a partir de um pendrive. O programa é escrito em Java e, por ser multiplataforma, pode ser instalado com Windows, Linux ou Mac e apresenta, ultimamente, uma versão beta para Androide e outra versão beta para 3D.

Sua popularidade tem crescido continuamente e hoje o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, com mais de 300.000 downloads mensais. O download do programa pode ser feito a partir do site oficial do programa, no link http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/. Clicando na opção Software, é possível escolher para que sistema operacional se deseja o download. Neste endereço há, ainda, a opção Portable, que disponibiliza o programa para utilização direta do pendrive, sem necessidade de instalação no computador. A versão para tablet (Androide) ainda está em testes e funciona com limitações.

Foram criados institutos regionais, que são membros do IGI (International GeoGebra Institutes), cujo propósito é agregar interessados no uso do

GeoGebra como ferramenta de ensino e aprendizagem, criando uma comunidade aberta que compartilhe seus conhecimentos no treinamento, suporte e desenvolvimento de materiais de apoio para alunos e professores, promovendo a colaboração entre profissionais e pesquisadores, com o objetivo de desenvolver materiais gratuitos para o ensino, a aprendizagem e a divulgação da Matemática a todos os públicos. Esses Institutos oferecem suporte, promovem oficinas, fóruns de debate e de dúvidas. São ao todo 62 Institutos GeoGebra em 44 países e o Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro, tem sua sede no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense e pode ser visitado no endereço http://www.geogebra.im-uff.mat.br/. O Instituto GeoGebra em São Paulo é sediado na PUC-SP e pode ser visitado pelo endereço eletrônico http://www.pucsp.br/geogebrasp/. Outros institutos podem ser localizados clicando na opção Community do site oficial.

O software permite realizar construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas ou com funções que podem ser modificados posteriormente de forma dinâmica. Equações e coordenadas podem estar interligadas diretamente através do GeoGebra. O software tem a capacidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos; permite achar derivadas e integrais de funções e oferece comandos, como raízes e extremos. Uma características importante do GeoGebra é que todo elemento geométrico desenhado na janela de visualização, terá sua representação algébrica mostrada na janela de álgebra. E vice versa, pois se descrevermos a representação algébrica de um elemento na caixa de entrada, a janela de visualização mostrará a representação geométrica do mesmo.

2.3. Programa GeoGebra 2D

O programa possui uma interface amigável e é bastante intuitivo na maioria das vezes. Os comandos estão dispostos em ícones abaixo da linha dos menus. Além das janelas de visualização, de álgebra e do campo entrada, visíveis na abertura de um novo arquivo, existem ainda a janela de protocolo de construção, que mostra a sequência de construção executada, e a janela para planilha, para utilizar entrada de dados do Excel.

Quando o GeoGebra é aberto na tela do computador, a tela inicial, caso as configurações iniciais não tenham sido alteradas, é:

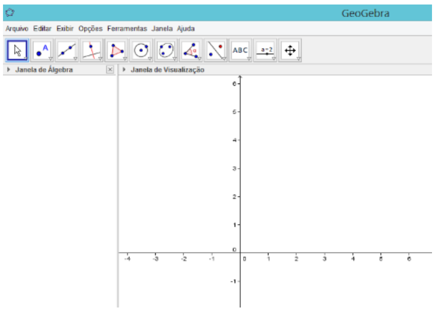


Figura 1 – Tela do GeoGebra 2D

No menu Opções pode ser escolhido o tamanho da fonte que se deseja usar durante todo o seu trabalho, há pessoas que preferem trabalhar com a fonte no tamanho em torno de 20 pt, é comum escolha de 16 pt, esta pode ser alterada durante todo o processo de construção sem causar nenhum prejuízo.

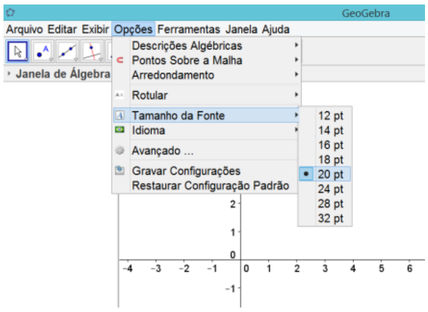
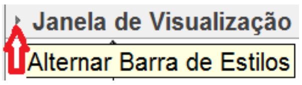
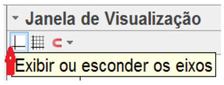


Figura 2 – O tamanho da fonte

Exibir ou esconder os eixos pode ser conseguido clicando em 

e em seguida em 

.

O Campo de Entrada se encontra abaixo da janela de visualização. Caso não esteja aparente, click em exibir no menu principal e em seguida click em Campo de Entrada.

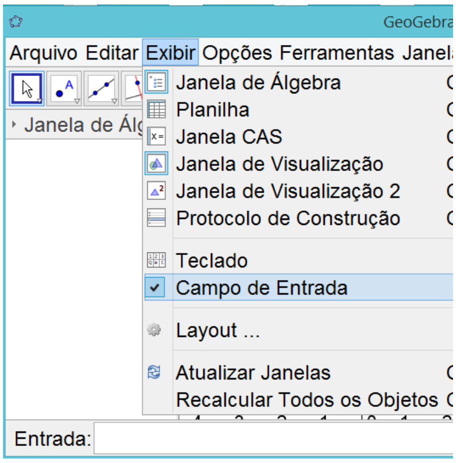


Figura 3 – Campo de Entrada

No capítulo 3 deste trabalho será descrita a sequência de comandos utilizada para a construção do instrumento e o endereço eletrônico do arquivo finalizado para utilização. Mas é importante destacar que, durante o processo de construção, além dos comandos básicos, também foi necessário estudar e utilizar comandos mais avançados que serão descritos abaixo e no decorrer da sequência de construção de cada instrumento.

2.3.1. Comando vetor

Esse comando e suas variações foram de muita utilidade para a construção do acabamento dos instrumentos construídos. A partir de um ponto central, utilizando os conceitos de vetor unitário e de translação de um ponto pelo vetor, foi possível criar pontos que estivessem vinculados ao movimento de outros pontos. Por exemplo:

Para construir um ponto na tela, click no comando Ponto () que se encontra na Barra de Ferramentas, em seguida click na Janela de Visualização nas proximidades de (2,2), como sugestão.

Para construir outro ponto na tela, click novamente no comando Ponto () e em seguida click na Janela de Visualização nas proximidades de (3,3).

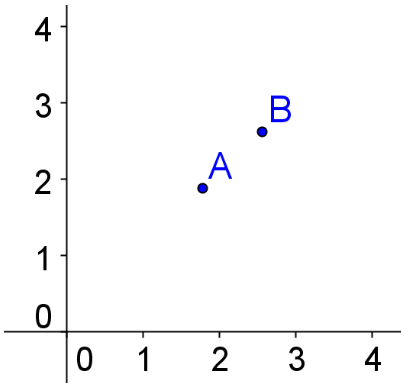


Figura 4 – Construção com vetores

No Campo de Entrada digite*:

- Ampliar[-5,-5,18,7] e tecle enter. São os limites dos eixos.
- u=VetorUnitário[segmento[A,B]] e tecle enter. Criou-se o vetor u.
- C=A-u e tecle enter. Criamos o ponto C.
- D=A+3u e tecle enter. Construímos o ponto D.

Estes comandos poderão ser copiados e colados no Campo de Entrada do GeoGebra, para uso.

Para trabalhar no outro eixo é possível construir o vetor perpendicular ao vetor u. Observa-se que, ao mover o ponto B e, por consequência, o vetor AB, os pontos C e D acompanham o movimento.

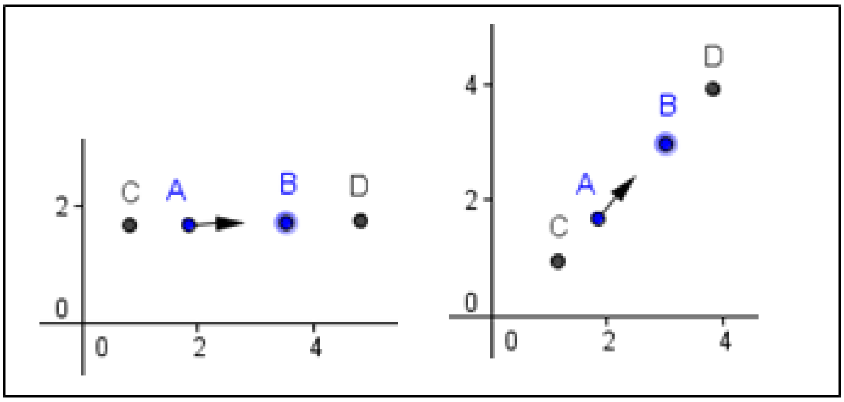


Figura 5 – Construção com vetores

2.3.2. Comando lista

Esse comando permite fazer uma lista com pontos e foi muito utilizada para criar os vértices de alguns polígonos construídos. É um comando que diminui a quantidade de pontos listados na Janela de Álgebra, ao mesmo

* Você poderá copiar o comando já digitado no Word e colar no Campo de Entrada do GeoGebra.

tempo em que permite manipulação de todos ao mesmo tempo. Por exemplo:

No Campo de Entrada digite:

- lista1={(1,1),(1,2),(2,3),(2,1.5)} e tecle enter. Foi criada uma lista de pontos na Janela de Algebra.

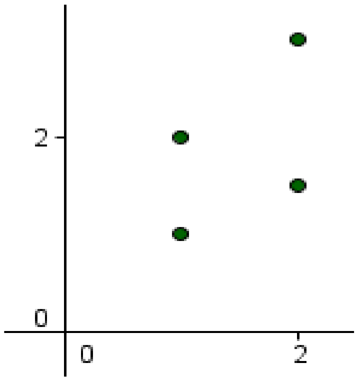


Figura 6 – Lista de pontos

2.3.3. Variáveis Booleanas

O programa possui um comando utilizado para exibir e esconder objetos, como mostra a figura abaixo. Esse comando cria uma variável booleana, que é relacionada aos outros elementos da construção. Também cria um pequeno botão, que ao ser acionado troca o valor da variável de true para false e vice versa.

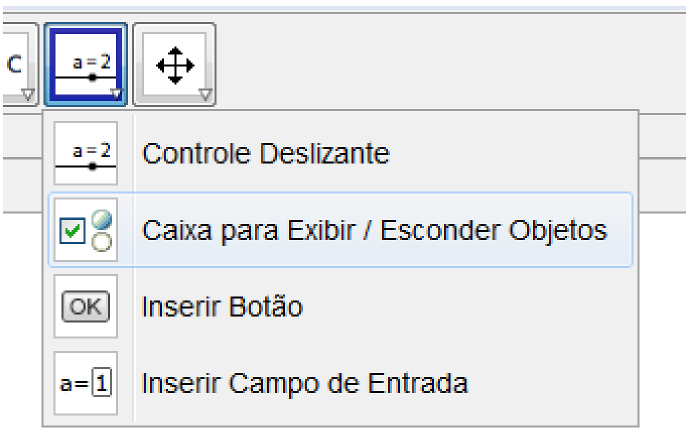


Figura 7 – Comando Exibir Objetos

Também é possível definir uma variável booleana através do Campo de Entrada, selecionar os elementos que a variável irá controlar e utilizá-la para programação.

2.3.4. Comandos de Definição

Em vários momentos durante a finalização dos instrumentos no GeoGebra, foi necessário a utilização desses comandos para programação.

- DefinirCoordenadas[A,x(B),y(B)] – significa que o ponto A receberá as coordenadas x e y do ponto B.
- DefinirLegenda[bt2,”Animar”] – significa que a legenda do botão bt2 será a palavra Animar.
- DefinirValor[figuras,5] – significa que a variável figuras receberá o valor 5.

2.3.5. Camadas

Para o acabamento dos instrumentos, foi necessário a utilização de vários polígonos, círculos e arcos. Mas, para dar a aparência real ao trabalho final, temos que considerar as diferenças de plano entre os elementos que compõem os instrumentos. Cada elemento desenhado no GeoGebra é desenhado em alguma camada. As camadas variam de 0 a 9. Observe a situação abaixo:

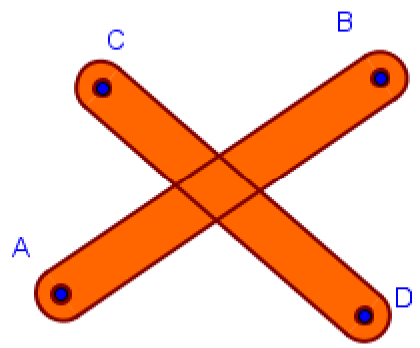


Figura 8 – Duas Hastes na Mesma Camada

Veja que as linhas das hastes se cruzam e não é possível perceber qual das duas foi construída primeiro ou qual delas está por cima da outra.
Para alterar a camada da haste CD, é necessário clicar com o botão direito do mouse na haste e escolher a opção Propriedades. Na guia Avançado, escolha uma camada acima da camada em que ele foi construído.

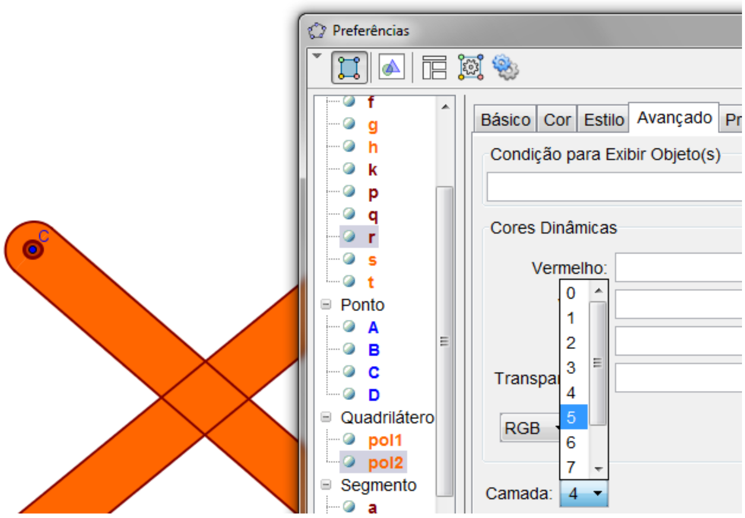


Figura 9 – Alteração das Camadas

Todos os elementos da haste CD foram alterados para camada 5. O resultado mostra a diferença de profundidade entre as hastes.

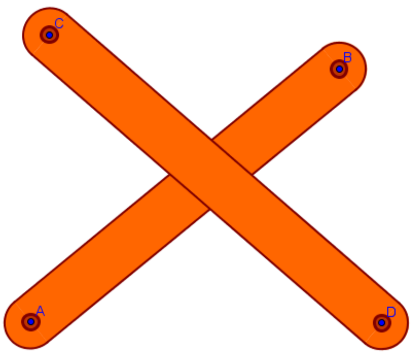


Figura 10 – Hastes em Camadas Diferentes

2.4. Programa GeoGebra 3D

O programa ainda está em desenvolvimento. Foi disponibilizada uma versão beta, online, no final de 2010. Ainda não é possível fazer o download do programa, mas sim fazer construções e perceber o novo universo de possibilidades.

Para utilizar o programa é necessário ter instalado o Java 5.0 ou o superior no seu PC, depois clicar no link http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp e fazer o download do arquivo geogebra-50.jnlp. Após o download, execute este arquivo. Crie um ícone de acesso na área de trabalho do seu computador.

Figura 11 – Ícone do GeoGebra 3D na área de trabalho

Para abrir o programa é necessário estar online, em seguida clique no link. A interface do programa contempla a interface 2D acrescida da janela de visualização 3D e dos comandos específicos de uso na Geometria Espacial.

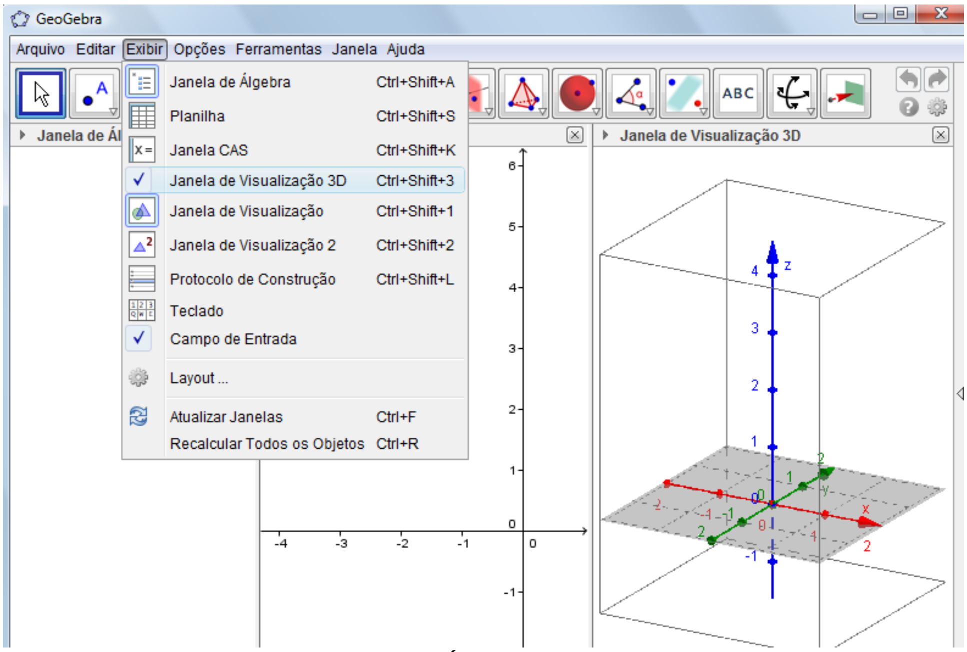


Figura 12 – As Janelas de Álgebra, de Visualização 2D e 3D

Esses comandos nos possibilitam criar planos passando por três pontos, planos perpendiculares, paralelos, além de sólidos como pirâmides, primas, esferas, etc. Também podemos calcular seus volumes.

Uma vez tendo feito e gravado algumas construções, essas geram arquivos que não são possíveis de serem abertos dando dois cliques, mas somente depois de executarmos o programa.

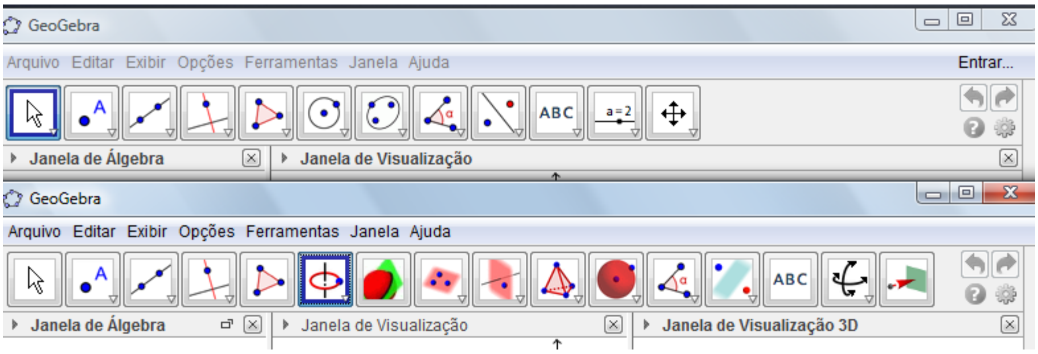


Figura 13 – Comparativo das barras de ferramentas do 2D e do 3D

O fato da versão beta do GeoGebra 3D existir há apenas 3 anos faz com que tenha sido pouco comentada logo, o conhecimento do programa é construído na prática, com o seu uso. No caso do teodolito observei que para a construção de uma figura na versão beta é conveniente vincularmos tudo o que está sendo criado, para facilitar a movimentação. Ou seja, se desejarmos um ponto, sugere-se que este seja vinculado a um plano inicial ou uma reta. O mesmo acontece com reta, polígonos e qualquer figura. Caso não siga este procedimento, fica muito difícil ao longo da construção localizar, no espaço virtual, o que é preciso. Uma ferramenta muito útil dessa versão é utilizada para podermos ter a visão da figura de vários ângulos, ou mesmo rotacioná-la.

Figura 14 – Visualizar a figura de diversos ângulos

A construção no 3D reforça a teoria que é mencionada na Geometria Espacial, exemplo: “Por três pontos não-colineares passa um único plano”, dados três pontos não colineares, na versão Beta, construímos um plano. Com o uso deste programa o aluno visualiza facilmente o que é dito em sala de aula, construindo assim o conhecimento. Com certeza é um novo olhar para o que já era trabalhado em sala de aula.

3. Instrumento: Relógio de Pêndulo e Engrenagens

3.1. Motivação Inicial

Em Julho de 2013 fui informado que, no PROFMAT, teríamos a disciplina Recursos Computacionais e que um dos softwares trabalhados seria o GeoGebra. Já tinha ouvido falar no software, porque alguns colegas de trabalho o usavam meramente para ilustrar provas, e fazer gráficos, mas não o conhecia. A exploração do programa ocorreu em Julho. E o que mais me fascinou no GeoGebra foi a animação. Escrever um conjunto de equações Matemáticas na Janela de Álgebra e ver, na Janela de Visualização, o resultado destas se movimentando. Me empolguei, querendo fazer animação e tentando usar recursos físicos na animação para imitar a realidade. Observando o movimento, pensei em duas coisas: na transmissão de movimento por uma correia e, por uma roda dentada. Se forem possíveis, farei qualquer máquina funcionar virtualmente. E comecei a explorar, mais no intuito de conhecer o programa, os comandos do GeoGebra, para alcançar este objetivo.

A orientação na internet em português, é muito fraca, são poucos exemplos de comandos nessas páginas. Em inglês encontramos, nos manuais, mais as descrições dos comandos, mas a tradução altera o conteúdo. O primeiro desafio foi fazer o polígono estrelado, já no intuito de fazer uma roda dentada (não existe este comando no GeoGebra). Na internet encontrei um trabalho com segmentos entrelaçados[†], que criava uma estrela com a superposição das diagonais, que não atendia ao interesse, se tratava de figuras sobrepostas e o objetivo era criar polígonos. O programa parecia ser limitado, a roda dentada teria inúmeros pontos e cada ponto tem um nome e o nome desse ponto é uma letra do alfabeto, e um alfabeto tem 26 letras e depois destes 26 pontos seria, a_1, a_2, a_3, ... a', a'', a''', ... No início, quando fiz rodas com muitos pontos, muitos dentes, essa imensidão de pontos sobrecarregava a memória do computador que “rateava”, começava a falhar, imaginando que o programa era limitado. Mas voltando ao arquivo do GeoGebra que tinha os segmentos entrelaçados, pude perceber que

[†] Este arquivo não está mais disponível na internete, trata-se de um arquivo muito simples com poucos comandos na Janela de Álgebra.

existiam objetos que não eram nomeados e encontrei o comando chamado Lista e a ferramenta chamada estrelado, esta lista era de segmentos. Entendendo a Matemática por trás deste comando, consegui criar a lista de pontos e inúmeras ferramentas. A lista de pontos é um comando que gera pontos que obedecem a determinadas condições, eles não são necessariamente nomeados e são descritos na Janela de Álgebra por uma série de números ou uma equação, com um único nome para todos os pontos, por exemplo, lista1. Isto fez com que a memória do computador ficasse menos carregada, mesmo construindo centenas de pontos. Para gerar essa lista empreguei equações matemáticas, ou funções. Neste caso, o que usei muito nas engrenagens foi o comando GIRAR. Girando um ponto, repetidas vezes de um determinado ângulo até dar a volta completa e aí se criou inúmeros pontos e esses, ligados por segmentos, formaram a imagem desejada, tudo com equações matemáticas e esta imagem não carregava o computador e mostra que o GeoGebra não é tão limitado em quantidade de pontos. Mesmo com centenas de pontos, o arquivo pronto tinha um tamanho pequeno comparado àqueles iniciais que fiz em que cada ponto tinha um nome. Então era possível fazer as engrenagens. Nunca imaginei que iria usar os meus conhecimentos de série da maneira que usei no GeoGebra, porque, a série gerava os pontos no local que queria e como queria, combinados na equação matemática. Essa utilização de sequências poderá ser apreciada na seção 4.2.1 Primeiros Passos.

A Matemática por trás do GeoGebra começou a me fascinar, isso não tem nem um ano e ele é todo feito com a Matemática, e para a Matemática. Acredito que o software vai continuar evoluindo, conforme se agrega mais e mais conhecimentos de Matemática em seus comandos. Serão produzidos trabalhos, e cada um destes vai estimular a criação de novos trabalhos, num efeito em cadeia, e isto deve ser passado para a nova geração.

3.2. Escolha do Tema do Trabalho de Conclusão do Curso

O objetivo inicial para a escolha do tema do trabalho de conclusão do curso (TCC) é resgatar o ensino do Desenho Geométrico no ensino básico. Há anos atrás, a exigência, pela formação em desenho foi deixada de lado, e hoje são poucas as escolas que resistem ministrando aulas com compasso, esquadro, régua. Considero o Desenho Geométrico muito importante na formação do indivíduo.

Optei por construir instrumentos físicos no GeoGebra, dentre eles a engrenagem que já tinha descoberto como fazer, polígono estrelado de uma maneira geral, resolvi fazer as engrenagens trabalharem entre si. Coloquei no GeoGebra uma curiosidade da infância, a desmontagem de um relógio. Daí a ideia de colocar o pêndulo trabalhando com as engrenagens. O pêndulo foi trabalhoso, porque queria que ele fosse interativo, do tipo que as pessoas possam mexer e baseado nas leis da física, fazendo com que o movimento ficasse o mais real possível.

Observando o trabalho que foi feito no GeoGebra, posso mostrar que o aluno tem que ter as noções básicas de desenho para conseguir construir objetos físicos no GeoGebra e estes conhecimentos básicos deverão ser dados na Educação Fundamental. É essencial que essa geração tenha conhecimento básico do uso da régua, compasso e tudo mais, para que possa entender esses novos instrumentos, esses recursos computacionais e tudo mais que há por vir.

3.3. Descrição

Este instrumento não é um relógio na plenitude da palavra, é apenas um contador de tempo que tem o princípio dos relógios de pêndulo. Foi concebido para fins didáticos e seus elementos são assim como nos relógios:

- Pêndulo com braço variável.
- Estribo do Pêndulo.
- Roda dentada que interage com o estribo.
- Conjunto de engrenagens com relação de 1:60.
- Uma corda presa a um peso que está enrolada numa engrenagem.
- Ponteiro dos segundos.

O ponteiro dos minutos está girando no sentido contrário ao do relógio, é como se fosse um timer, seu ponteiro dos minutos executa uma contagem regressiva. Este projeto foi feito com o número mínimo de elementos para que se possa estudar todo o funcionamento de um relógio verdadeiro. Para o ponteiro dos minutos girar no sentido horário teria que acrescentar mais uma roda dentada. Para acrescentar o ponteiro das horas, seria necessário mais um conjunto de engrenagens com relação de 1:60.

Se houver interesse em transformar este projeto em relógio, as etapas da criação do instrumento que estão a partir do item 4.1 Construção do Pêndulo no GeoGebra podem dar todo o suporte necessário para a transformação.

Este contador de tempo foi desenvolvido para que seu funcionamento possa ser todo desvendado assim como todo desmontado, os seus componentes estão desbloqueados e podem ser utilizados separadamente em novos projetos. As equações matemáticas estão disponíveis na Janela de Álgebra e as explicações, os motivos e os detalhes de cada equação estão no item 4.1 Construção do Pêndulo e no item 4.2 Construção das Engrenagens no GeoGebra.

3.4. História

O primeiro relógio mecânico (que marcava o tempo) conhecido e que hoje se encontra no Museu de Ciência, em Londres, teria sido fabricado em 1386 por Henry de Vicky, encomendado pelo rei da França. Entretanto, ele foi instalado na Catedral de Salisbury, na Inglaterra. Era formado por duas engrenagens movidas por cordas e pesava cerca de 200 quilos. A partir dos grandes relógios mecânicos foram criados os menores para uso doméstico. O primeiro mostrador tinha 6 divisões, que um único ponteiro percorria 4 vezes cada dia de 24 horas, e foi criado em 1344 por Jacopo de Dondi na cidade de Chioggia, na Itália. O ponteiro de minuto só apareceria mais tarde com o uso do pêndulo. Foi em 1582 que o cientista Galileu Galilei (1564-1642), ao observar a oscilação de um candeeiro na Catedral de Pisa, descobriu a aplicação do movimento regular da oscilação do pendulo (isocronismo) na fabricação do relógio, do que se aproveitou o holandês Christian Huygens para fabricar o primeiro relógio de pêndulo

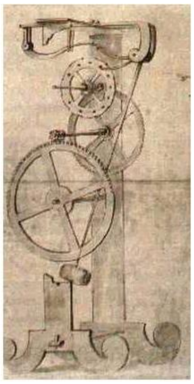


Figura 15- Diagrama do Relógio de Pendulo de Galileu

A aplicação do pêndulo nos relógios fez reduzir o erro diário de 15 minutos para cerca de 10 segundos. Este maquinismo foi aperfeiçoado por Peter Heinlein, de Nuremberg, que substituiu o peso por uma cinta de aço que tinha a mesma função, o que permitiu a redução do tamanho das máquinas até chegar ao relógio de bolso. A invenção de Heinlein possibilitou um avanço na história da relojoaria, sendo criadas novas patentes de excelentes mecanismos. A peça que permitiu movimentar o ponteiro dos minutos foi chamada de "balancin", responsável pelo tique-taque dos relógios. A patente do relógio de bolso só foi registrada por Louis Recordon em 1780, em Londres.

Figura 16 - Um dos “relógio de pulso" de Henlein

A partir do século XX, este instrumento foi superado em precisão pelo relógio a quartzo e depois pelo relógio atômico, mas continua a ter certo emprego pelo seu valor estético e artístico. Para um relógio de pêndulo ser um medidor de tempo preciso, a amplitude do movimento deve ser mantida constante apesar de as perdas por atrito afetarem todo o sistema mecânico, Variações na amplitude, tão pequenas quanto 4° ou 5°, fazem um relógio adiantar cerca de 15 segundos por dia, o que não é tolerável mesmo num relógio caseiro. Para manter constante a amplitude é necessário compensar com um peso ou mola, fornecendo energia automaticamente, compensando as perdas devidas ao atrito.

3.5. Detalhamento de funcionamento

O pêndulo consiste de um único ponto (**P**) oscilando em um arco de circunferência com centro em **O**. O raio da circunferência (**p**) e o ângulo de abertura do arco (**α**) são variáveis que podem ser alteradas. A velocidade de oscilação deste ponto é equacionada e obedece a sentenças da Lógica e as leis da Física de conservação de energia.

Os pontos do estribo do pêndulo são construidos com operações vetoriais a partir de $\overrightarrow{OP}$, para que seu movimento fique em função do ponto P.

Os pontos do peso são construidos em função de um vetor vertical a partir do ponto **F**, para que seu movimento fique em função do ponto **F**. O ponto **F** se movimenta num segmento vertical e nunca atinge o ponto mais baixo do segmento, seu movimento é interrompido por sentenças de Lógica colocadas na equação que determina sua velocidade. A velocidade de **F** está em função da interseção dos estribos com a 1º engrenagem e com o polígono do peso e também está em função da variável $\mathbf{k_v}$, que pode ser alterada.

Os pontos da 1º engrenagem são construidos com operações vetoriais a partir de $\overrightarrow{A_{60}B_{60}}$, para que seu movimento fique em função do movimento do ponto $\mathbf{B_{60}}$. O ponto $\mathbf{B_{60}}$ se movimenta numa circunferência com centro em $\mathbf{A_{60}}$. A equação que determina a velocidade de $\mathbf{B_{60}}$ ($\mathbf{v_{60}}$) está em função da velocidade de **F** ($\mathbf{v_q}$).

Os pontos da 2º engrenagem são construidos com operações vetoriais a partir de $\overrightarrow{A_{48}B_{48}}$, para que seu movimento fique em função do movimento do ponto $\mathbf{B_{48}}$. O ponto $\mathbf{B_{48}}$ se movimenta numa circunferência com centro em $\mathbf{A_{48}}$. A equação que determina a velocidade de $\mathbf{B_{48}}$ ($\mathbf{v_{48}}$) está em função da velocidade da 1º engrenagem ($\mathbf{v_{60}}$) e da interseção da 1º engrenagem com a 2º engrenagem.

Os pontos da 3º engrenagem são construidos com operações vetoriais a partir de $\overrightarrow{A_{36}B_{36}}$, para que seu movimento fique em função do movimento do ponto $\mathbf{B_{36}}$. O ponto $\mathbf{B_{36}}$ se movimenta numa circunferência com centro em $\mathbf{A_{36}}$. A equação que determina a velocidade de $\mathbf{B_{36}}$ ($\mathbf{v_{36}}$) está em função da velocidade da 2º engrenagem ($\mathbf{v_{48}}$) e da interseção da 2º engrenagem com a 3º engrenagem.

Os pontos da última engrenagem são construidos com operações vetoriais a partir de $\overrightarrow{A_{60}B'_{60}}$, para que seu movimento fique em função do movimento do ponto **B'60**. O ponto **B'60** se movimenta numa circunferência com centro em **A60**. A equação que determina a velocidade de **B'60** (**v602**) está em função da velocidade da 3º engrenagem (**v36**) e da interseção da 3º engrenagem com a última engrenagem.

4. Sequência de Construção no GeoGebra

4.1. Construção do Pêndulo

Antes de começar a escrever os detalhes da construção do instrumento físico no GeoGebra, no meu caso o Pêndulo com as Engrenagens, optei por escrevê-lo detalhadamente para uma pessoa que nunca tivesse utilizado o GeoGebra. Foi tomada esta decisão baseado no fato de que o GeoGebra a nível nacional ainda não é muito difundido, nem conhecido, aliás é um programa em termos históricos, novo. Optei por isso que seria um trabalho maior e mais árduo, mas acho que é o que atende ao interesse do professor que não conhece nada do GeoGebra e achou interessante e gostaria de conhecer. Ele poderá pegar as etapas de construção disponibilizadas a seguir, passo a passo e tudo o que foi feito, ele irá conseguir construir, entendendo como foi feito, detalhe por detalhe. Fica um pouco mais extenso, mas consegue abranger a todo o público que foi destinado, o Professor de Matemática da Educação Básica.

4.1.1. Primeiros Passos

Quando o GeoGebra é aberto na tela do computador, a tela inicial, caso as configurações iniciais não tenham sido alteradas, é:

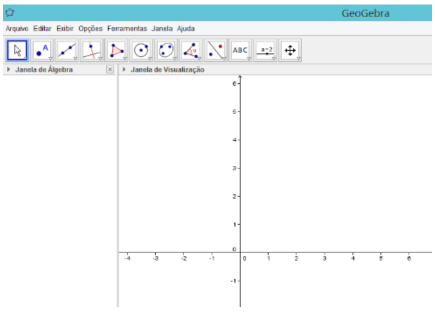


Figura 17 – Tela do GeoGebra 2D

No menu Opções pode ser escolhido o tamanho da fonte que deseja ser usado durante todo o seu trabalho, gosto de trabalhar com a fonte no tamanho em torno de 20 pt, é comum escolha de 16 pt, escolha a que mais lhe agrada, esta escolha pode ser alterada durante todo o processo de construção sem causar nenhum prejuízo. É aconselhavel gravar (salvar) o arquivo, com o nome que desejar, e ir sempre gravando (salvando) durante todo o processo de construção.

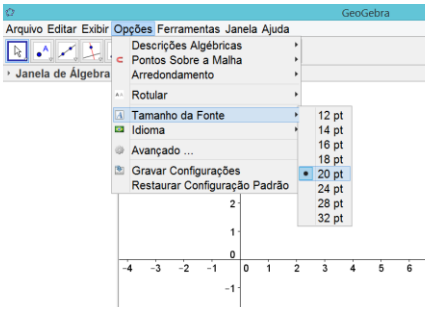


Figura 18 – O tamanho da fonte

Com o mouse posicionado no canto inferior esquerdo (3º quadrante) mexa na roda do mouse até que apareça valores do eixo y em torno de 90, caso não esteja utilizando o mouse, o comando de zoom (reduzir) se encontra na última série de comandos (botões) a direita.

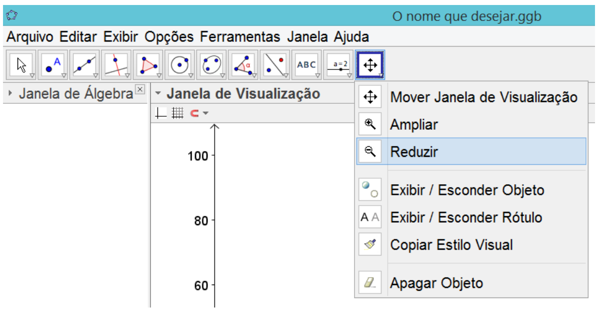
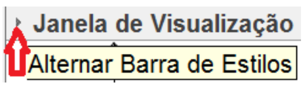
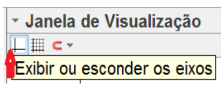


Figura 19 – O comando de zoom

Este comando de zoom foi utilizado para evitar que a construção fique muito grande ou muito pequena na tela, ele também pode ser utilizado durante todo o processo de construção. Assim como exibir esconder os eixos, que pode ser conseguido clicando em 

e em seguida em 

.

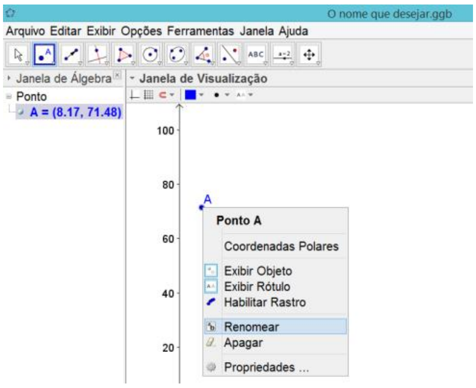
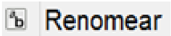


Figura 20 – O comando Renomear

Inicialmente é criado um ponto qualquer na tela através do comando Ponto (). Todos os pontos seguintes terão posições em função deste ponto, click com o botão direito do mouse sobre ele e através do comando Renomear (), atribui-se a letra **O**, maiúscula, que é associada a este ponto.

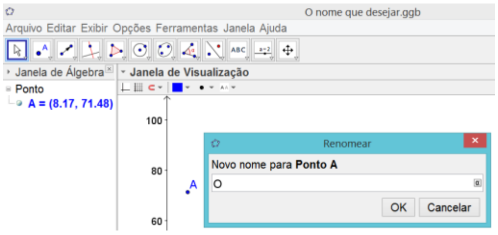


Figura 21 – Renomeando ponto

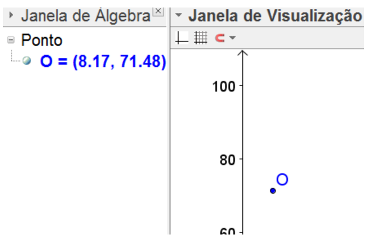


Figura 22 – O ponto **O**

O braço do Pêndulo terá tamanho variável e por isto vai ser criado um Controle Deslizante () para ele, com este comando () click num ponto qualquer no canto inferior direito. Na caixa de diálogo deste controle deslizante escolha número, nomeie como **p**, minúsculo, com valor mínimo igual a 5, valor máximo igual a 30 e valor do incremento é igual a 1.

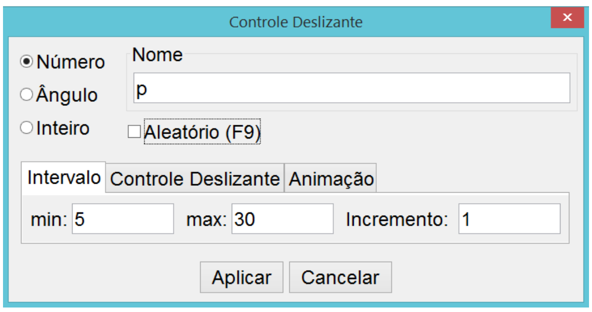


Figura 23 – O Controle Deslizante

Para criar uma circunferência de centro **O** e raio **p** é utilizado o comando Círculo dados Centro e o Raio (). Click no ponto **O**, em seguida escreva

p na caixa de diálogo e click OK. Renomear esta circunferência como **c**, minúscula, caso seja necessário.

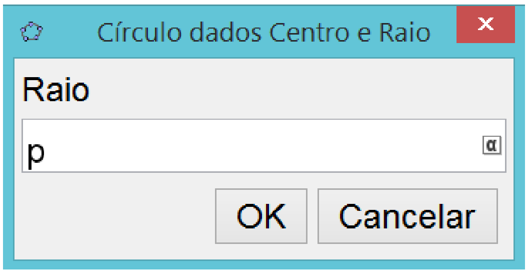


Figura 24 – Atribuindo ao raio p

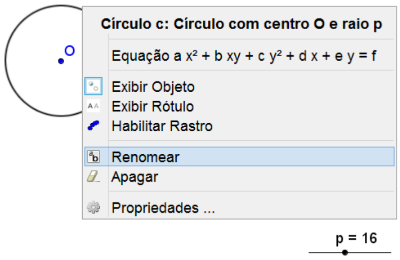


Figura 25 – Renomeando círculo

Caso a circunferência fique muito grande ou muito pequena basta rolar a Roda presente no mouse para posicionar a circunferência de forma adequada.

4.1.2. Criando os limites do Pêndulo

Para criar o limite inferior do Pêndulo é criada uma reta perpendicular ao eixo x passando pelo ponto **O**, utilizando o comando Reta Perpendicular ( ) click no ponto **O** e em seguida no eixo x. Renomear esta reta como **r**, minúscula. Com esta reta construida o limite inferior é obtido com o comando Interseção de Dois Objetos ( ), click no ponto mais baixo do cruzamento da reta **r** com a circunferência **c**. Renomear este ponto como **P'**, maiúscula. Com o comando Exibir / Esconder Objeto ( ) pode-se esconder a circunferência **c, click** sobre ela e em seguida click no comando Mover ( ). Uma outra maneira de esconder (ocultar) a circunferência **c** é dando um click com o mouse na bolinha que se encontra a esquerda de **c** na Janela de Álgebra. Desta forma agora temos apenas dois pontos numa reta e um controle deslizante na janela de visualização.

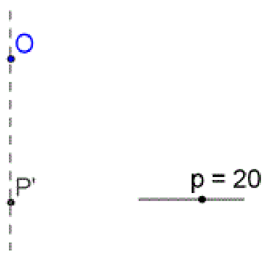


Figura 26 – Dois pontos numa reta e um controle deslizante

O limite máximo do ângulo de oscilação terá um valor variável e por isto vai ser criado um controle deslizante, utilize o comando Controle Deslizante ( ), click num ponto qualquer no canto inferior direito. Na caixa de diálogo deste controle deslizante escolha ângulo, nomeie como **α**, com valor mínimo igual a 0º, valor máximo igual a 85º e valor do incremento é igual a 1º.

Para criar o limite máximo de oscilação do pêndulo utilize o comando Ângulo com Amplitude Fixa ( ), click em **P'**, click em **O** e na caixa de diálogo preencha com α[‡]. O ponto que foi criado renomeie para **P''**, maiúsculo. Na janela de visualização vai surgir um ângulo **β** de igual valor de **α**, apague este ângulo, com o comando Mover ( ), marque o ângulo **β** e aperte **del** no teclado para deletar.

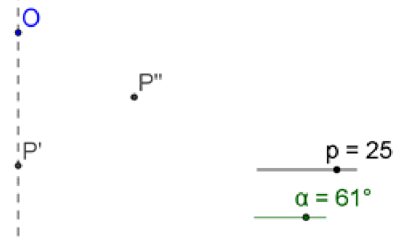


Figura 27 – Três pontos, numa reta e dois controles deslizantes

4.1.3. Trajetória do Pêndulo

Para criar o arco **P'P''** use o comando Arco Circular dado o Centro e Dois Pontos ( ), click em **O**, click em **P'** e click em **P''**. Renomeie este arco para **f**. Com o comando Ponto em Objeto ( ), click em qualquer lugar no arco **f** para criar um ponto que é livre para se movimentar ao longo do arco **f**. Renomeie este ponto para **C**, maiúscula. Este ponto **C** é o ponto mais alto que o pêndulo vai ocilar e ele pode ser movido desde **P'**, ponto mais baixo, até **P''**, ponto do limite superior comandado pelo controle deslizante **α**. Para obter o ângulo de oscilação utilize o comando Ângulo ( ), click **P'**, click **O** e click **C**. Renomeie para **β**, se necessário. Esconda este ângulo **β**, o arco **f** e o ponto **P'** para facilitar os trabalhos seguintes, com o comando Exibir / Esconder Objeto (**)**, click sobre **β,** click sobre **f,** click sobre **P'** e

[‡] Para escrever alfa na caixa de diálogo click em no final do campo de texto a direita, irá aparecer o alfabeto grego inteiro.

em seguida click no comando Mover ( ). Temos novamente na janela de visualização 3 pontos, uma reta e 2 controles deslizantes.

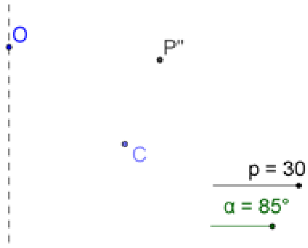


Figura 28 – 3 pontos, uma reta e 2 controles deslizantes

Para criar **C'**, o outro ponto mais alto da trajetória do pêndulo, use o comando Reflexão em Relação a uma Reta ( ), click em **C** e click na reta **r**. Renomeie para **C'**, caso necessário.

Para criar a trajetória do pêndulo use o comando Arco Circular dado o Centro e Dois Pontos ( ), click em **O**, click em **C'** e click em **C**. Renomeie este arco para **q**. Com o comando Ponto em Objeto ( ), click em qualquer lugar no arco **q** para criar um ponto que é livre para se movimentar ao longo do arco **q**. Renomeie este ponto para **P,** maiúscula. Este ponto é o ponto que vai ser animado quando o pendulo estiver oscilando.

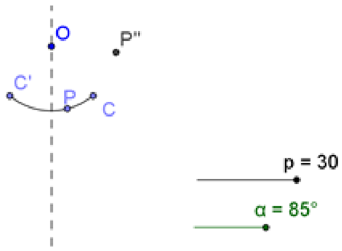


Figura 29 – 5 pontos, uma reta, um arco e 2 controles deslizantes

Ocultando **q**, **C'** e **r**.

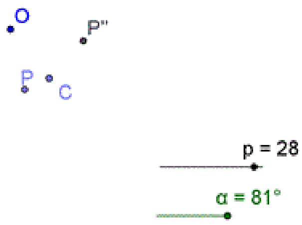


Figura 30 – 4 pontos e 2 controles deslizantes

Para efeito de interação temos apenas quatro pontos e dois controles deslizantes como mostra a Figura 30.

✓ O ponto **O** é o ponto de origem. Todos os demais pontos são translações dele, caso ele venha ser movido, todos os outros pontos se movem juntos.

✓ O ponto **P** é o ponto que receberá a animação. Oscilando num movimento que vai dar a sensação de realidade.

✓ O ponto **C** é o ponto mais alto da trajetória do pêndulo. Mexendo nele alteramos quanto de energia está armazenada no pêndulo em movimento, consequentemente o máximo de velocidade que o pêndulo terá no ponto mais baixo.

✓ O controle deslizante **p** determina o tamanho do braço do pêndulo. Este controle interfere muito no periodo do pêndulo.

✓ O controle deslizante **α** determina o maior ângulo de oscilação que o pêndulo pode ter. Determina a posição de **P''**. Determina o limite de **C**.

4.1.4. Interação Dinâmica

A presença de um ponto **C** imaginário e de um controle deslizante que movimenta um ponto **P''** mais imaginário ainda, tira qualquer semelhança com a simulação da realidade no projeto, sabe-se que isto é importante para cativar o público. Isto quer dizer que só existem 4 pontos visiveis e que o objetivo agora é que só fiquem dois, **P** e **O**. Para que isto seja feito use o comando coordenadas dinâmicas no Campo de Entrada[§] que se encontra abaixo da janela de visualização da seguinte forma, digite[**]:

- D=CoordenadasDinâmicas[C, x(C), y(C)] e em seguida tecle Enter. O ponto **D** fica com as coordenadas do ponto **C**.

- P'''=CoordenadasDinâmicas[C, x(P''), y(P'')] e em seguida tecle Enter. O ponto **P'''** fica com as coordenadas do ponto **P''**.

Esconda os pontos **C** e **P''** para **D** e **P'''** tomem o lugar deles. É preciso ainda fazer alguns ajustes nas propriedades de **P**, **D** e **P'''** da seguinte forma:

[§] Caso o Campo de Entrada não esteja aparente, click em exibir no menu principal e em seguida click em Campo de Entrada.
[**] Você poderá copiar o comando já digitado no Word e colar no Campo de Entrada do GeoGebra.

Selecione **P**, click no botão direito com o mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu.

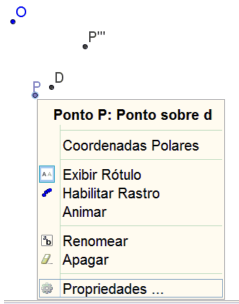


Figura 31 – Menu de **P**

Na guia Avançado preencha o campo Condição para Exibir Objeto (s) com Distância[P, D] ≥ 0.1, em Camada escolha 7 e em seguida click em () no canto superior direito da janela.

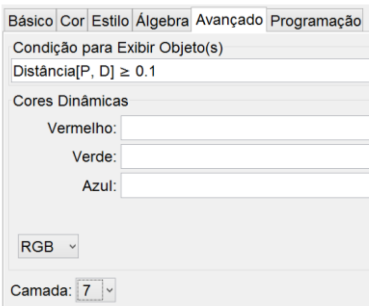


Figura 32 – Propriedades de Condição para Exibir Objeto(s) de **P**

Selecione **D**, click no botão direito com o mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu.

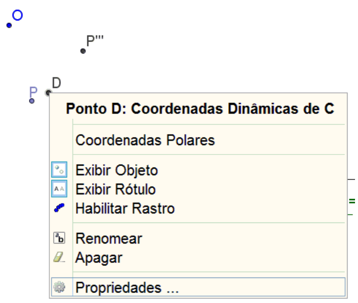


Figura 33 – Menu de **D**

Na guia Avançado preencha o campo Condição para Exibir Objeto (s) com (Distância[P, D] < 0.1) ∧ (Distância[P'', P] ≥ 0.1), em Camada escolha 8 e em seguida click em () no canto superior direito da janela.

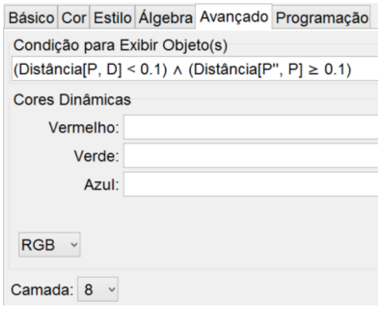


Figura 34 – Propriedades de Condição para Exibir Objeto(s) de **D**

Selecione **P’’’**, click no botão direito com o mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu.

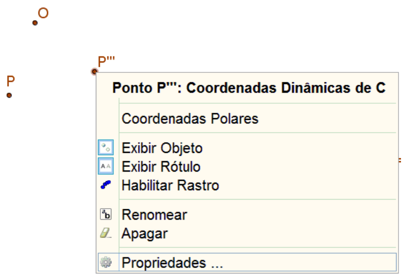


Figura 35 – Menu de **P’’’**

Na guia Avançado preencha o campo Condição para Exibir Objeto(s) com Distância[P’’, P] < 0.1, e em Camada escolha 9.

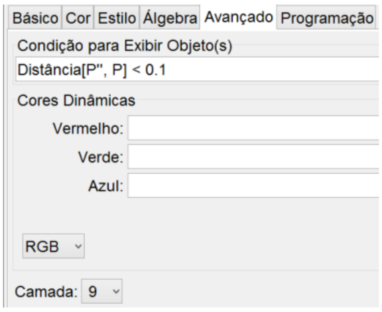


Figura 36 – Propriedades de Condição para Exibir Objeto(s) de **P’’’**

Na guia Programação em Ao Clicar, digite α=β+10º e em seguida click em () no canto superior direito da janela. Este comando irá simular uma espécie de peteleco no pêndulo, quando o ponto **P’’’** receber um click do mouse. O valor de 10º foi escolhido aleatoriamente.

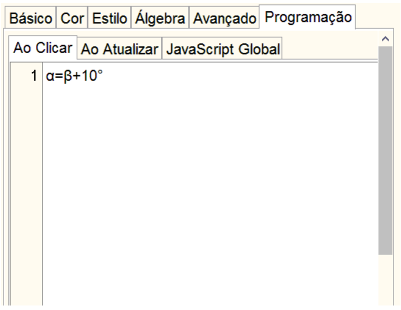


Figura 37 – Propriedades de Programação em Ao Clicar de **P’’’**

São dois pontos visiveis na tela e o que ocorre é que quando **P** fica próximo de **D**, **P** some e **D** aparece, quando **D** fica próximo de **P’’**, **D** some e **P’’’** aparece. Mexer em **P** é mexer no pêndulo, mexer em **D** é alterar os limites do pêndulo e dar um click em **P’’’** é aumentar em 10º o limite máximo de **D**. Com isto a interatividade encontrou um certo nível de satisfação, quando se clica e arrasta é como se tivesse pegando o pêndulo e levantando ou abaixando ele, quando se dá uma clicada é como se desse um peteleco no pêndulo. Isto está longe de ser o ideal, mas encontrou um bom nível de satisfação. Para que esta simulação fique apropriada, selecione (na Janela de Álgebra) **P**, **D** e **P’’’** coloque todos com a mesma cor (marrom imita a madeira) e esconda as legendas destes pontos (pode ser na Barra de Estilos).

Figura 38 – Só dois pontos visiveis na tela e 2 controles deslizantes

4.1.5. Animando o Pêndulo

Selecione **P**, click no botão direito com o mouse sobre ele e escolha Animar.

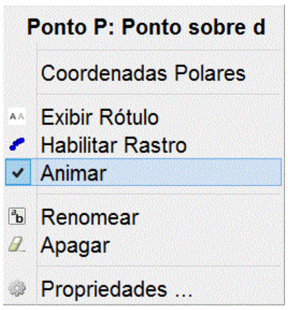


Figura 39 – No menu de **P** escolha Animar

Para parar a animação ou ativar esta animação utilize um comando tipo play (▷) ou tipo pause (⏸) que se encontra escondidinho no canto inferior esquerdo da janela de visualização.

Antes de atribuir um valor para velocidade de animação, o GeoGebra atribui o valor de 1. É preciso entender o que significa o valor 1 para o GeoGebra. Consedere o seguinte exemplo para compreensão de como o GeoGebra entende o valor da velocidade.

Sejam dois segmentos, o grande com o ponto P animado e o pequeno com o ponto Q animado.

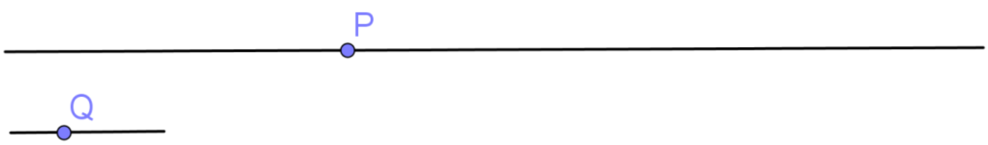


Figura 40 – Dois pontos com a mesma velocidade

Se os dois tiverem a mesma velocidade 1, poderão perceber que P se desloca rapidamente enquanto que Q se desloca lentamente. Se pararmos a animação, arrastarmos os pontos para o extremo da esquerda e ativarmos a animação, poderemos perceber que P e Q chegam juntos no extremo da direita. Para que P e Q se desloquem na tela com a mesma velocidade é necessário que a velocidade de P seja 1 dividido pelo tamanho do segmento grande enquanto que a velocidade de Q seja 1 dividido pelo tamanho do segmento pequeno. Fazendo isto observar-se que P e Q se deslocam com velocidade de apximadamente um milímetro por segundo, este valor é puramente especulativo e considera que a escala dos eixos está em centímetros. Como esta velocidade pode até depender da velocidade do processador do computador e a ideia de 1 mm/s foi puramente especulativa, cabe nesta situação a criação de uma constante multiplicativa $\mathbf{k_v}$ que terá o papel de diminuir ou aumentar a velocidade da animação como se fosse “câmera lenta” ou “câmera rápida”. Com Controle Deslizante ( ), click num ponto qualquer no canto inferior direito. Na caixa de diálogo deste controle deslizante escolha número, nomeie como k_v ($\mathbf{k_v}$), minúsculo, em valor atribua 1, com valor mínimo igual a 0, valor máximo igual a 5 e valor do incremento é igual a 0.1.

Com isto entendido poderemos começar a busca pelo valor da velocidade do pêndulo ($\mathbf{v_P}$), a primeira proposta é que a velocidade seja $\mathbf{v_P} = \mathbf{k_v}/(\mathbf{q}\ \mathbf{p})$ onde **(q p)** é comprimento do arco onde **P** oscila. Como **q** pode assumir o valor zero, é adicionado uma condicional, de forma a impedir que venha a ocorrer uma divisão por zero, modificando a proposta da velocidade para $\mathbf{v_P}$ = Se[**q** ≤ 0.1, 0 , $\mathbf{k_v}$/(**q p**)], cabe observar que 0.1 equivale ao valor de 0,1, que é a maneira como o GeoGebra trata os números decimais. Esta proposta ainda não atende ao fato de que $\mathbf{v_P}$ é mínimo no ponto mais alto e máximo no ponto mais baixo devido a conservação de energia.

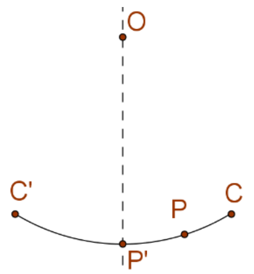


Figura 41 – O ponto **P** seus limites de oscilação

$EM_{P'} = EM_P = EM_C$

$EC_{P'} = EC_P + EP_P = EP_C$

$EC_P = EP_C - EP_P$

$(\mathbf{v_P})^2 / 2 = \mathbf{g}\ (y(\mathbf{C}) - y(\mathbf{P}))$

$\mathbf{v_P}$ = sqrt(2 **g** (y(**C**) – y(**P**))) onde y(**C**) é a ordenada de **C** e y(**P**) é a ordenada de **P**.

Nesta proposta surgiu a constante gravitacional **g**, para efeitos didáticos, vai ser criado um Controle Deslizante ( ) para ele, click num ponto qualquer no canto inferior direito. Na caixa de diálogo deste controle deslizante escolha número, nomeie como **g**, minúsculo, com valor mínimo igual a 9.6, valor máximo igual a 10 e valor do incremento é igual a 0.1. Este controle do **g** será utilizado com o pêndulo em movimento, a finalidade didática é constatar que quando o **g** varia neste intervalo o pêndulo sofre variações desprezíveis no período do seu movimento quando comparadas com as variações causadas pela mudança no tamanho do braço **p** do pêndulo.

A proposta de velocidade v_P está em:

$\mathbf{v_P}$ = Se[**q** ≤ 0.1, 0 , $\mathbf{k_v}$ sqrt(2 **g** (y(**C**) – y(**P**)))/(**q p**)].

Mas esta proposta está misturando grandezas em unidades diferentes:

$\mathbf{k_v}$ → é uma constante adimensional.

g → em m/s^2.

(y(**C**) – y(**P**)) → em cm.

q → em radianos.

p → em cm.

1/(q p) → resulta na sensação de mm/s.

Acertando todas as grandezas para milímetros:

$\mathbf{k_v}$ → é uma constante adimensional.

10^3.**g** → em mm/s^2.

10.(y(C) – y(P)) → em mm.

q → em radianos.

10.**p** → em mm.

10/(**q** 10.**p**) → continua resultando na sensação de mm/s.

Com o acerto das unidades a proposta para v_P está em:

$\mathbf{v_P}$ = Se[**q** ≤ 0.1, 0 , $\mathbf{k_v}$ sqrt(2*10^3*__g__*10*(y(**C**) – y(**P**)))*(10/(**q p**))].

$\mathbf{v_P}$ = Se[**q** ≤ 0.1, 0 , 1000$\mathbf{k_v}$ sqrt(2 **g** (y(**C**) – y(**P**)))/(**q p**)].

Esta fórmula para velocidade na prática não funcionou, quando o pêndulo chega no ponto mais alto, o pêndulo para e não se movimenta mais, para solucionar isto será introduzido na fórmula outra condicional para impedir que a velocidade atinja o valor zero, mas antes no Campo de Entrada digite:

- v'_P = 1000k_v sqrt(2 g (y(C) – y(P)))/(q p). E tecle enter.

Desta forma foi criado um número que é o valor da velocidade do pêndulo em função da altura do pêndulo, $\mathbf{v'_P}$ foi criado para evitar que a fórmula de $\mathbf{v_P}$ ($\mathbf{v_P}$ = Se[**q** ≤ 0.1, 0 , $\mathbf{v'_P}$]) fique muito grande e de difícil compreensão. Com a condicional que evita que a velocidade atinja o valor zero a proposta se torna:

$\mathbf{v_P}$ = Se[**q** ≤ 0.1, 0 , Se[(y(C) – y(P)) ≤ 10^{-8}, 1 , v'_P]].

Para colocar esta velocidade no ponto P, primeiro digite no Campo de Entrada:

v_P = Se[q ≤ 0.1, 0 , Se[(y(C) – y(P)) ≤ 10^-8, 1 , v'_P]]. E tecle enter. Na Janela de Álgebra foi criado o número **v_P**.

Em seguida selecione **P** na Janela de Álgebra, click no botão direito com o mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu.

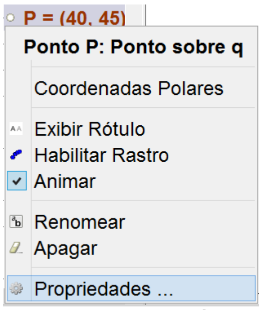


Figura 42 – No menu de **P**, da Janela de Álgebra, escolha Propriedades

Na guia Álgebra preencha o campo Velocidade: com v_P, em Repetir: escolha Oscilando e em seguida click em (✕) no canto superior direito da janela.

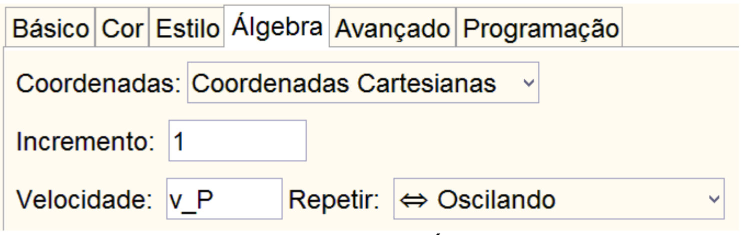


Figura 43 – Propriedades de Álgebra do ponto **P**

Na janela de visualização são dois pontos e quatro controles deslizantes.

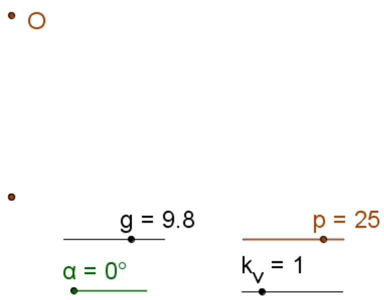


Figura 44 – Dois pontos e quatro controles deslizantes

4.1.6. Aparência do Pêndulo

A haste do pêndulo é construida atraves do comando chamado Lista que consiste numa lista de pontos separados por vírgulas, os pontos são construidos a partir de dois pontos iniciais utilizando os conhecimentos de Geometria Analítica[††]. A consequência disto é que a posição dos pontos da lista está em função dos dois pontos iniciais.

No Campo de Entrada digite:

- listaHastePendulo={O - 0.02Vetor[O, P] + 0.02VetorPerpendicular[Segmento[O, P]], O - 0.02Vetor[O, P] - 0.02VetorPerpendicular[Segmento[O, P]], P + 0.02Vetor[O, P] - 0.02VetorPerpendicular[Segmento[O, P]], P + 0.02Vetor[O, P] + 0.02VetorPerpendicular[Segmento[O, P]]} e tecle enter. Foram criados quatro pontos na janela de visualização. Esconda a lista.
- polHastePendulo=Polígono[listaHastePendulo] e tecle enter. Foi criado um quadrilátero na janela de visualização. Não esconda este objeto esconda apenas o Rótulo.

Para construir o pêndulo digite no Campo de Entrada:

- d=Círculo[P, 5] e tecle enter. Isto significa círculo de raio 5 com centro no ponto **P**. Não esconda este objeto esconda apenas o Rótulo.

Tanto para haste quanto para o pêndulo foi escolhida a cor marrom com transparência de 75% para simular a madeira.

4.1.7. Parar o Pêndulo

A maneira natural de parar o movimento de um pêndulo é ficar esperando que aos poucos o movimento vai diminuindo até parar. A perda de energia devido ao atrito é a responsável pela parada do pêndulo, perder energia significa perder altura, o que no caso do pêndulo se traduz em movimentos com ângulos cada vez menores. A maneira encontrada para simular este fato foi animando o controle deslizante **α** de maneira única e decrescente. Experimentalmente v_α = 0,3 demonstrou ser um valor que traduzia um visual agradável. Para que esta animação pare ao fim do processo foi adicionado uma condicional em função do tamanho do arco **q**.

No Campo de Entrada digite:

[††]Detalhes das operações com vetores utilizadas neste comando podem ser encontradas no trabalho sobre Pantógrafo da Patrícia Bittencourt, da turma de 2012 do ProfMat do IMPA.

v_α= Se[q > 0, 0.3, 0] e tecle enter. Com a animação decrescente o arco **q** tende a 0, quando **q** se torna zero, $\mathbf{v_\alpha}$ se torna zero e a animação para.

Em seguida selecione o controle deslizante **α**, click no botão direito com o mouse sobre ele e escolha Animar no menu, click no botão direito com o mouse sobre ele novamente e escolha Propriedades no menu.

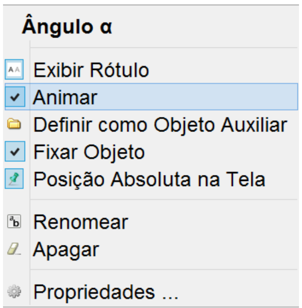


Figura 45 – Em **α** escolha Animar

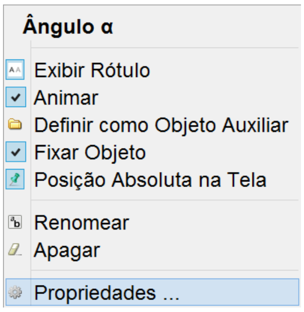


Figura 46 – Em **α** escolha Propriedades

Na guia Controle Deslizante preencha o campo Velocidade: com v_α, em Repetir: escolha Decrescente e em seguida click em ( ) no canto superior direito da janela.

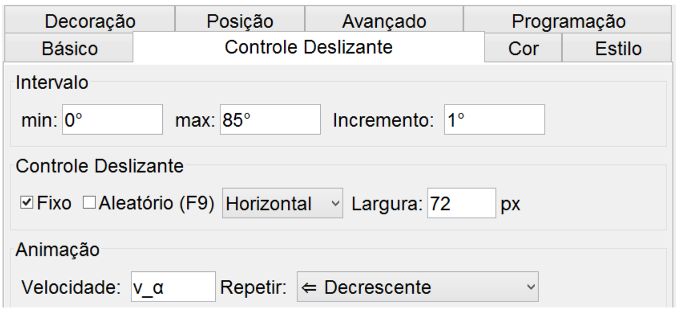


Figura 47 – Propriedades de Controle Deslizante do ângulo **α**

A parada do pêndulo também pode ser conseguida arrastando o controle deslizante k_v para a esquerda ($k_v = 0$), ou arrastando o controle deslizante α para a esquerda (α = 0). Com $k_v = 0$ a parada é visualmente feia dando um aspecto artificial ao projeto.

Parar o pêndulo utilizando a interação no pêndulo em movimento, é quase impossível, a sensação é de que falta outro dedo para ajudar. Pensando nisto será criado um estribo na base para parar o pêndulo de maneira interativa, sem precisar usar os controles deslizantes.

Como todas as explicações dos comandos utilizados na construção deste estribo da base podem ser encontradas no trabalho sobre Pantógrafo da

Patrícia Bittencourt. Está descrito abaixo apenas a sequência de comandos do Campo de Entrada:

- b=Círculo[O, 70] e tecle enter. Foi estipulada uma distância de 70.
- B=Interseção[b, r, 1] e tecle enter. É o ponto do “chão” abaixo de O.
- a=Perpendicular[B, r] e tecle enter. É a reta do “chão.
- B'=Ponto[a] e tecle enter. Ponto livre no “chão”.
- b'=Círculo[B', 70] e tecle enter. Distância de 70 apartir do “chão”.
- A= PontoEm[b'] e tecle enter. Ponto livre dentro desta distância.
- b'_1=Círculo[B', 35] e tecle enter. Distância de 35 apartir do “chão”.
- b'_2= Círculo[A, 35] e tecle enter. Distância de 35 apartir do A.
- A_b= Interseção[b'_1, b'_2, 1] e tecle enter. Ponto da articulação.
- listaEstriboBase= {A, A + 0.1Vetor[A, A_b] + 0.03VetorPerpendicular[Segmento[A, A_b]], A_b + 0.03VetorPerpendicular[Segmento[A, A_b]], A_b + 0.03VetorPerpendicular[Segmento[A_b, B']], B' + 0.03VetorPerpendicular[Segmento[A_b, B']], B' - 0.03VetorPerpendicular[Segmento[A_b, B']], A_b - 0.03VetorPerpendicular[Segmento[A_b, B']], A_b - 0.03VetorPerpendicular[Segmento[A, A_b]], A + 0.1Vetor[A, A_b] - 0.03VetorPerpendicular[Segmento[A, A_b]]} e tecle enter. Os pontos de contorno do Estribo da Base.
- poliEstriboBase= Polígono[listaEstriboBase] e tecle enter. O Estribo da Base.

Após ter executado esta sequência de comandos, na Janela de Álgebra, click na bolinha a esquerda para ocultar os seguintes objetos **b**, **B**, **b'**, **b'$_1$**, **b'$_2$**, **A$_b$** e listaEstriboBase. Na janela de visualização selecione e esconda o rótulo de **a**, **B'**, e **A**. Torne a reta **a** tracejada. Escolha a cor marrom para poliEstriboBase.

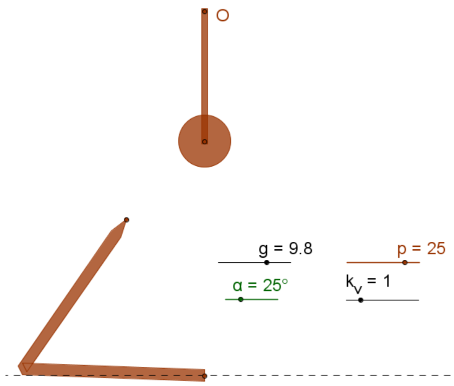


Figura 48 – O Estribo da Base

Para que este estribo venha a funcionar é necessário adicionar a velocidade do pêndulo e a velocidade de α uma condicional do tipo se a ponta da haste (ponto A) tocar o pêndulo então ele para.

Digite no Campo de Entrada:

v_P=Se[PertenceARegião[A, d] ∨ PertenceARegião[A, polHastePendulo], 0, Se[q ≤ 0.1, 0, Se[y(C) - y(P) ≤ 10^(-8), 1, v'_P]]] e tecle enter. Na Janela de Álgebra foi criado o número v_P.

v_α= Se[PertenceARegião[A, d] ∨ PertenceARegião[A, polHastePendulo], 0, Se[q > 0, 0.3, 0]] e tecle enter. Com a animação decrescente o arco **q** tende a 0, quando **q** se torna zero, **v_α** se torna zero e a animação para.

Depois de alterar a função da velocidade é aconselhável verificar se em propriedades do ponto **P** e propriedades do ângulo **α** se as velocidades de animação continuam v_P e v_α, caso contrário, escreva v_P e v_α para os valores destas velocidades.

4.1.8. Informações do Pêndulo

Com o comando Inserir Texto (ABC), click num ponto qualquer no canto superior esquerdo. Na caixa de diálogo escreva Aceleração da gravidade: m/s². Posicione o cursor antes da unidade (m/s²) e click em **g** na Janela de Álgebra. Click em ok.

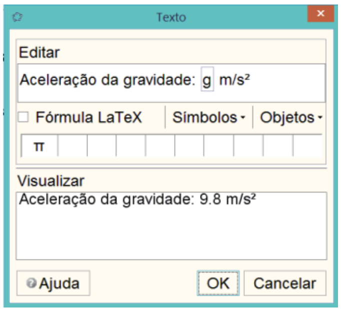


Figura 49 – O texto da Aceleração da gravidade

Com o comando Inserir Texto ( ), click num ponto qualquer no canto superior esquerdo. Na caixa de diálogo escreva Comprimento do Pêndulo: cm. Posicione o cursor antes da unidade (cm) e click em p na Janela de Álgebra. Click em ok.

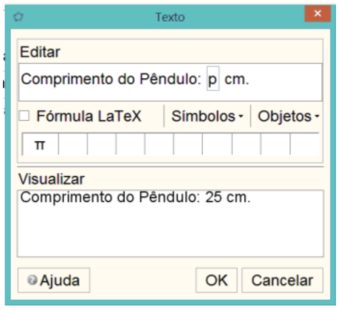


Figura 50 – O texto do Comprimento do Pêndulo

Com o comando Inserir Texto ( ), click num ponto qualquer no canto superior esquerdo. Na caixa de diálogo escreva Fator multiplicativo da velocidade: . Posicione o cursor no fim do texto e click em k_v na Janela de Álgebra. Click em ok.

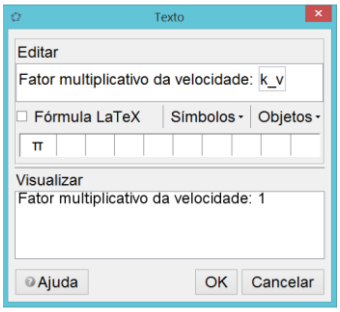


Figura 51 – O texto do Fator multiplicativo

Com o comando Inserir Texto ( ), click num ponto qualquer no canto superior esquerdo. Na caixa de diálogo escreva Amplitude do Pêndulo: . Posicione o cursor no fim do texto e click em β na Janela de Álgebra. Click em ok.

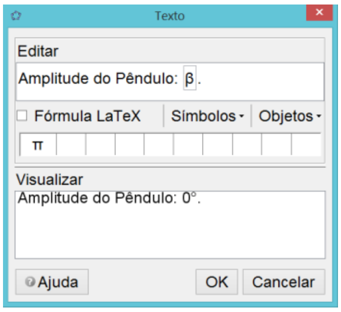


Figura 52 – O texto da Amplitude do Pêndulo

O período do pêndulo no GeoGebra é desconhecido, mas o período de um pêndulo com determinadas características é fisicamente conhecido. Quando sai da posição de repouso o pêndulo realiza oscilações. Desprezando as ações de atrito as únicas forças significativas em **d** (círculo com centro em P e raio 5, definido em 4.1.6 Aparência do Pêndulo) são a tensão ($\vec{T}$) e o peso ($\vec{P}$).

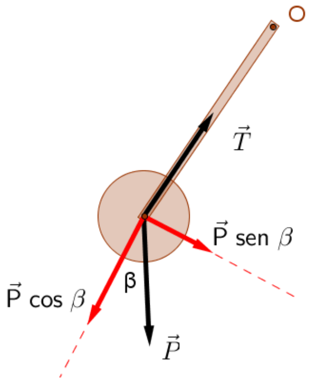


Figura 53 – Decomposição do peso

No ponto mais alto da trajetória $|\vec{T}|$ = $|\vec{P}|$ cos β e a força resultante é $|\vec{F_R}|$ = $|\vec{P}|$ sen β, o arco β é a razão do comprimento do arco **q** pelo raio **p**, $|\vec{F_R}|$ = $|\vec{P}|$ sen (q / p), mas para β < π/8 o valor do seno do ângulo é aproximadamente igual a este ângulo, $|\vec{F_R}|$ = $|\vec{P}|$ q/p = m' g q / p, onde m' é a massa de **d**. Escrita desta forma a força restauradora é dada por uma constante (m' g / p) multiplicada pelo comprimento do arco, o que caracteriza um movimento harmônico simples (MHS). Como período em qualquer MHS é T = 2 π $\sqrt{\frac{m}{k}}$, neste pêndulo o período será:

t = 2 π $\sqrt{\frac{m'}{\frac{m'g}{p}}}$ = 2 π $\sqrt{\frac{p}{g}}$.

No Campo de Entrada digite:

t=Se[(β > 0°) ∧ (β < 22.5°), 2π sqrt(p / (100g))] e tecle enter. Na Janela de Álgebra foi criado o número t.

Com o comando Inserir Texto ( ), click num ponto qualquer no canto superior esquerdo. Na caixa de diálogo escreva Período do Pêndulo: . Posicione o cursor no fim do texto e click em t na Janela de Álgebra. Click em ok.

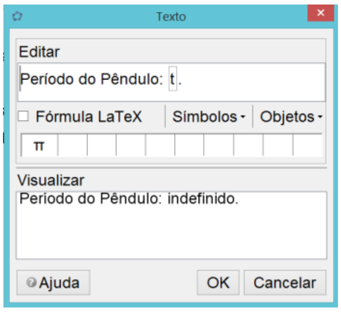


Figura 54 – O texto do Período do Pêndulo

Para organizar todas estas informações e os controles deslizantes vão ser criados duas caixas para exibir / esconder objetos. Com o comando Exibir / Esconder Objetos ( ), click num ponto qualquer mais alto do canto superior esquerdo. Na caixa de diálogo em legenda: preencha com Informações:, estenda a cortina abaixo e selecione Texto **texto1**, Texto **texto2**, Texto **texto3**, Texto **texto4** e Texto **texto5**. Click em Aplicar. Caso necessário renomeie para **m**.

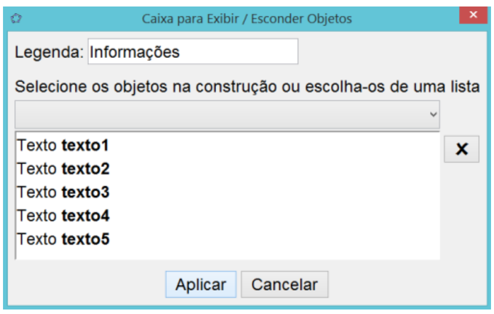


Figura 55 – Caixa para Exibir / Esconder Informações

Antes de organizar os controles deslizantes vai ser criado um botão para restaurar as condições iniciais. Com o comando Inserir Botão ( ), click num ponto qualquer do canto inferior esquerdo. Na caixa de diálogo em legenda: preencha com Reset. em Código GeoGebra: preencha com:

α=25°

k_v=1

g=9.8

p=25

DefinirCoordenadas[O,40,70]

DefinirCoordenadas[B',x(O),y(O)−70]

DefinirCoordenadas[A,x(B')−15,y(B')+30]

IniciarAnimação[α,true]

IniciarAnimação[P,true]

DefinirCoordenadas[C,x(P'),y(P')]

DefinirValor[e,0]

DefinirValor[m,0]

Click em Aplicar.

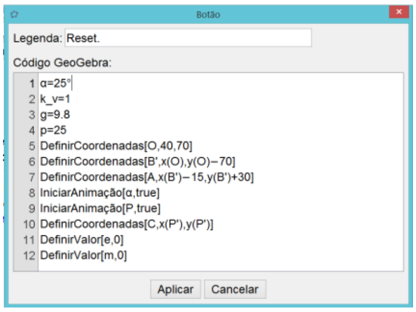


Figura 56 – Comandos do Botão Reset após a construção do Pêndulo

Com o comando Exibir / Esconder Objetos ( ), click num ponto qualquer do canto inferior esquerdo. Na caixa de diálogo em legenda: preencha com Controles:, estenda a cortina abaixo e selecione Número **g**, Número **k_v**, Número **p**, Ângulo **α** e Botão **Reset**. Click em Aplicar. Caso necessário renomeie para **e**.

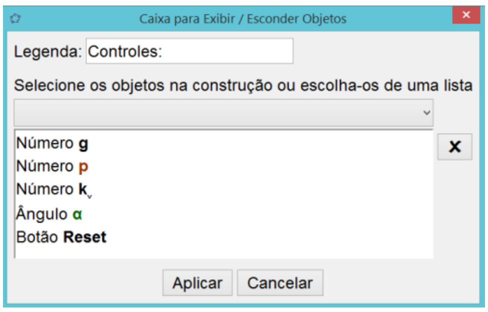


Figura 57 – Caixa para Exibir / Esconder Controles

Com o comando Mover ( ). Organize todas as informações e os controles. Em seguida selecione cada um deles, click com o botão direito e escolha Fixar Objeto e na janela de visualização com o item selecionado marque posição absoluta na tela .

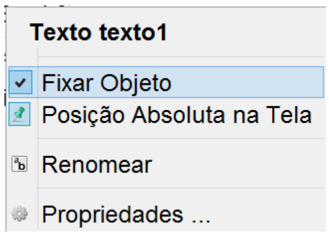


Figura 58 – Fixar texto1, texto2, ...

Após alinhar e fixar os objetos na janela de visualização existe a opção de esconder ou mostrar as informações e os controles.

O arquivo no atual estágio de construção tem o nome de TCC_Pendulo.ggb, pode ser visto no link http://www.geogebratube.org/student/m93027 e pode ser copiado com o nome de material-93027.ggb no link http://www.geogebratube.org/material/download/format/file/id/93027. Após aberto tem a aparência mostrada na figura a seguir.

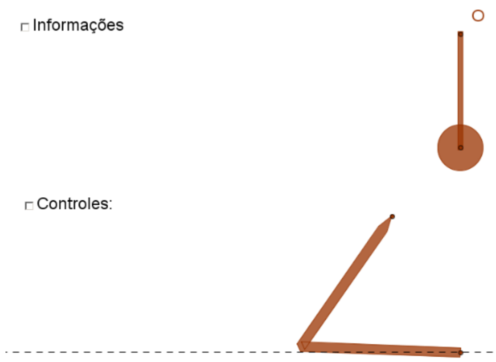


Figura 59 – O Pêndulo pronto

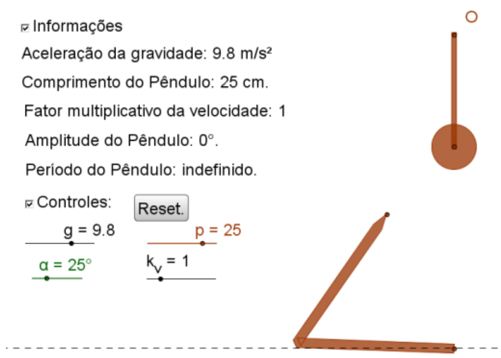


Figura 60 – TCC_Pendulo.ggb

4.2. Construção das Engrenagens

4.2.1. Primeiros passos

Antes de começar a construir uma roda dentada é importante esclarecer que se uma roda com 60 dentes vai interagir com uma roda com 12 dentes, é aconselhavel que os dentes sejam congruentes, se o dente de uma roda é um triângulo equilátero de lado 1cm então a outra roda também deve ter dentes no formato deste mesmo triângulo. A consequência disto é que o raio do círculo da roda dentada fica em função do tamanho do dente (l) e do número de dentes (n).

$$r_n \sin\frac{360^o}{2n} = \frac{l}{2} \rightarrow r_n = \frac{l}{2\sin\frac{360^o}{2n}}$$

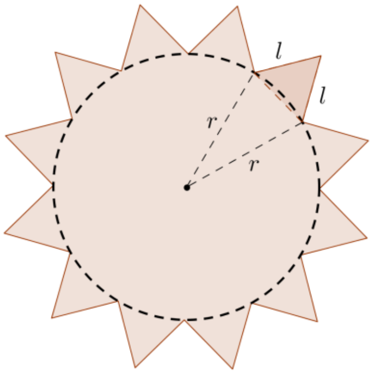


Figura 61 – Círculo da roda dentada

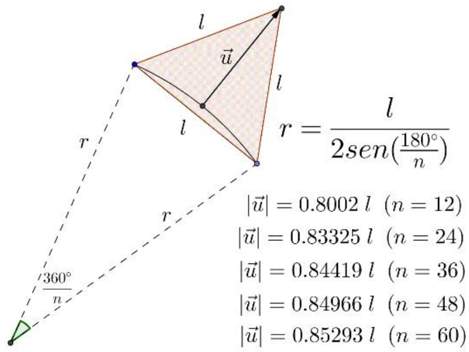


Figura 62 – Raio do círculo da roda dentada

O módulo do vetor **u** pode ser calculado pela diferença entre a altura do triângulo e o tamanho da flecha, mas neste caso, antes de equacionar o vetor u, optou-se pela retirada direta da medida no desenho feito em escala no GeoGebra, só para ilustrar mais uma forma de utilização do GeoGebra, como são apenas quatro rodas dentadas (12,36,48 e 60 dentes) foram retiradas quatro constantes:

$|\vec{u}|$=0.85293 l para n=60

$|\vec{u}|$=0.84966 l para n=48

$|\vec{u}|$=0.84419 l para n=36

$|\vec{u}|$=0.8002 l para n=12

A equação do vetor u em função de n e l é:

$$|\vec{u}| = l\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(r - r\cos\left(\frac{360^o}{2n}\right)\right)$$

$$|\vec{u}| = l\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{l}{2\sin\left(\frac{360^o}{2n}\right)}\left(1 - \cos\left(\frac{360^o}{2n}\right)\right)$$

$$|\overrightarrow{u_n}| = \left(\sqrt{3} - \csc\frac{360^o}{2n} + \cot\frac{360^o}{2n}\right)\frac{l}{2}$$

Escrito no GeoGebra fica:

k_{n}=(sqrt(3)− cosec(180°/n)+ cotg(180°/n))*(l/2)

Com este vetor no comando Girar poderão ser gerados todos os pontos da roda dentada, uma roda com 60 dentes necessita de mais de 120 pontos, o que leva ao comando de lista. Os pontos serão gerados por:

- Sequência[<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>, <Incremento>]
- Girar[<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>]

Unindo estes dois comandos será criada uma lista sequencial dos pontos da roda dentada que seguirão o seguinte padrão.

L_0=L_{n}= Sequência[Girar[B_{n}, 360° m / (2n), A_{n}], m, 1, 2n, 1]

$L_0 = Sequência\left[Girar\left[B\,,\frac{360^o m}{2n}\,,A\right]\,,m\,,1\,,2n\right]$ ‡‡

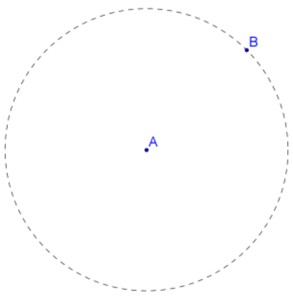


Figura 63 – Circunferência da roda dentada

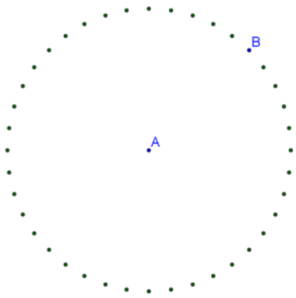


Figura 64 – Pontos do comando Girar

Onde n é o número de dentes, m é uma variável interna que varia de 1 a 2n, mas desta forma os pontos não formam dentes, para que os pontos formem dentes são utilizados o vetor **u,** que adicionado ao ponto **B** gera o ponto desejado do dente em forma de triângulo equilátero, e a sequência $a_n = 1 + (-1)^m$ = { 0 ; 2 ; 0 ; 2 ; 0 ; 2 ;...} para construir a expressão B + (1 + $(-1)^m)\,\vec{u}$ capaz de gerar uma sequência de pontos que obedece uma lei de formação, para m impar resulta o próprio ponto B e para m par resulta o ponto B+2$\vec{u}$. Esta expressão no padrão da lista L_0 resulta:

L_1=L_{n}= Sequência[Girar[B_{n} + (1 + (-1)^(m)) u_{n}/2, 360° m /(2n), A_{n}], m, 1, 2n]

$$L_1 = Sequência\left[Girar\left[B + (1 + (-1)^m)\frac{\vec{u}_n}{2}\,,\frac{360^o m}{2n}\,,A\right]\,,m\,,1\,,2n\right]$$

‡‡ O último 1, o incremento, da expressão pode ser suprimido.

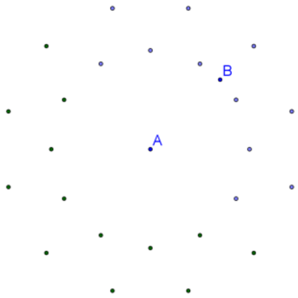


Figura 65 – Girando B e B+2$\vec{u}$

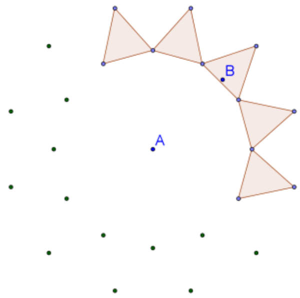


Figura 66 – Dentes triangulares

Unindo com segmentos os pontos desta lista, em sequência, constrói-se o polígono da figura a seguir.

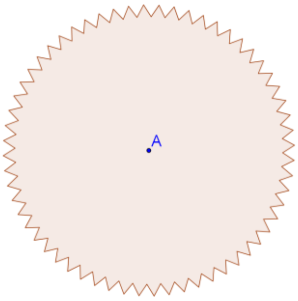


Figura 67 – Roda estrelada

Outro padrão interessante pode ser obtido se usar uma rotação do vetor u (u').

$\overrightarrow{u'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \vec{u}$. Um exemplo seria $\overrightarrow{u'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{u}$.

L2=L_{n}= Sequência[Girar[B_{n} + (1 + (-1)^(m)) u'_{n}/2, 360° m /(2n), A_{n}], m, 1, 2n]

$$L_2 = Sequência\left[Girar\left[B + (1 + (-1)^m)\frac{\vec{u}'_n}{2}, \frac{360^o m}{2n}, A\right], m, 1, 2n\right]$$

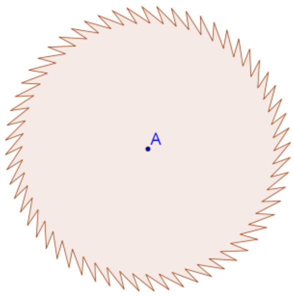


Figura 68 – Roda dentada com inclinação

Mais um padrão interessante é obtido unindo as duas sequências descritas a seguir.

$a_m = 1 + (-1)^{Int\left[\frac{m}{2}\right]} \rightarrow \{\,0;\ 0; 2; 2;\ 0;\ 0; 2; 2; \ldots\}.$

No GeoGebra é: a_m=1 + (-1)^(ceil(m / 2))

$b_m = (-1)^{Int\left\lfloor\frac{m+2}{2}\right\rfloor} \rightarrow \quad \{-1; 1; 1; -1; -1; \; 1; 1; -1; \ldots\}.$

No GeoGebra é: b_m=(-1)^(floor((m + 2) / 2))

A primeira sequência (a_m) agindo na posição dos pontos, assim como no padrão anterior, para construir a expressão $B + \left(1 + (-1)^{Int\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil}\right)\vec{u}$ que é capaz de gerar uma sequência de pontos que obedece uma lei de formação { B; B; B+2$\vec{u}$; B+2$\vec{u}$; B; B; B+2$\vec{u}$; B+2$\vec{u}$; ...}. E a segunda sequência (b_m) agindo na rotação do ponto B, fazendo com que a rotação não aconteça com todos os ângulos iguais, mas que obedeça um certo padrão.

Estas duas sequências gerando duas expressões no padrão da lista L_0 resulta:

L_3= Sequência[Girar[B + (1 + (-1)^(ceil(m / 2))) u, 360° m / (4n) + ∆ (-1)^(floor((m + 2) / 2)), A], m, 1, 4n]

$$L_3 = Sequência\left[Girar\left[B + \left(1 + (-1)^{Int\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil}\right)\frac{\vec{u}_n}{2}, \frac{360^o m}{4n} + \Delta_n(-1)^{Int\left\lfloor\frac{m+2}{2}\right\rfloor}, A\right], m, 1, 4n\right]$$

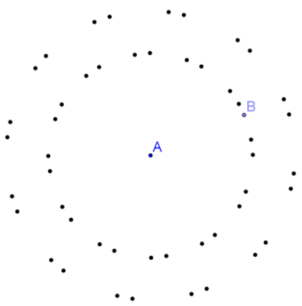


Figura 69 – Girando B; B; B+2$\vec{u}$; B+2$\vec{u}$

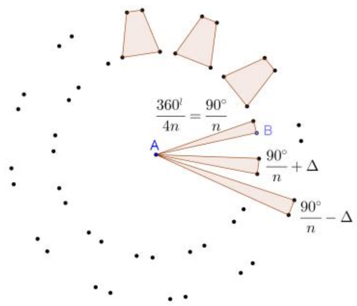


Figura 70 – Dentes em forma de pirâmide

Unindo com segmentos os pontos desta lista, em sequência, constrói-se o polígono da figura a seguir.

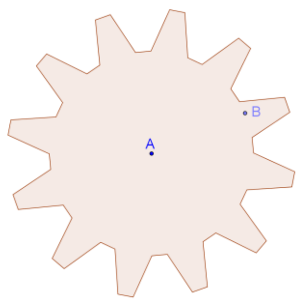


Figura 71 – Roda dentada

Cada dente é formado por quatro pontos, sendo n dentes, o ângulo de rotação aplicado ao ponto B seria $\frac{360^o}{4n} = \frac{90^o}{n}$, mas este ângulo não pode ser igual em todas as rotações porque a parte mais externa do dente, por ter maior raio, ficaria maior que a parte interna, o que impossibilitaria um bom encaixe das engrenagens. Isto significa que quando o ponto **B** estiver rodando para gerar os pontos da parte interna do dente, deve girar $\frac{90^o}{n} + \Delta$ e para os pontos da parte externa deve girar $\frac{90^o}{n} - \Delta$, com delta (Δ) sendo calculado para gerar cordas de mesmo tamanho ou com a cordas externas menores que as cordas internas.

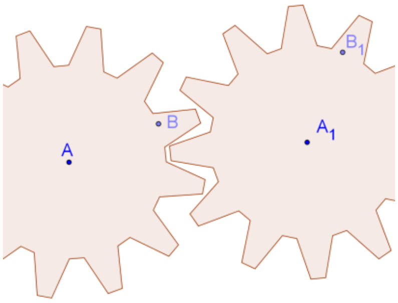


Figura 72 – Encaixe das rodas

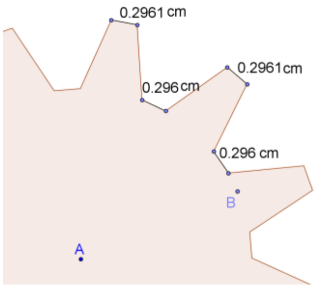


Figura 73 – Cordas internas e cordas externas

É necessário que as cordas obedeçam esta relação, mas no comando girar do GeoGebra, os arcos são as variáveis, a busca por valores para Δ, será feita de maneia a encontrar cordas internas de mesmo tamanho que as cordas externas:

tamanho da corda interna= 2r_n sen(π / (4n) + Δ_n)

tamanho da corda externa= 2 (r_n + k_n) sen(π / (4n) - Δ_n)

$$corda\ interna = corda\ externa$$

$$2r \sin\left(\frac{360^o}{8n} + \Delta\right) = 2(r+k)\sin\left(\frac{360^o}{8n} - \Delta\right)$$

$$r\left(\sin\frac{360^o}{8n}\cos\Delta + \sin\Delta\cos\frac{360^o}{8n}\right) = (r+k)\left(\sin\frac{360^o}{8n}\cos\Delta - \sin\Delta\cos\frac{360^o}{8n}\right)$$

$$2\,r\sin\Delta\cos\frac{360^o}{8n} = k\sin\frac{360^o}{8n}\cos\Delta - k\sin\Delta\cos\frac{360^o}{8n}$$

$$2\,r\sin\Delta\cos\frac{360^o}{8n} + k\sin\Delta\cos\frac{360^o}{8n} = k\sin\frac{360^o}{8n}\cos\Delta$$

$$\sin\Delta\left(2\,r\cos\frac{360^o}{8n} + k\cos\frac{360^o}{8n}\right) = k\sin\frac{360^o}{8n}\cos\Delta$$

$$\tan \Delta = \frac{k \sin \frac{360^o}{8n}}{2\ r \cos \frac{360^o}{8n} + k \cos \frac{360^o}{8n}}$$

$$\Delta_n = \tan^{-1}\left(\frac{k_n \sin \frac{360^o}{8n}}{2\ r_n \cos \frac{360^o}{8n} + k_n \cos \frac{360^o}{8n}}\right)$$

No GeoGebra a escrita é:

Δ_{n}= arctg(k_{n} sen(pi/(4n))/(2 r_{n} cos(pi/(4n)) + k_{n} cos(pi/(4n))))

Um exemplo seria:

Δ_{48}= arctg(k_{48} sen(pi/(192))/(2 r_{48} cos(pi/(192)) + k_{48} cos(pi/(192))))

Talvez o correto seria:

$corda\ interna\ (n = 12) \geq corda\ externa\ (n = 48).$

Mas de posse de um valor para Δ, é possível depois alterá-lo para atender outros objetivos específicos.

Com este ângulo delta (Δ) é montada a expressão:

$$\frac{90^o}{n} m + \Delta(-1)^{Int\left\lfloor\frac{m+2}{2}\right\rfloor}$$

que no GeoGebra fica:

90° m / n + Δ (-1)^(floor((m + 2) / 2))

que utilizada no padrão já estabelecido resultou:

L_3=L_{n}= Sequência[Girar[B_{n} + (1 + (-1)^(ceil(m / 2))) u, 90° m / n + Δ (-1)^(floor((m + 2) / 2)), A_{n}], m, 1, 4n]

Com:

r_{n}= l /(2 sen(180°/n))

k_{n}=(sqrt(3)− cosec(180°/n)+ cotg(180°/n))*(l/2)

u_{n}= k_{n} VetorUnitário[Segmento[A_{n}, B_{n}]]

$$\overrightarrow{u'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \vec{u} \quad ou \quad \overrightarrow{u'} = m_\theta \vec{u} \quad com \quad m_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$L_3 = Sequência\left[Girar\left[B + \left(1 + (-1)^{Int\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil}\right)\frac{\vec{u}_n}{2}, \frac{90^o m}{n} + \Delta(-1)^{Int\left\lfloor\frac{m+2}{2}\right\rfloor}, A\right], m, 1, 4n\right]$$

$$com \quad \Delta_n = \tan^{-1}\left(\frac{k_n \sin \frac{360^o}{8n}}{2\ r_n \cos \frac{360^o}{8n} + k_n \cos \frac{360^o}{8n}}\right) \quad e \quad |\overrightarrow{u_n}| = k_n = \left(\sqrt{3} - \csc \frac{360^o}{2n} + \cot \frac{360^o}{2n}\right)\frac{l}{2}$$

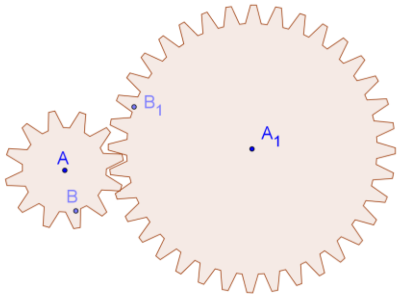


Figura 74 – Encaixe das rodas de tamanhos diferentes

4.2.2. Criando a primeira engrenagem

Esta engrenagem deverá interagir com o pêndulo, embora sua construção seja independente, seu eixo de simetria deverá ser o mesmo eixo de simetria do pêndulo, para facilitar a interação dos dois. Isto obriga o centro da engrenagem estar na reta **r** já criada.

Para colocar a engrenagem abaixo do ponto **O** (ponto original) e de maneira que ela não venha a incobrir o ponto **O** é preciso conhecer antes as dimensões desta roda dentada. O raio é dado por raio = l /(2 sen(180°/n)), sendo n = 60 então raio = l /(2 sen(3°)). Para l (tamanho do lado do triângulo do dente) será criado o último controle deslizante, ele irá atuar nas dimensões de todas as engrenagens, será um controle de tamanho para efeitos didáticos. Com o comando () click num ponto qualquer no canto inferior esquerdo. Na caixa de diálogo deste Controle Deslizante escolha número, nomeie como **l**, minúsculo, com valor mínimo igual a 1, valor máximo igual a 5 e valor do incremento é igual a 1. Click em Aplicar.

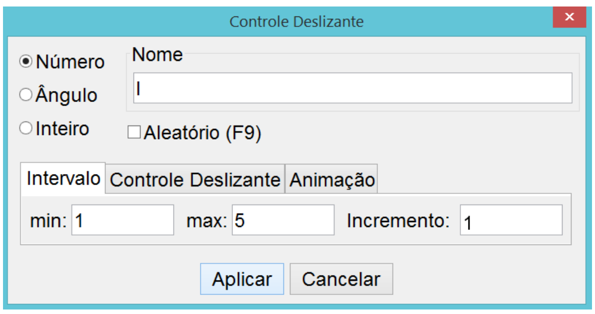


Figura 75 – Caixa de diálogo do Controle Deslizante **l**

Selecione **l**, click no botão direito com o mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu.

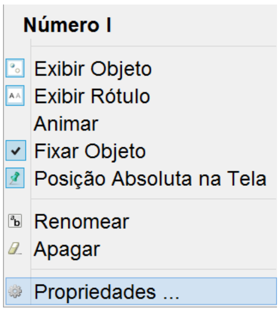


Figura 76 – Escolha Propriedades no menu de **l**

Na guia Avançado preencha o campo Condição para exibir objeto(s) com a letra **e** em seguida click em () no canto superior direito da janela.

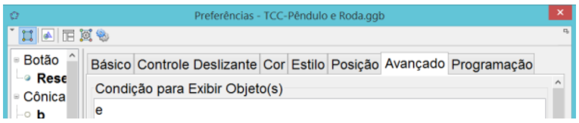


Figura 77 – Propriedade, Avançado, Condição para exibir **l**

Com o comando Mover (), organize (alinhe) com os outros controles, em seguida selecione **l**, click com o botão direito e escolha Fixar Objeto, click com o botão direito e escolha Posição Absoluta na Tela ().

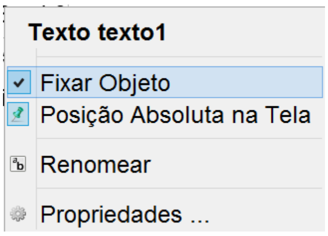


Figura 78 – Escolha Fixar **l**

Click com o botão direito do mouse sobre o botão de Reset, escolha Propriedades, na guia de Programação escolha Ao Clicar, acrescente uma linha com l = 1, coloquei esta linha abaixo da quarta por questões de estética, e em seguida click em OK e em () no canto superior direito da janela.

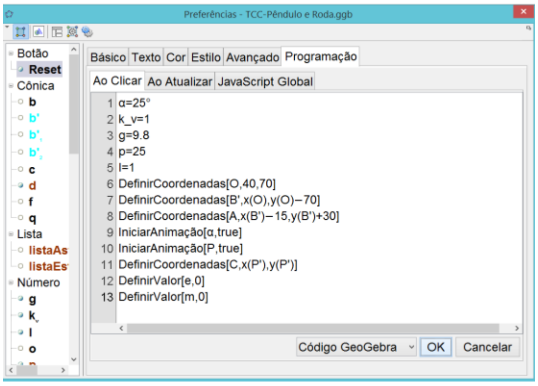


Figura 79 – Botão de Reset, Propriedade, Ao Clicar, **l** = 1

Após alinhar e fixar os objetos na janela de visualização existe a opção de esconder ou mostrar as informações e os controles.

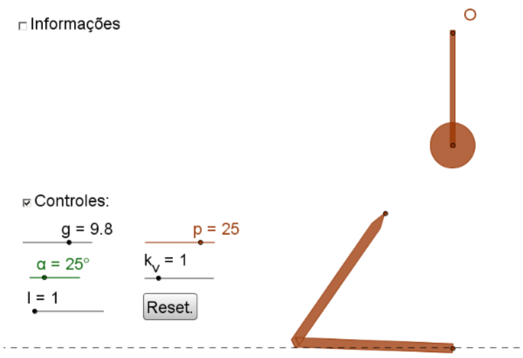


Figura 80 – Pêndulo com o Controle Deslizante **l** para receber as engrenagens

A sequência de comandos utilizada para criar a primeira roda dentada, está descrita a seguir e foi toda desenvolvida a partir do Campo de Entrada. No Campo de Entrada digite:

- r_{60}= l /(2 sen(3°)) e tecle enter, este é o raio interno da engrenagem com 60 dentes. Aparece apenas na Janela de Álgebra. A expressão geral é:

$$r_n = \frac{l}{2\sin\frac{360^o}{2n}}$$

- c'_{60}=Círculo[O,2l + r_{60}] e tecle enter, esta é a circunferência que contém o centro da engrenagem de 60 dentes. Esconda este círculo.
- A_{60}=Interseção[r,c'_{60},1] e tecle enter, este é o centro da engrenagem de 60 dentes. Esconda este ponto.
- c_{60}= Círculo[A_{60}, r_{60}] e tecle enter, este é o círculo interno da engrenagem de 60 dentes. Esconda este círculo.

- B_{60}= Ponto[c_{60}] e tecle enter, este é o ponto que será animado na engrenagem de 60 dentes. Não esconda este ponto, esconda apenas o rótulo.
- k_{60}=(sqrt(3) - cossec(3°) + cotg(3°)) l / 2 e tecle enter, este é o módulo do vetor u_{60}, é a menor distância entre o vértice do dente e a circunferência interna da engrenagem de 60 dentes. Este número não aparece na Janela de Visualização, ele está na Janela de Álgebra. A expressão geral é:

$$k_n = |\vec{u}_n| = \left(\sqrt{3} - \csc\frac{360^o}{2n} + \cot\frac{360^o}{2n}\right)\frac{l}{2}$$

- θ=0° e tecle enter, este é o ângulo de inclinação do dente. Este ângulo não aparece na Janela de Visualização, ele está na Janela de Álgebra.
- m_θ={{cos(θ), -sen(θ)}, {sen(θ), cos(θ)}} e tecle enter, esta é a matriz que multiplicada ao vetor **u** promove uma rotação de um ângulo **θ**. Esta matriz não aparece na Janela de Visualização, ele está na Janela de Álgebra. A expressão geral é:

$$m_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- u'_{60}=2 m_θ k_{60} VetorUnitário[Segmento[A_{60}, B_{60}]] e tecle enter, este é o vetor utilizado na criação dos pontos gerados a partir de $\mathbf{B_{60}}$. Serve para gerar os vértices da engrenagem de 60 dentes. Como esta roda dentada vai interagir com o estribo, este vetor u está multiplicado por 2, dobrando a altura do dente. Esconda este vetor. A expressão geral é:

$$\overrightarrow{u'}_{n,\theta} = m_\theta k_n \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

- lista60= Sequência[Girar[B_{60} + (1 + (-1)^(m)) u'_{60}/2, m 3°, A_{60}], m, 1, 120] e tecle enter, esta é lista de pontos da roda dentada de 60 dentes. Esconda esta lista. A expressão geral é:

$$L_2 = Sequência\left[Girar\left[B + (1 + (-1)^m)\frac{\vec{u}'_n}{2}, \frac{360^o m}{2n}, A\right], m, 1, 2n\right]$$

- pol60=Polígono[lista60] e tecle enter, esta é a primeira engrenagem de 60 dentes. Não esconda este polígono, esconda apenas o rótulo.

r_{12}= l /(2 sen(15°)) e tecle enter, este é o raio interno da engrenagem com 12 dentes. Este número não aparece na Janela de Visualização, ele está na Janela de Álgebra. A expressão geral é:

$$r_n = \frac{l}{2\sin\frac{360^o}{2n}}$$

d_{60}=Segmento[A_{60},B_{60}] e tecle enter, este é o ponteiro dos segundos. Não esconda este segmento, aumente a espessura para 3 e esconda apenas o rótulo.

c_{1260}= Círculo[A_{60}, r_{12}] e tecle enter, este é o círculo interno da engrenagem de 12 dentes. Esconda este círculo.

B_{1260}=Interseção[d_{60},c_{1260}] e tecle enter, este é o ponto que vai gerar os pontos da engrenagem de 12 dentes. Esconda este ponto.

k_{12}=(sqrt(3) - cossec(15°) + cotg(15°)) l / 2 e tecle enter, este é o módulo do vetor u_{12}, é a menor distância entre o vértice do dente e a circunferência interna da engrenagem de 12 dentes. Este número não aparece na Janela de Visualização, ele está na Janela de Álgebra. A expressão geral é:

$$k_n = |\vec{u}_n| = \left(\sqrt{3} - \csc\frac{360^o}{2n} + \cot\frac{360^o}{2n}\right)\frac{l}{2}$$

u_{1260}= k_{12} VetorUnitário[Segmento[A_{60}, B_{1260}]] e tecle enter, este é o vetor para gerar os vértices da engrenagem de 12 dentes. Esconda este vetor. A expressão geral é:

$$\vec{u}_n = k_n \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

Δ_{12}= arctg(k_{12} sen(π / 48) / (2r_{12} cos(π / 48) + k_{12} cos(π / 48))) e tecle enter, este é o valor do ângulo de variação do ângulo de rotação, é o responsável pela espessura do dente. Este ângulo é um número, não aparece na Janela de Visualização, ele está na Janela de Álgebra. A expressão geral é:

$$\Delta_n = \tan^{-1}\left(\frac{k_n \sin\frac{\pi}{4n}}{2\, r_n \cos\frac{\pi}{4n} + k_n \cos\frac{\pi}{4n}}\right)$$

lista1260=Sequência[Girar[B_{1260} + (1 + (-1)^(ceil(m / 2))) u_{1260}/2, 7.5° m+ Δ_{12} (-1)^(floor((m + 2) / 2)), A_{60}], m, 1, 48] e tecle enter, esta é lista de pontos da roda dentada de 12 dentes presa a engrenagem de 60 dentes. Esconda esta lista. A expressão geral é:

$$L_3 = Sequência\left[Girar\left[B + \left(1 + (-1)^{Int\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil}\right)\frac{u_n}{2}, \frac{360^o m}{4n} + \Delta_n(-1)^{Int\left\lfloor\frac{m+2}{2}\right\rfloor}, A\right], m, 1, 4n\right]$$

pol1260=Polígono[lista1260] e tecle enter, esta é a roda de 12 dentes presa a roda de 60 dentes. Não esconda este polígono, esconda apenas o rótulo. Coloque na cor azul com transparência de 50%, ou outra cor qualquer, para diferenciar apenas, você pode colocar todos os elementos desta roda em azul, isto facilita encontrar elementos posteriormente.

4.2.3. Acrescentando uma Corda e um Peso

O que faz com que a engrenagem gire é a queda de um peso preso a uma corda enrolada na engrenagem. A corda será enrolada num círculo com raio maior que r_{12} e menor que r_{60} da seguinte forma:

No Campo de Entrada digite:

c'_c=Círculo[A_{60}, r_{60}/1.5] e tecle enter. A escolha de uma vez e meia foi puramente estética, tornando 1.5 a constante que relaciona os raios das circunferências. Esconda o objeto.

c_c= Círculo[A_{60}, 0.95 r_{60}/1.5] e tecle enter, é um círculo com raio 5% menor que o círculo anterior, simboliza parte da espessura da corda. Coloque na cor cinza escuro e não esconda este objeto, esconda apenas o Rótulo.

c'_{c'}=Círculo[A_{60}, 1.05 r_{60}/1.5] e tecle enter, é um círculo com raio 5% maior que o 1º círculo, simboliza a outra parte da espessura da corda. Coloque na cor cinza escuro e não esconda este objeto, esconda apenas o Rótulo.

G=Interseção[c'_c, d_{60}, 1] e tecle enter, simboliza um ponto de amarração da corda. Esconda o objeto.

G'=Reflexão[G, A_{60}] e tecle enter, simboliza o outro ponto de amarração da corda. Esconda o objeto.

c_d=Semicírculo[G', G] e tecle enter, simboliza a corda enrolada. Coloque na cor cinza escuro, tracejado e não esconda este objeto, esconda apenas o Rótulo.

- c'_d=Semicírculo[G, G'] e tecle enter, simboliza a outra parte da corda enrolada. Coloque na cor cinza escuro, tracejado e não esconda este objeto, esconda apenas o Rótulo.
- H= (x(A_{60}) + r_{60}/1.5, y(A_{60})) e tecle enter, é o ponto mais alto da parte vertical da corda. Esconda o objeto.
- H'= (x(A_{60}) + 0.95 r_{60}/1.5, y(A_{60})) e tecle enter, é o ponto mais alto da parte vertical da corda, extremidade a esquerda. Esconda o objeto.
- H''= (x(A_{60}) + 1.05 r_{60}/1.5, y(A_{60})) e tecle enter, é o ponto mais alto da parte vertical da corda, extremidade a direita. Esconda o objeto.
- I'= (x(B) + r_{60}/1.5, y(B)) e tecle enter, é o ponto mais baixo da parte vertical da corda. Esconda o objeto.
- j= Segmento[H, I'] e tecle enter, simboliza a trajetória vertical da corda. Esconda o objeto.
- F= Ponto[j] e tecle enter, simboliza a extremidade inferior da corda, é o ponto que estará junto ao peso, escolha a cor marrom. Não esconda este ponto, ele será usado na interação de levantar o peso. Esconda o Rótulo.
- DefinirCoordenadas[F,x(H),y(P')-10] e tecle enter, este comando é só para posicionar o ponto **F** no meio de sua trajetória.
- F'=(x(B) +0.95 r_{60}/1.5, y(F)) e tecle enter, simboliza a extremidade inferior da corda, é o ponto que estará junto ao peso, extremidade a esquerda. Esconda o objeto.
- F''= (x(B) + 1.05 r_{60}/1.5, y(F)) e tecle enter, simboliza a extremidade inferior da corda, é o ponto que estará junto ao peso, extremidade a direita. Esconda o objeto.
- h= Segmento[F, H] e tecle enter, simboliza a parte vertical da corda, coloque na cor cinza escuro e tracejado. Não esconda este Segmento. Esconda o Rótulo.
- h'= Segmento[H', F'] e tecle enter, simboliza a parte vertical da corda, extremidade a esquerda, coloque na cor cinza escuro. Não esconda este Segmento. Esconda o Rótulo.

- h''= Segmento[H'', F''] e tecle enter, simboliza a parte vertical da corda, extremidade a esquerda, coloque na cor cinza escuro. Não esconda este Segmento. Esconda o Rótulo.
- F'''= (x(F), y(F) – 5 l) e tecle enter, o ponto mais baixo do peso, está 5 unidades (5**l**) abaixo. Esconda o objeto.
- listaPeso={F, F + 0.25Vetor[F, F'''] - 0.5VetorPerpendicular[Segmento[F, F''']], F''', F + 0.25Vetor[F, F'''] + 0.5VetorPerpendicular[Segmento[F, F''']], F} e tecle enter, foram criados os vértices de um pentágono a partir de **F** e **F'''**. Esconda o objeto.
- polPeso= Polígono[listaPeso] e tecle enter, coloque na cor marrom e diminua a transparência. Não esconda este Polígono (Pentágono). Esconda o Rótulo.

4.2.4. Construindo o Estribo do Pêndulo

Este é o elemento que faz a comunicação entre o pêndulo e a engrenagem, será construído da mesma forma que os anteriores.
No Campo de Entrada digite:

- E=l VetorUnitário[Segmento[P,O]] e tecle enter, este ponto vai capturar o movimento do pêndulo e transmitir este movimento aos elementos do estribo. Esconda o ponto.
- W=O – 2.3 Vetor[O, E] + 6.5 VetorPerpendicular[Segmento[O, E]] e tecle enter, este ponto vai receber o movimento do pêndulo e entrar em contato com a roda dentada, do lado esquerdo, interferindo no movimento da engrenagem. Esconda o ponto.
- Z=O – 2.1Vetor[O, E] - 6VetorPerpendicular[Segmento[O, E]] e tecle enter, este ponto vai receber o movimento do pêndulo e entrar em contato com a roda dentada, do lado direito, interferindo no movimento da engrenagem. Esconda o ponto.
- listaEstriboDireito={O, E, O - 0.5Vetor[O, E] - 7.5VetorPerpendicular[Segmento[O, E]], Z, O - 0.7Vetor[O, E] - 6.5VetorPerpendicular[Segmento[O, E]], O + 0.5Vetor[O, E] - 0.5VetorPerpendicular[Segmento[O, E]], O} e tecle enter, estes pontos são os vértices do estribo direito. Esconda a Lista.

listaEstriboEsquerdo ={O, E, O - 0.5Vetor[O, E] + 8VetorPerpendicular[Segmento[O, E]], W, O - 0.7Vetor[O, E] + 7VetorPerpendicular[Segmento[O, E]], O + 0.5Vetor[O, E] + 0.5VetorPerpendicular[Segmento[O, E]], O} e tecle enter, estes pontos são os vértices do estribo direito. Esconda a Lista.

polEstDir=Polígono[listaEstriboDireito] e tecle enter, escolha cor marrom e diminua a transparência. Não esconda este Polígono. Esconda o Rótulo.

polEstEsq=Polígono[listaEstriboEsquerdo] e tecle enter, escolha cor marrom e diminua a transparência. Não esconda este Polígono. Esconda o Rótulo.

A posição de **Z** e **W** é construida geometricamente e dinamicamente de forma que nunca os dois pontos toquem simultaneamente a roda dentada. E ao mesmo tempo não existe uma posição estacionária do pêndulo que permita a roda dentada girar sem tocar em um e somente um dos dois estribos.

4.2.5. Animando a Primeira Roda Dentada

A lógica de funcionamento deve obedecer os seguintes critérios:

- A roda dentada estará em movimento se e somente se o peso estiver em movimento.
- A roda dentada para, se o estribo direito ou o estribo esquerdo tocar na roda.
- O peso para, quando atinge o chão.
- Se o estribo da base tocar a roda ou o peso, eles param.
- Se a roda dentada parar, o movimento do pêndulo deve ser com amplitudes cada vez menores, simulando a perda de energia, até parar. Se a roda dentada estiver em movimento então o pêndulo estará com um movimento que mantém sempre a mesma amplitude, simulando a conservação de energia.
- A velocidade angular da roda dentada, quando está em movimento, é igual ao valor do ângulo de um dente dividido pelo período do pêndulo, independentemente do valor numérico, colocado para a velocidade, em Propriedades dos Objetos.

Para obedecer a todos os critérios, serão criadas expressões para $\mathbf{v_\alpha}$, $\mathbf{v_{60}}$ e $\mathbf{v_q}$ com o comando de condicional do tipo:

Se[<Condição>, <Então>, <Senão>]

A expressão para a velocidade do controle deslizante **α** ($\mathbf{v_\alpha}$) já foi criada anteiormente na seção Parar o Pêndulo e aplicada ao objeto na Figura 47 e está em:

v_α=Se[(q > 0) , 0.3, 0]. Isto significa que $\mathbf{v_\alpha}$ = 0.3 se o arco da trajetória do pêndulo existir (**q**>0) e $\mathbf{v_\alpha}$ = 0 se o arco da trajetória do pêndulo não existir (**q**=0).

A nova proposta, para atender aos novos critérios, para inserir no Campo de Entrada é:

v_α= Se[(q > 0) ∧ (PertenceARegião[A, pol60] ∨ PertenceARegião[A, polPeso] ∨ (y(F) ≤ y(B) + 5)) ∨ (β < 3°) ∧ (β > 0°), 0.3, 0] e tecle enter. Fazendo isto, a expressão de $\mathbf{v_\alpha}$ anterior é substituída por esta.

Em seguida selecione o controle deslizante **α**, click no botão direito com o mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu. Na guia Controle Deslizante preencha o campo Velocidade: com v_α, em Repetir: escolha Decrescente e em seguida click em (×) no canto superior direito da janela.

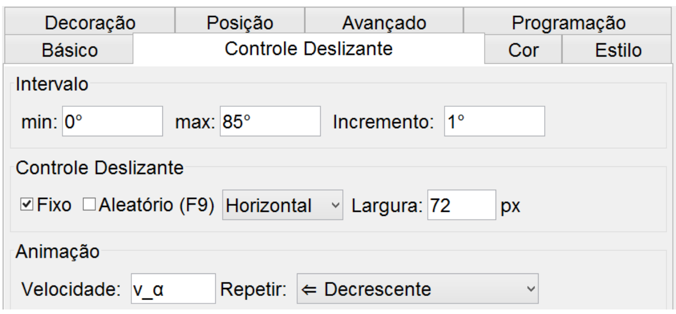


Figura 81 (Figura 47) – Propriedades de Controle Deslizante do ângulo **α**

O processo da Figura 81 (Figura 47) é o mesmo da Figura 47, ele foi repetido e deverá ser repetido sempre que a expressão da velocidade de animação for alterado.

A expressão PertenceARegião[A, pol60] e a expressão PertenceARegião[A, polPeso] fazem com que $\mathbf{v_\alpha}$ seja 0.3 quando o estribo da base tocar a roda dentada ou o peso.

A expressão (y(F) ≤ y(B) + 5)) faz com que $\mathbf{v_\alpha}$ seja 0.3 quando o peso tocar o chão.

A expressão (β < 3°) ∧ (β > 0°) faz com que $\mathbf{v_\alpha}$ seja 0.3 quando o ângulo de oscilação estiver entre 0° e 3°, isto se fez necessário porque dependendo dos valores dos outros parâmetros, o pêndulo com oscilação com ângulos muito pequenos, não permitem o movimento correto da roda dentada.

A expressão da velocidade de queda do peso ($\mathbf{v_q}$), atendendo aos critérios citados, para inserir no Campo de Entrada é:

- v_q= Se[PertenceARegião[A, pol60] ∨ PertenceARegião[A, polPeso] ∨ PertenceARegião[W, pol60] ∨ PertenceARegião[Z, pol60] ∨ (y(F) ≤ y(B) + 5), 0, 5 l k_v / j] e tecle enter.

A escolha de 5 $\mathbf{l}$ $\mathbf{k_v}$ /**j**, valor que se aproxima de 5 $\mathbf{l}$ $\mathbf{k_v}$ mm/s (visto na seção Animando o Pêndulo) onde **j** é o tamanho do segmento que contém o ponto **F** animado, foi aleatória, mas experimental, isto quer dizer que este valor não pode ser muito pequeno porque pode ocorrer mais de uma oscilação por dente da roda dentada, nem muito grande porque pode ocorrer de passar mais de um dente por oscilação. Mas entre o valor pequeno e o valor considerado grande para esta velocidade, existem vários valores que causam um dente por oscilação. Experimentei 10/j ficou grande, em seguida coloquei 5/**j** e deu certo, depois foi só acrescentar as duas constantes multiplicativas ($\mathbf{l}$ e $\mathbf{k_v}$) que interferem no movimento. Fazer isto, equivale na prática, a experimentar pesos diferentes no cordão do relógio, que fazem trabalhar com um dente por oscilação, mostrando que mesmo com pesos diferentes a velocidade de queda será de $\frac{2\pi\, r_{60}}{60(1,5)}$ dividido pelo período do pêndulo que é de aproximadamente um segundo (t ≅ 1s). Onde $\frac{2\pi\, r_{60}}{60}$ é o tamanho do arco que corresponde a um dente e 1,5 é a relação entre o raio da roda dentada e o raio da circunferência que contém a corda.

A expressão da velocidade da roda dentada ($\mathbf{v_{60}}$), atendendo aos critérios citados anteriormente, para inserir no Campo de Entrada é:

- v_{60}=1.5 v_q e tecle enter. A utilização da constante (1,5) é a responsável pela sensação da corda se desenrolando conforme a engrenagem gira.

Para inserir as expressões de $\mathbf{v_{60}}$ e $\mathbf{v_q}$ nos respectivos objetos, siga os seguintes procedimentos:

Selecione o ponto $\mathbf{B_{60}}$, click no botão direito com o mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu. Na guia Álgebra preencha o campo Velocidade: com v_{60} e em Repetir: escolha Decrescente, na guia Básico, click em Animar e em seguida click em ( ) no canto superior direito da janela.

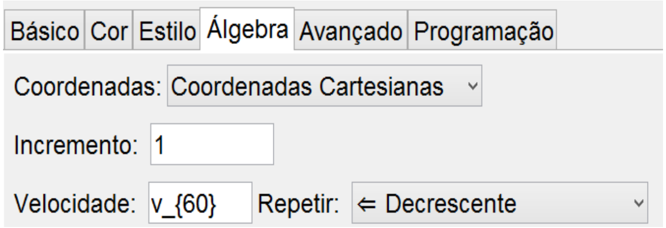


Figura 82 – Propriedades de Álgebra de $\mathbf{B_{60}}$

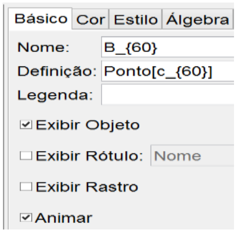


Figura 83 – Animar $\mathbf{B_{60}}$

Selecione o ponto **F**, click no botão direito com o mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu. Na guia Álgebra preencha o campo Velocidade: com v_q e em Repetir: escolha Crescente, na guia Básico, click em Animar e em seguida click em ( ) no canto superior direito da janela.

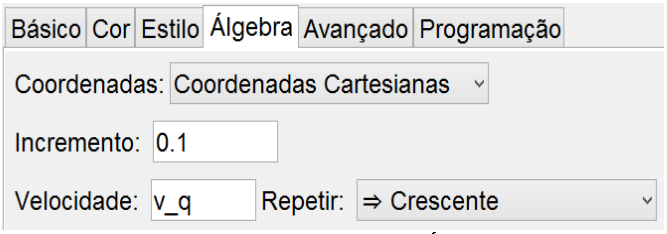


Figura 84 – Propriedades de Álgebra de **F**

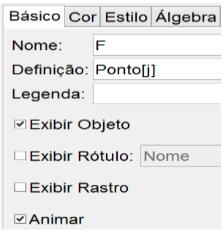


Figura 85 – Animar $\mathbf{B_{60}}$

A integração entre a engrenagem e o pêndulo está completa, cabe agora fazer alguns ajustes para que esta integração atenda aos interesses da contagem e do registro desta contagem de maneira não caótica.

Quando era só o pêndulo, uma oscilação de 80° não causava situações caóticas, mas o casamento da oscilação com o deslocamento de um dente da engrenagem, obriga a limitação de determinados parâmetros como o do ângulo α, amplitude máximo do pêndulo.

Para ajustar estes parâmetros, siga os seguintes procedimentos:

Selecione o controle deslizante **α**, click no botão direito com o mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu. Na guia Controle Deslizante preencha o campo Intervalo max: com 10° e em seguida click em ( ) no canto superior direito da janela.

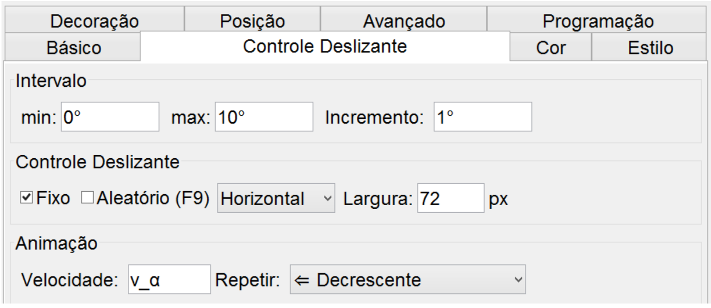


Figura 86 – Propriedades do ângulo **α** limitado a 10º

Selecione o controle deslizante **p**, click no botão direito com o mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu. Na guia Controle Deslizante preencha o campo Intervalo min: com 16 e em seguida click em ( ) no canto superior direito da janela.

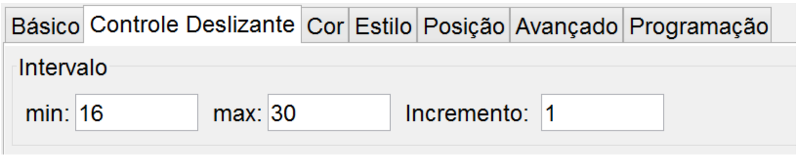


Figura 87 – Propriedades do braço do Pêndulo **p** limitado em 16

Com estes dois ajustes em **p** e em **α** pode ser evitado o comportamento caótico, estes dois valore, 16 para **p** e 10° para **α**, foram obtidos utilizando este próprio arquivo do GeoGebra no estágio de construção em que se encontra agora, e mexendo nos controles deslizantes, procurando os seus limites. Durante esta procura pude observar a necessidade de fazer correções nos raios dos quatro primeiros círculos da Janela de Álgebra (b, b', b'_1, b'_2). Localize o círculo b na Janela de Álgebra, com dois clicks sobre ele, surge a caixa de diálogo a seguir, digite **l** ao lado do número 70 (70 l) e click em OK. Repita o processo para o círculo b'.

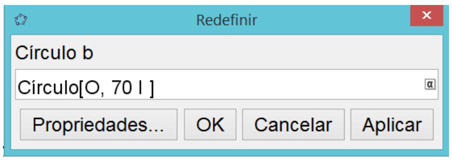


Figura 88 – A distância ao “chão” com **l**

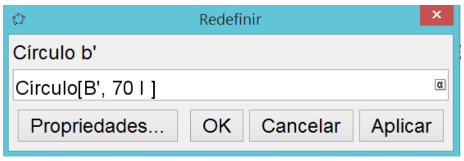


Figura 89 – A distância ao ponto **A** com **l**

Localize o círculo b'_1 na Janela de Álgebra, com dois clicks sobre ele, surge a caixa de diálogo a seguir, digite **l** ao lado do número 35 (35 l) e click em OK. Repita o processo para o círculo b'_2.

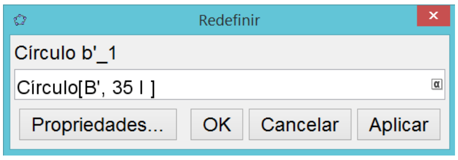


Figura 90 – A 1º haste da base com **l**

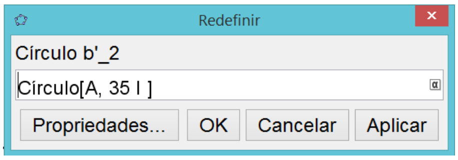


Figura 91 – A 2º haste da base com **l**

Estas quatro correções só entram em ação quando se mexe no controle deslizante l, criado para dar um tamanho ao dente da roda dentada e utilizado como parâmetro de escala. Quando se mexe nele, as construções feitas a partir dele, aumentam de tamanho. O que ocorreu foi que o “chão” (a reta **a**) e o “braço” (estribo da base) foram criados ao final da criação do pêndulo, antes da criação deste controle deslizante (**l**), acarretando que quando aumenta o tamanho da engrenagem, através deste controle deslizante, se faz necessário aumentar também a altura relativa ao chão, assim como o tamanho do braço, para que tanto o visual quanto a percepção de realidade não fique comprometida. Como este controle (**l**) não age no pêndulo, mas age no estribo e na engrenagem, ele promove uns visuais bastante interessantes sem comprometer em nada a funcionalidade e a animação.

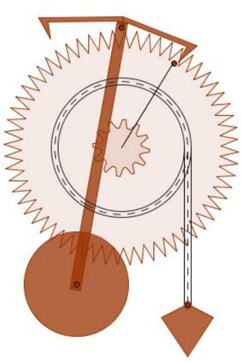


Figura 92 – Pêndulo e Roda com **l** =1

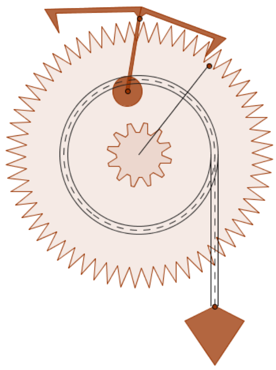


Figura 93 – Pêndulo e Roda com **l** = 5

Como pode ser visto nas figuras acima, mexendo no controle **l** fica claro que as duas construções estão interligadas e trabalham juntas, mas são independentes.

A imagem deste instrumento físico construido no GeoGebra está ao lado da foto de um objeto físico real para um confronto visual.

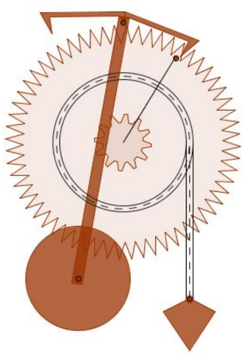


Figura 94 – Pêndulo e Roda no GeoGebra

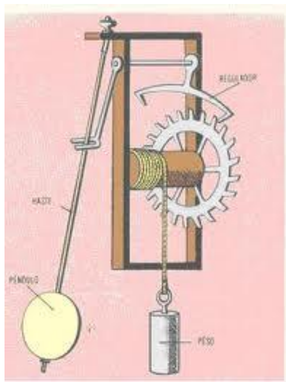


Figura 95 – Pêndulo e Roda na foto

O arquivo no atual estágio de construção tem o nome de TCC_Pendulo_e_Roda.ggb, pode ser visto no link http://www.geogebratube.org/student/m93038 e pode ser copiado com o nome de material-93038.ggb no link http://www.geogebratube.org/material/download/format/file/id/93038. Após aberto tem a aparência mostrada na figura a seguir.

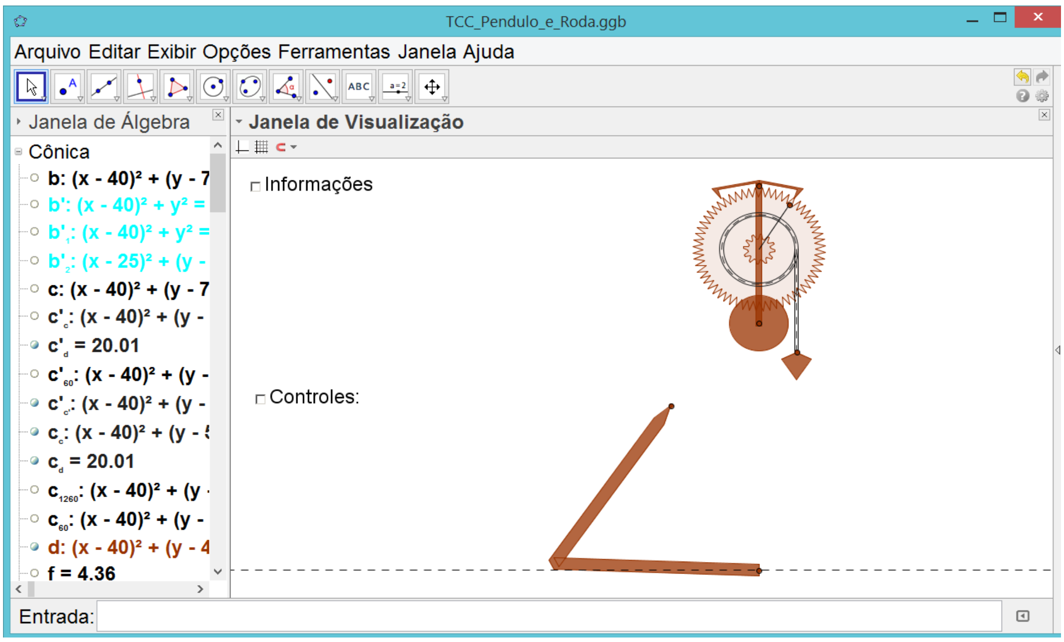


Figura 96 – TCC_Pendulo_e_Roda.ggb

4.2.6. Construindo as outras Engrenagens

Utilizando este conceito de construções independentes vai ser criada a segunda engrenagem.

Com o comando Ponto ( ) click em uma área livre da janela de visualização. Foi criado um ponto na tela. Renomeie este ponto para A_{48} (A_{48}). Seguindo o padrão L_3 da Figura 69 vai ser construida um roda com 48 dentes.

A partir do Campo de Entrada digite:

- r_{48}= l /(2 sen(45°/12)) e tecle enter, este é o raio interno da engrenagem com 48 dentes. Aparece apenas na Janela de Álgebra. A expressão geral é:

$$r_n = \frac{l}{2\sin\frac{360^o}{2n}}$$

- c_{48}= Círculo[A_{48}, r_{48}] e tecle enter, este é o círculo interno da engrenagem de 48 dentes. Esconda este círculo.
- B_{48}= Ponto[c_{48}] e tecle enter, este é o ponto que será animado na engrenagem de 48 dentes. Esconda este ponto.
- k_{48}=(sqrt(3) - cossec(45°/12) + cotg(45°/12)) l / 2 e tecle enter, este é o módulo do vetor u_{48}, é a menor distância entre o vértice do dente e a circunferência interna da engrenagem de 48 dentes. A expressão geral é:

$$k_n = |\vec{u}_n| = \left(\sqrt{3} - \csc\frac{360^o}{2n} + \cot\frac{360^o}{2n}\right)\frac{l}{2}$$

- u_{48}= k_{48} VetorUnitário[Segmento[A_{48}, B_{48}]] e tecle enter, este é o vetor utilizado na criação dos pontos gerados a partir de **B_{48}**. Serve para gerar os vértices da engrenagem de 48 dentes. Esconda este vetor. A expressão geral é:

$$\vec{u}_n = k_n \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

- Δ_{48}= arctg(k_{48} sen(π / 192) / (2r_{48} cos(π / 192) + k_{48} cos(π / 192))) e tecle enter, este é o valor do ângulo de variação do ângulo de rotação, é o responsável pela espessura do dente. Este ângulo é um número, não aparece na Janela de Visualização, ele está na Janela de Álgebra. A expressão geral é:

$$\Delta_n = \tan^{-1}\left(\frac{k_n \sin\frac{\pi}{4n}}{2\, r_n \cos\frac{\pi}{4n} + k_n \cos\frac{\pi}{4n}}\right)$$

- lista48=Sequência[Girar[B_{48} + (1 + (-1)^(ceil(m / 2))) u_{48}/2, 15° m/8 + Δ_{48} (-1)^(floor((m + 2) / 2)), A_{48}], m, 1, 192] e tecle enter, esta é lista de pontos da roda dentada de 48 dentes. Esconda esta lista. A expressão geral é:

$$L_3 = Sequência\left[Girar\left[B + \left(1 + (-1)^{Int\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil}\right)\frac{u_n}{2}\ , \frac{360^o m}{4n} + \Delta_n(-1)^{Int\left\lfloor\frac{m+2}{2}\right\rfloor}, A\right]\ , m\ , 1\ , 4n\right]$$

- pol48=Polígono[lista48] e tecle enter, esta é a roda dentada de 48 dentes. Não esconda este objeto, esconda apenas o rótulo. Coloque na cor azul, ou outra cor qualquer, para ficar na mesma cor da roda de 12 dentes que vai interagir com esta, você pode colocar todos os elementos desta roda em azul, isto facilita encontrar elementos posteriormente.
- d_{48}=Segmento[A_{48},B_{48}] e tecle enter, este é o raio do círculo c_{48}. Esconda este raio.
- c_{1248}= Círculo[A_{48}, r_{12}] e tecle enter, este é o círculo interno da engrenagem de 12 dentes. Esconda este círculo.
- B_{1248}=Interseção[d_{48},c_{1248}] e tecle enter, este é o ponto que vai gerar os pontos da engrenagem de 12 dentes. Esconda este ponto.
- u_{1248}= k_{12} VetorUnitário[Segmento[A_{48}, B_{1248}]] e tecle enter, este é o vetor para gerar os vértices da engrenagem de 12 dentes. Esconda este vetor. A expressão geral é:

$$\vec{u}_n = k_n \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

- lista1248=Sequência[Girar[B_{1248} + (1 + (-1)^(ceil(m / 2))) u_{1248}/2, 7.5° m+ Δ_{12} (-1)^(floor((m + 2) / 2)), A_{48}], m, 1, 48] e tecle enter, esta é lista de pontos da roda dentada de 12 dentes presa a engrenagem de 48 dentes. Esconda esta lista. A expressão geral é:

$$L_3 = Sequência\left[Girar\left[B + \left(1 + (-1)^{Int\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil}\right)\frac{u_n}{2}\ , \frac{360^o m}{4n} + \Delta_n(-1)^{Int\left\lfloor\frac{m+2}{2}\right\rfloor}, A\right]\ , m\ , 1\ , 4n\right]$$

- pol1248=Polígono[lista1248] e tecle enter, esta é a roda de 12 dentes presa a roda de 60 dentes. Não esconda este polígono, esconda apenas o rótulo. Coloque na cor verde escuro, ou outra cor qualquer, para diferenciar apenas, você pode colocar todos os elementos desta roda em verde, isto facilita encontrar elementos posteriormente.

A engrenagem de 48 dentes está pronta, mas está livre, é preciso engatar na engrenagem de 12 dentes com centro em $\mathbf{A_{60}}$. A distância entre $\mathbf{A_{60}}$ e $\mathbf{A_{48}}$ tem que ser maior que ($\mathbf{r_{12}}$ + $\mathbf{r_{48}}$ + $\mathbf{l}$) e menor que ($\mathbf{r_{12}}$ + $\mathbf{r_{48}}$ + 1.5 $\mathbf{l}$). Para colocar esta engrenagem a distância de ($\mathbf{r_{12}}$ + $\mathbf{r_{48}}$ + 1.1 $\mathbf{l}$), primeiro digite no Campo de entrada:

c'_{48}=Círculo[A_{60}, 1.1 l + r_{12} + r_{48}] e tecle enter, esta é a circunferência que deverá conter o centro da engrenagem de 48 dentes. Esconda esta circunferência.

E finalize fazendo com que o centro da engrenagem de 48 dentes ($\mathbf{A_{48}}$) seja um ponto desta circunferência ($\mathbf{c'_{48}}$), vai ser usado o comando Vincular / Desvincular Ponto ( ), click no comado, em seguida, na janela de Álgebra, click em $\mathbf{c'_{48}}$ e click em $\mathbf{A_{48}}$.

Ficou estipulado que a distância entre as engrenagens **n** e **m** é de ($\mathbf{r_n}$ + $\mathbf{r_m}$ + 1.1 $\mathbf{l}$), este valor poderá ser modificado caso não atenda ao objetivo.

A próxima roda de 36 dentes vai ficar a uma distância de ($\mathbf{r_{12}}$ + $\mathbf{r_{36}}$ + 1.1 $\mathbf{l}$) do ponto $\mathbf{A_{48}}$ ao mesmo tempo a uma distância de ($\mathbf{r_{12}}$ + $\mathbf{r_{60}}$ + 1.1 $\mathbf{l}$) do ponto $\mathbf{A_{48}}$. Para encontrar este ponto ($\mathbf{A_{36}}$) será calculado o valor de $\mathbf{r_{36}}$ e serão construídas duas circunferências.

Digite no Campo de Entrada:

r_{36}= l /(2 sen(5°)) e tecle enter, este é o raio interno da engrenagem com 36 dentes. Aparece apenas na Janela de Álgebra. A expressão geral é:

$$r_n = \frac{l}{2\sin\frac{360^o}{2n}}$$

c'_{36}=Círculo[A_{48}, 1.1 l + r_{12} + r_{36}] e tecle enter, esta é a circunferência que deverá conter o centro da engrenagem de 36 dentes. Esconda esta circunferência.

c''_{36}=Círculo[A_{60}, 1.1 l + r_{12} + r_{60}] e tecle enter, esta é a circunferência que também deverá conter o centro da engrenagem de 36 dentes. Esconda esta circunferência.

A_{36}=Interseção[c'_{36}, c''_{36},1] e tecle enter, este é o centro da engrenagem de 36 dentes. Não esconda este ponto, é preciso vê-lo para saber se é o ponto desejado.

A interseção entre estas duas circunferências são dois pontos, apenas um destes dois pontos atende ao interesse do projeto, foi colocado o digito 1 ao fim do comando (Interseção[c'_{36}, c''_{36},1]), caso este ponto não atenda ao interesse do projeto, será dado dois clicks no ponto **A_{36}** e na caixa de diálogo o digito 1 do comando será modificado para 2 (Interseção[c'_{36}, c''_{36},2]).

Como foi visto antes, com o ponto **A_{36}** será construida toda a engrenagem. No Campo de Entrada digite:

- c_{36}= Círculo[A_{36}, r_{36}] e tecle enter, este é o círculo interno da engrenagem de 36 dentes. Esconda este círculo.
- B_{36}= Ponto[c_{36}] e tecle enter, este é o ponto que será animado na engrenagem de 48 dentes. Esconda este ponto.
- k_{36}=(sqrt(3) - cossec(5°) + cotg(5°)) l / 2 e tecle enter, este é o módulo do vetor u_{36}, é a menor distância entre o vértice do dente e a circunferência interna da engrenagem de 36 dentes. A expressão geral é:

$$k_n = |\vec{u}_n| = \left(\sqrt{3} - \csc\frac{360^o}{2n} + \cot\frac{360^o}{2n}\right)\frac{l}{2}$$

- u_{36}= k_{36} VetorUnitário[Segmento[A_{36}, B_{36}]] e tecle enter, este é o vetor utilizado na criação dos pontos gerados a partir de **B_{36}**. Serve para gerar os vértices da engrenagem de 36 dentes. Esconda este vetor. A expressão geral é:

$$\vec{u}_n = k_n \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

- Δ_{36}= arctg(k_{36} sen(π / 144) / (2r_{36} cos(π / 144) + k_{36} cos(π / 144))) e tecle enter, este é o valor do ângulo de variação do ângulo de rotação, é o responsável pela espessura do dente. Este ângulo é um número, não aparece na Janela de Visualização, ele está na Janela de Álgebra. A expressão geral é:

$$\Delta_n = \tan^{-1}\left(\frac{k_n \sin\frac{\pi}{4n}}{2\, r_n \cos\frac{\pi}{4n} + k_n \cos\frac{\pi}{4n}}\right)$$

- lista36=Sequência[Girar[B_{36} + (1 + (-1)^(ceil(m / 2))) u_{36}/2, 2.5° m + Δ_{36} (-1)^(floor((m + 2) / 2)), A_{36}], m, 1, 144] e tecle enter, esta é lista de pontos da roda dentada de 36 dentes. Esconda esta lista. A expressão geral é:

$$L_3 = Sequência\left[Girar\left[B + \left(1 + (-1)^{Int\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil}\right)\frac{u_n}{2}\,, \frac{360^o m}{4n} + \Delta_n(-1)^{Int\left\lfloor\frac{m+2}{2}\right\rfloor}, A\right]\,, m\,, 1\,, 4n\right]$$

- pol36=Polígono[lista36] e tecle enter, esta é a roda dentada de 36 dentes. Não esconda este objeto, esconda apenas o rótulo. Coloque na cor verde escuro, ou outra cor qualquer, para ficar na mesma cor da roda de 12 dentes que vai interagir com esta, você pode colocar todos os elementos desta roda em verde escuro, isto facilita encontrar elementos posteriormente.
- d_{36}=Segmento[A_{36},B_{36}] e tecle enter, este é o raio do círculo c_{36}. Esconda este raio.
- c_{1236}= Círculo[A_{36}, r_{12}] e tecle enter, este é o círculo interno da engrenagem de 12 dentes. Esconda este círculo.
- B_{1236}=Interseção[d_{36},c_{1236}] e tecle enter, este é o ponto que vai gerar os pontos da engrenagem de 12 dentes. Esconda este ponto.
- u_{1236}= k_{12} VetorUnitário[Segmento[A_{36}, B_{1236}]] e tecle enter, este é o vetor para gerar os vértices da engrenagem de 12 dentes. Esconda este vetor. A expressão geral é:

$$\vec{u}_n = k_n \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

- lista1236=Sequência[Girar[B_{1236} + (1 + (-1)^(ceil(m / 2))) u_{1236}/2, 7.5° m+ Δ_{12} (-1)^(floor((m + 2) / 2)), A_{36}], m, 1, 48] e tecle enter, esta é lista de pontos da roda dentada de 12 dentes presa a engrenagem de 48 dentes. Esconda esta lista. A expressão geral é:

$$L_3 = Sequência\left[Girar\left[B + \left(1 + (-1)^{Int\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil}\right)\frac{u_n}{2}\,, \frac{360^o m}{4n} + \Delta_n(-1)^{Int\left\lfloor\frac{m+2}{2}\right\rfloor}, A\right]\,, m\,, 1\,, 4n\right]$$

- pol1236=Polígono[lista1236] e tecle enter, esta é a roda de 12 dentes presa a roda de 36 dentes. Não esconda este polígono, esconda apenas o rótulo. Coloque na cor vermelha com transparência de 50 %, ou outra cor qualquer, para diferenciar apenas, você pode colocar todos os elementos desta roda em vermelho, isto facilita encontrar elementos posteriormente.

Agora só falta a última roda dentada que terá 60 dentes e o centro será o ponto **A_{60}**, centro da primeira roda dentada.

No Campo de entrada digite:

- B'_{60}= Ponto[c_{60}] e tecle enter, este é o ponto que será animado na 2ª engrenagem de 60 dentes. Esconda este ponto.

- u_{60}= k_{60} VetorUnitário[Segmento[A_{60}, B'_{60}]] e tecle enter, este é o vetor utilizado na criação dos pontos gerados a partir de **B'_{60}**. Serve para gerar os vértices da 2ª engrenagem de 60 dentes. Esconda este vetor. A expressão geral é:

$$\vec{u}_n = k_n \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

- Δ_{60}= arctg(k_{60} sen(π / 240) / (2r_{60} cos(π / 240) + k_{60} cos(π / 240))) e tecle enter, este é o valor do ângulo de variação do ângulo de rotação, é o responsável pela espessura do dente. Este ângulo é um número, não aparece na Janela de Visualização, ele está na Janela de Álgebra. A expressão geral é:

$$\Delta_n = \tan^{-1}\left(\frac{k_n \sin\frac{\pi}{4n}}{2\, r_n \cos\frac{\pi}{4n} + k_n \cos\frac{\pi}{4n}}\right)$$

- lista602=Sequência[Girar[B'_{60} + (1 + (-1)^(ceil(m / 2))) u_{60}/2, 1.5° m + Δ_{60} (-1)^(floor((m + 2) / 2)), A_{60}], m, 1, 240] e tecle enter, esta é lista de pontos da 2ª roda dentada de 60 dentes. Esconda esta lista. A expressão geral é:

$$L_3 = Sequência\left[Girar\left[B + \left(1 + (-1)^{Int\left[\frac{m}{2}\right]}\right)\frac{u_n}{2}, \frac{360^o m}{4n} + \Delta_n (-1)^{Int\left[\frac{m+2}{2}\right]}, A\right], m, 1, 4n\right]$$

- pol602=Polígono[lista602] e tecle enter, esta é a 2ª roda dentada de 60 dentes. Não esconda este objeto, esconda apenas o rótulo. Coloque na cor vermelho, ou outra cor qualquer, para ficar na mesma cor da roda de 12 dentes que vai interagir com esta, você pode colocar todos os elementos desta roda em vermelho, isto facilita encontrar elementos posteriormente.

- B_m= CoordenadasDinâmicas[B'_{60}, x(A_{60})/2+x(B'_{60})/2, y(A_{60})/2+y(B'_{60})/2] e tecle enter, este ponto é a extremidade do ponteiro dos minutos, é o ponto médio entre A_{60} e B'_{60}, quando movimentado, gira a engrenagem. Não esconda este ponto, esconda apenas o rótulo.

- d_{602}=Segmento[A_{60},B_m] e tecle enter, este é o ponteiro dos minutos. Não esconda este segmento, aumente a espessura para 3 e esconda apenas o rótulo.

4.2.7. Animando as engrenagens

Animar as engrenagens significa atribuir valores as velocidades dos pontos B_{48}, B_{36} e B'_{60}. Mas antes disto serão estabelecidos os critérios que vão determinar quando a engrenagem deve parar, ou melhor, quando deverá estar em movimento:

- A roda dentada só estará em movimento se a roda dentada responsável pela transmissão do movimento estiver em movimento, por exemplo, a segunda roda só estará em movimento se a primeira roda estiver em movimento, a terceira roda só estará em movimento se a segunda roda estiver em movimento, ...
- A roda dentada só estará em movimento se não houver superposição dos dentes com a roda dentada responsável pela transmissão do movimento, por exemplo, a segunda roda só estará em movimento se não houver superposição dos dentes com a primeira roda, a terceira roda só estará em movimento se não houver superposição dos dentes com a segunda roda, ...

Observe que, adotando estes critérios, a velocidade da engrenagem dependente estará em função do encaixe dos dentes, se os dentes não estiverem bem encaixados, a roda para. Desta forma o número (o valor numérico) que será atribuído a velocidade do ponto responsável pelo movimento da roda, não precisa ser um valor preciso, o valor numérico deverá ser um número acima de um valor que será encontrado aplicando a relação entre os dentes da engrenagem. Caso este número seja muito alto, a superposição dos dentes interrompe o movimento apenas da roda dependente, até que a superposição se desfaça e reestabeleça o movimento.

Na 1ª engrenagem já foi anteriormente estabelecida a velocidade v_{60} (v_{60}). A 2ª deverá ter um valor maior que $\frac{12}{48}v_{60} = \frac{v_{60}}{4}$, arbitrariamente escolho $v_{48} = \frac{v_{60}}{3}$. A 3ª deverá ter um valor maior que $\frac{12}{36}v_{48} = \frac{v_{48}}{3}$, arbitrariamente escolho $v_{36} = \frac{v_{48}}{2}$. A 4ª deverá ter um valor maior que $\frac{12}{60}v_{36} = \frac{v_{36}}{5}$, arbitrariamente escolho $v_{602} = \frac{v_{36}}{4}$.

Estabelecido estes valores e estes critérios a animação das engrenagens será feita atraves do Campo de Entrada, digite os seguintes comandos:

- v_{48} = Se[EstáDefinido[InterseçãoDeRegiões[pol1260, pol48]], 0, v_{60} / 3] e tecle enter, este é o valor da velocidade v_{48} (roda dentada com 48 dentes). Esta velocidade é um número, não aparece na Janela de Visualização, ela está na Janela de Álgebra.
- v_{36} = Se[EstáDefinido[InterseçãoDeRegiões[pol1248, pol36]], 0, v_{48} / 2] e tecle enter, este é o valor da velocidade v_{36} (roda dentada com 36 dentes). Esta velocidade é um número, não aparece na Janela de Visualização, ela está na Janela de Álgebra.
- v_{602} = Se[EstáDefinido[InterseçãoDeRegiões[pol1236, pol602]], 0, v_{36} / 4] e tecle enter, este é o valor da velocidade v_{602}, velocidade da última engrenagem (2ª roda dentada com 60 dentes). Esta velocidade é um número, não aparece na Janela de Visualização, ela está na Janela de Álgebra.

Em seguida, localize **B_{48}** na janela de álgebra, click com o botão direito do mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu. Na guia Álgebra preencha o campo Velocidade: com v_{48} e em Repetir: escolha Crescente e na guia Básico, click em Animar e em seguida click em () no canto superior direito da janela.

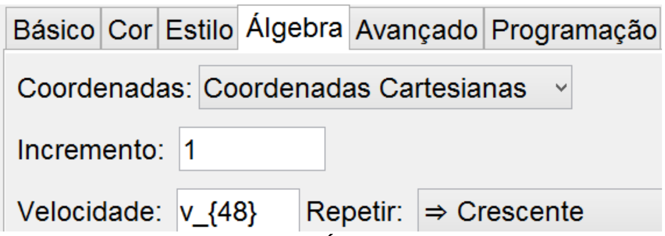


Figura 97 – Propriedades de Álgebra de **B_{48}**

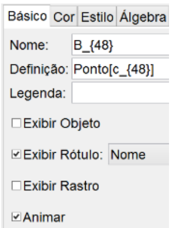


Figura 98 – Animar **B_{48}**

Repetindo para outra engrenagem, localize **B_{36}** na janela de álgebra, click com o botão direito do mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu. Na guia Álgebra preencha o campo Velocidade: com v_{36} e em Repetir: escolha Decrescente e na guia Básico, click em Animar e em seguida click em () no canto superior direito da janela.

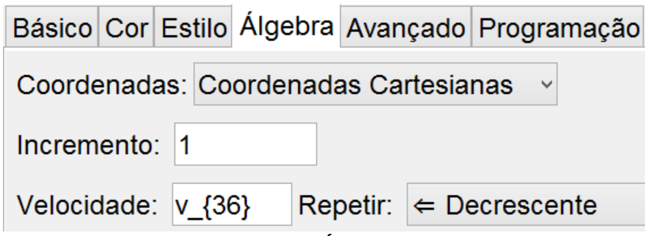


Figura 99 – Propriedades de Álgebra de **B**$_{36}$

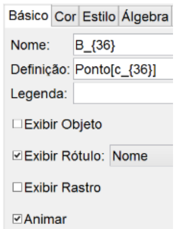


Figura 100 – Animar **B**$_{36}$

Repetindo para última engrenagem, localize B'$_{60}$ na janela de álgebra, click com o botão direito do mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu. Na guia Álgebra preencha o campo Velocidade: com v_{602} e em Repetir: escolha Crescente e na guia Básico, click em Animar e em seguida click em () no canto superior direito da janela.

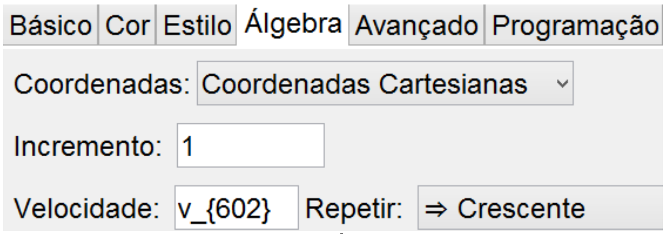


Figura 101 – Propriedades de Álgebra de **B'**$_{60}$

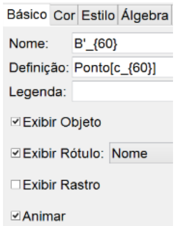


Figura 102 – Animar **B'**$_{60}$

Um comportamento IMPREVISTO foi observado quando as engrenagens se interagem na animação, a consequência disto é que visualmente ficou melhor ainda, "Deus colabora com o projeto".
O que ocorreu foi relacionado ao comando:
"V"=Se[EstáDefinido[InterseçãoDeRegiões["A","B"]],0,"valor"].
Este comando foi criado com o objetivo de parar (V=0) a engrenagem quando houvesse interseção entre os dentes da roda, mas o que ocorreu foi que ela só para, se houver uma única região de interseção, se houver duas regiões de interseção, a engrenagem se movimenta.

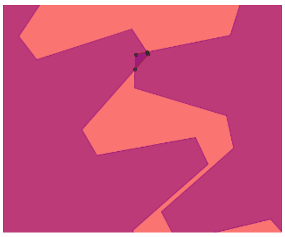


Figura 103 – Engrenagem parada.

Figura 104 – Engrenagem em movimento.

A consequência disto é que, visualmente, a engrenagem dependente parece estar sendo empurrada pela engrenagem responsável pela movimentação.

Para organizar um pouco deste amontoado de engrenagens será atribuída a propriedade de Camada as rodas dentadas, este comando se encontra na guia Avançado.

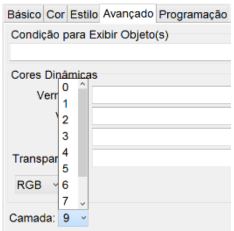


Figura 105 – Propriedade de Camada

Na tabela a seguir estão listadas algumas propriedades sugeridas para esta organização.

pol60	Marrom 10%.	Camada: 0
polEstDir	Marrom 75%.	Camada: 0
polEstEsq	Marrom 75%.	Camada: 0
polPeso	Marrom 75%.	Camada: 1
pol1260	Azul 50%	Camada: 2
pol48	Azul 50%	Camada: 2
pol1248	Verde Escuro 50%	Camada: 3
pol36	Verde Escuro 50%	Camada: 3
pol1236	Vermelho 50%	Camada: 4
pol602	Vermelho 50%	Camada: 4
polHastePendulo	Marrom 75%.	Camada: 5
d (círculo do pêndulo)	Marrom 75%.	Camada: 5

4.2.8. Detalhes Finais

O indicador de segundos e o indicador de minutos é construido a partir do Campo de Entrada, digite:

ε = Ângulo[B_{60}, A_{60}, O] e tecle enter, este é o valor do ângulo do ponteiro dos segundos em relação a vertical. Esconda este ângulo.

λ = Ângulo[B'_{60}, A_{60}, O] e tecle enter, este é o valor do ângulo do ponteiro dos minutos em relação a vertical. Esconda este ângulo.

textoS = Texto[ε/6, B_{60}, true] e tecle enter, este é o indicador de segundos do ponteiro, click com o botão direito do mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu. Na guia Texto escolha 0 Casas Decimais no campo Arredondamento (Figura 106). Não esconda este texto.

textoMin = Texto[λ/6, B_m, true] e tecle enter, este é o indicador de minutos do ponteiro, click com o botão direito do mouse sobre ele e escolha Propriedades no menu. Na guia Texto escolha 0 Casas Decimais no campo Arredondamento (Figura 106). Não esconda este texto.

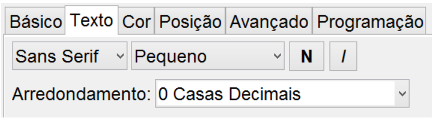


Figura 106 – Propriedade Arredondamento para textoMin e textoS

Novos elementos foram criados depois da criação do botão de Reset, para atualizar os atributos deste comando com os novos elementos, Click com o botão direito do mouse sobre o botão de Reset, escolha Propriedades, na guia de Programação escolha Ao Clicar e acrescente as linhas:

DefinirCoordenadas[B_{60},x(A_{60}),y(A_{60})+r_{60}]
DefinirCoordenadas[B'_{60},x(A_{60})+r_{60},y(A_{60})]
DefinirCoordenadas[F,x(H),y(P')+4]
IniciarAnimação[F,true]
IniciarAnimação[B_{60},true]
IniciarAnimação[B_{48},true]
IniciarAnimação[B_{36},true]
IniciarAnimação[B'_{60},true]
Ampliar[-50,-5,90,75]

e em seguida click em OK e em ( ) no canto superior direito da janela. Nas figuras a seguir são mostrados os comandos antes e depois de acrescentar as linhas novas.

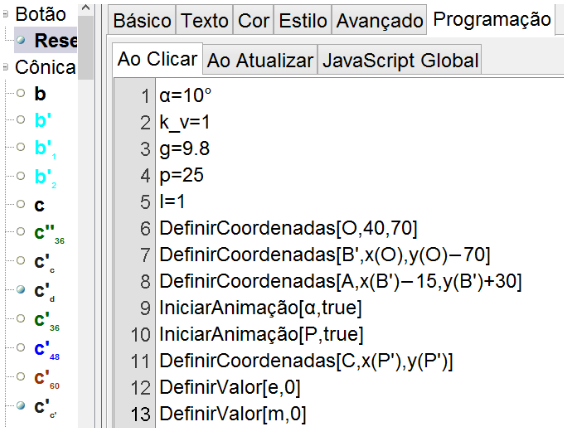


Figura 107 – Reset, Propriedade, antes

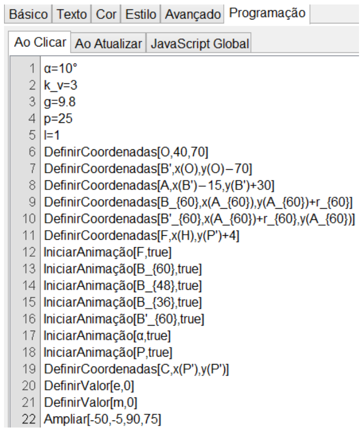


Figura 108 – Reset, Propriedade, depois

O valor de k_v foi alterado para 3 para tornar os movimentos mais próximos do real e a última linha foi acrescentada para restabelecer o enquadramento do projeto na Janela de Visualização.

O arquivo pronto tem o nome de TCC_Pendulo_e_Engrenagens.ggb, pode ser visto no link http://www.geogebratube.org/student/m93040 e pode ser copiado com o nome de material-93040.ggb no link http://www.geogebratube.org/material/download/format/file/id/93040. Após aberto tem a aparência mostrada na figura a seguir.

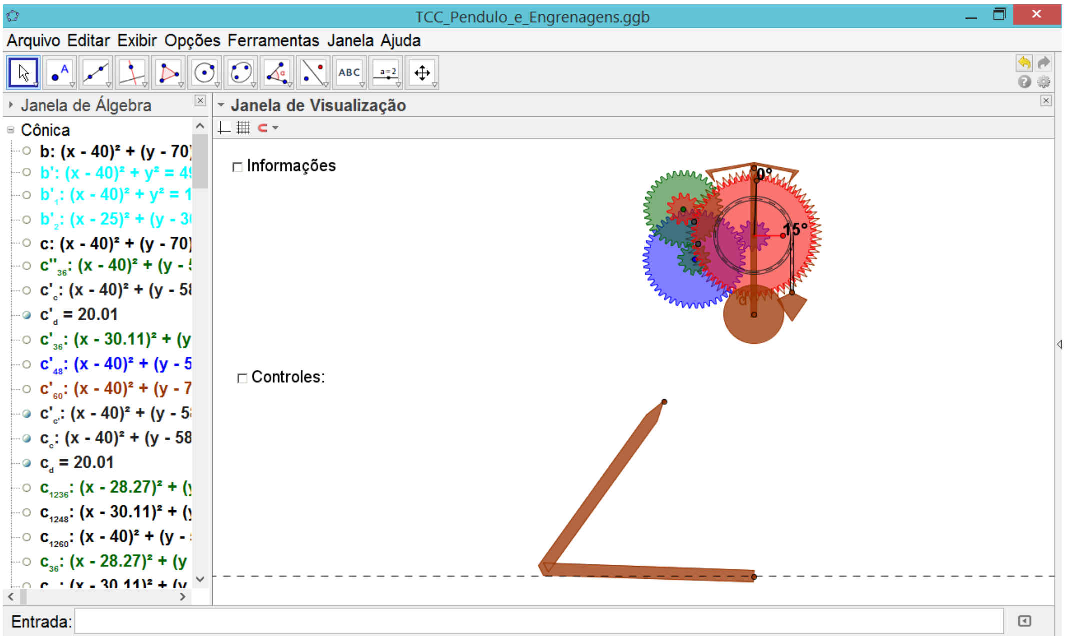


Figura 109 – TCC_Pendulo_e_Engrenagens.ggb

4.3. Comandos do GeoGebra

Durante a elaboração do projeto foi demandado muito tempo na construção da interatividade e da proximidade da realidade usando equações físicas. A procura dos comandos que podiam tornar isto possível, era muito fascinante e ao mesmo tempo curioso. A partir deles se pode criar (inventar) toda essa interação, a de que o pêndulo teria que balançar porque se tocou nele, a de que o pêndulo pararia porque se segurou nele ou parou devido ao atrito. Muita coisa foi descoberta sobre os comandos do GeoGebra. Muitos comandos foram explorados e utilizados. Um deles não apareceu no projeto final, o de som. Através de um determinado comando inserido no Campo de Entrada, poderia ter-se criado o tic com o estribo direito e tac com o esquerdo. Descobri que poderia fazer o tic tac do relógio, quando o pêndulo através do estribo tocava na roda dentada. Este comando não pode ser colocado agora, pois seria necessário mais tempo de estudo.

4.4. Animação

4.4.1. TCC_Pendulo.ggb

O arquivo de nome TCC_Pendulo.ggb, pode ser visto no link http://www.geogebratube.org/student/m93027 e pode ser copiado com o nome de material-93027.ggb no link http://www.geogebratube.org/material/download/format/file/id/93027. Após aberto tem a aparência mostrada na figura a seguir.

Figura 110 – O Pêndulo pronto

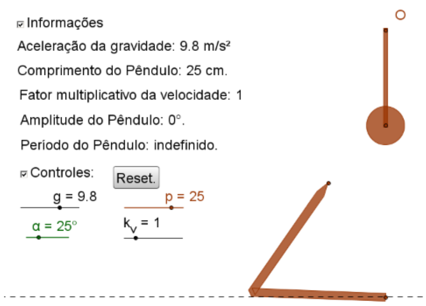


Figura 111 – TCC_Pendulo.ggb

4.4.2. TCC_Pendulo_livre.ggb

O arquivo de nome TCC_Pendulo_livre.ggb, pode ser visto no link http://www.geogebratube.org/student/m94137 e pode ser copiado com o nome de material-94137.ggb no link http://www.geogebratube.org/material/download/format/file/id/94137. Após aberto tem a aparência mostrada na figura a seguir.

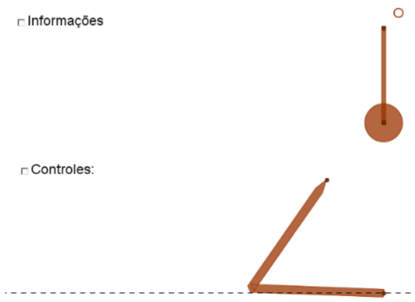


Figura 112 – O Pêndulo pronto

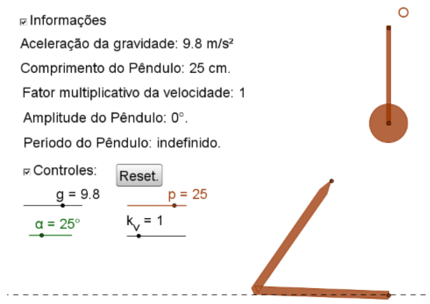


Figura 113 – TCC_Pendulo.ggb

4.4.3. TCC_Pendulo_e_Roda.ggb

O arquivo de nome TCC_Pendulo_e_Roda.ggb, pode ser visto no link http://www.geogebratube.org/student/m93038 e pode ser copiado com o nome de material-93038.ggb no link http://www.geogebratube.org/material/download/format/file/id/93038. Após aberto tem a aparência mostrada na figura a seguir.

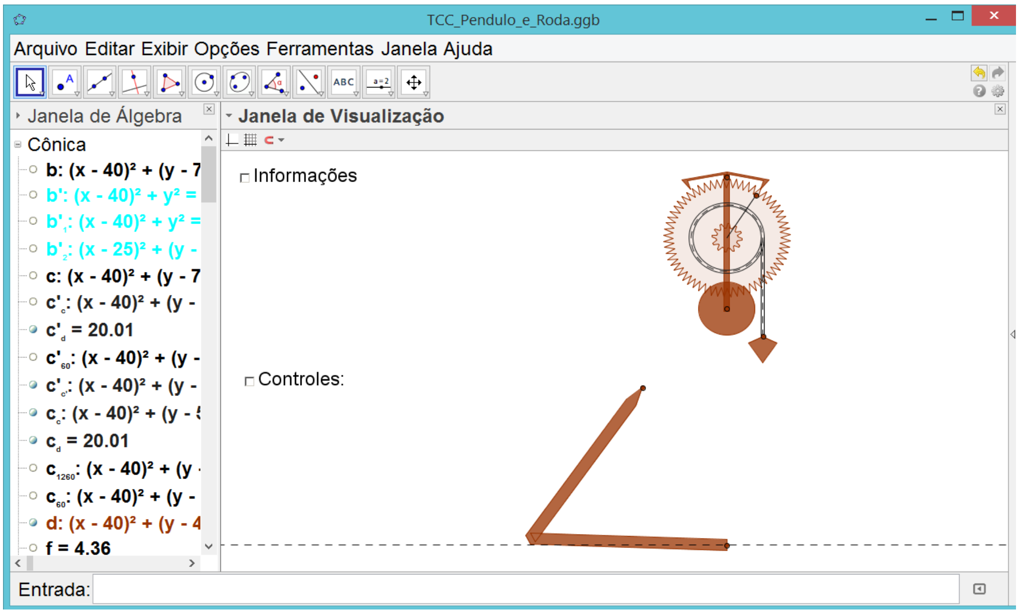


Figura 114 – TCC_Pendulo_e_Roda.ggb

4.4.4. TCC_Pendulo_e_Engrenagens.ggb

O arquivo de nome TCC_Pendulo_e_Engrenagens.ggb, pode ser visto no link http://www.geogebratube.org/student/m93040 e pode ser copiado com o nome de material-93040.ggb no link http://www.geogebratube.org/material/download/format/file/id/93040. Após aberto tem a aparência mostrada na figura a seguir.

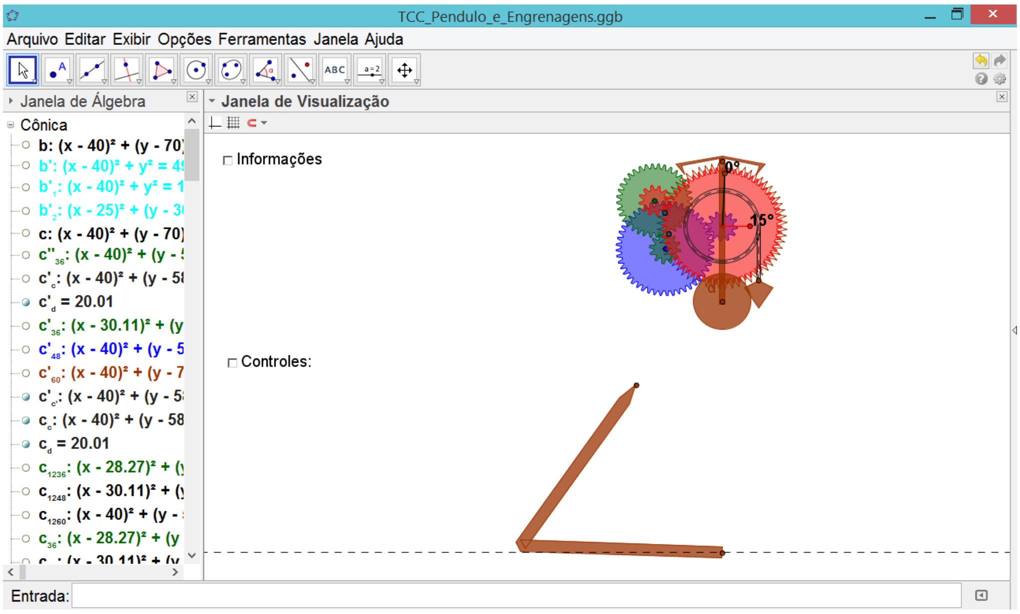


Figura 115 – TCC_Pendulo_e_Engrenagens.ggb

5. Justificativa Matemática

A história da tecnologia é a história milenar dos esforços do homem para dominar, em seu proveito, o ambiente material. Durante muitos milênios, o progresso tecnológico realizou-se à custa de experiências empíricas e de erros, podendo-se afirmar que somente a partir de fins do século XVIII a tecnologia tornou-se ciência aplicada. Recursos tecnológicos: produtos da tecnologia, qualquer objeto criado para facilitar o trabalho humano. Portanto, a roda, o machado, utensílios domésticos, televisão, telefone, trator, relógio, são recursos tecnológicos, assim como motores, engrenagens, turbinas, cabos e satélites.

Este trabalho não tem o objetivo de fornecer exatamente a sequência de atividades que o professor desenvolverá na aula. O objetivo é oferecer um modo de utilizar o GeoGebra para fazer análises do fenômeno. Permite uma atividade que coloca o aluno diante do computador como um manipulador de situações que imitam ou se aproximam de um sistema real ou imaginário. A construção do conhecimento acontece pelo fato de o aluno ter que buscar novas informações para complementar ou alterar o que ele já possui. Além disso, o aluno está criando suas próprias soluções, está pensando e aprendendo sobre como buscar e usar novas informações (aprendendo a aprender). Embora essa ideia seja mais adequada na formação de profissionais para a sociedade atual, ela tem se mostrado mais complicada na sua implantação. Primeiro, o ciclo descrever-executar-refletir-depurar-descrever não acontece simplesmente colocando o aluno frente ao computador. A interação aluno-computador precisa ser mediada por um profissional que tenha conhecimento do significado do processo de aprendizado através da construção do conhecimento, que entenda profundamente sobre o conteúdo que está sendo trabalhado pelo aluno e que compreenda os potenciais do computador. Esses conhecimentos precisam ser utilizados pelo professor para interpretar as ideias do aluno e para intervir apropriadamente na situação de modo a contribuir no processo de construção de conhecimento por parte do aluno. Além disso, essa abordagem exige mudanças profundas do sistema educacional, como a alteração do papel atribuído ao erro (não mais para ser punido, mas para ser depurado), a não segregação das disciplinas, a promoção da autonomia do professor e dos alunos e a flexibilização de um sistema rígido, centralizado e controlador. Enfim, transformar a escola que nós conhecemos.

O que se pretende é chamar a atenção para as potencialidades educativas do meio informático.

Construir objetos virtuais, ou seja, construir imagens, que existem potencialmente na tela do computador; modelar fenômenos, planejando e realizando experiências físicas, por meio da simulação de situações, que se modificam em função de diferentes variáveis; realizar cálculos complexos com rapidez e eficiência. É um instrumento de mediação na medida em que possibilita o estabelecimento de novas relações para a construção do conhecimento e novas formas de atividade mental, o aluno pode refletir sobre o resultado de suas ações e aprender criando novas soluções.

6. Estratégia e aplicabilidade em sala de aula

6.1. Utilização em Sala de Aula

O trabalho foi todo criado visando a utilização em sala de aula. Com isso, ele foi construído no GeoGebra em 3 etapas. Em outras palavras, 3 arquivos foram gerados. Um só com o pêndulo, outro com o pêndulo e uma roda dentada e o terceiro e final, completando tudo, pêndulo com as engrenagens. Os objetivos são dois. O primeiro, utilizar o arquivo no ato da construção dos instrumentos, com todos os comandos, com toda a Matemática envolvida neles, os comandos de geometria analítica, soma de vetores... O segundo, a utilização pura e simplesmente da animação como instrumento didático. Tanto se pode usar os arquivos do GeoGebra, mostrando as equações que estão por baixo do movimento, as equações físicas de conservação de energia, as equações da geometria analítica que fazem girar aqueles pontos que geram aquela imagem, como também, para uma animação, um objeto de estudo, como o estudo do pêndulo em aula de física, em que a interação com animação pode ajudar a entender, do que depende o período do pêndulo, do que depende essa ou aquela movimentação, como calcular período e a frequência, e variar os parâmetros que venham a altera esse período, assim como utilizar o pêndulo com as suas engrenagens, mostrando que a roda dentada, nada mais é que um contador. Um contador que conta a quantidade de oscilações do pêndulo. E esse contador passa por mais engrenagens fazendo uma espécie de base numérica e que ao fim registra quantas oscilações o pêndulo teve, passando a ideia de como a Matemática funciona.

6.2. Utilização Nas Escolas

Vivemos um momento em que as escolas tentam de todas as formas agregar os avanços tecnológicos à educação utilizando esses recursos tanto em sala de aula como fora dela, como até mesmo para controle, controle do trabalho e execução do trabalho. O GeoGebra, é um recurso pedagógico utilizado em sala de aula quando nós podemos levar nossas turmas para salas de informática. A tendência dos educadores é tentar transformar a sala de aula em uma sala totalmente informatizada. Atualmente trabalho em uma escola onde não existe mais quadro de giz, nem quadro de pilot. Os quadros são e-bord, todos os quadros são telas interativas ligadas a seu respectivo computador. Posso dizer que são experiências novas e que estão sendo bem recebidas pelos alunos, de uma maneira geral e também pelos seus pais. Mais do que uma novidade é uma tendência que poderá ou não vingar. Alguns recursos serão necessários e o GeoGebra é um facilitador do ensino da Matemática, pedagogicamente falando. Ele agrega os conhecimentos de Matemática de maneira visual e dinâmica como os recursos de informática exigem. Nesse momento algumas poucas escolas estão experimentando o GeoGebra e utilizando-o como facilitador.

6.3. Exemplo de Utilização

Dentre as vantagens associadas ao relógio de pêndulo destaca-se a existência de muitos instrumentos que poderiam sair derivados deste. Os conhecimentos tanto na construção, como em seus detalhes, que podem ser feitos de várias maneiras, e fazendo uso de diversas equações matemáticas, como também os gerados pela utilização deste projeto como objeto de animação, simulação da realidade. De todos esses conhecimentos, o que considero o mais forte, o mais interessante é o princípio da contagem, já que o relógio tem como objetivo a contagem do tempo. Sabemos que o sistema de contagem utilizado por nós é o sistema decimal. Nós temos 10 dedos na mão. O computador com sistema de contagem binário como se ele só interpretasse o ligado ou o desligado, o aceso ou o apagado. Já o relógio tem um sistema de contagem cuja base é 60. Isto significa que a cada 60 balançadas do pêndulo, aquela roda completa um ciclo e essa roda ligada as outras engrenagens fazem com que cada 60 voltas daquela roda inicial, faça a outra engrenagem mais na frente dar uma volta. Isso faz um princípio de contagem de base 60. Talvez nunca tivesse visto isso de uma maneira assim tão interessante como agora, depois que construí esse instrumento. Sessenta na Matemática Discreta, é múltiplo de 2, 3, 4, 5, 6, 10, ... O que o torna um facilitador para a construção da relação entre as engrenagens. O relógio tem uma “mão” (roda) com 60 “dedos” (dentes).

Substituindo o balanço do pêndulo pelo balanço de uma boia no mar, estas engrenagens ficariam contando o número de ondas que batem na praia num determinado período de tempo. No caso do relógio foram 60 dentes, mas poderiam ser utilizadas outras bases, mas estarei sempre limitado a quantidade de dentes que se pode colocar numa roda. É fascinante estudar as bases numéricas para contagem com essas engrenagens. Uma sugestão para um trabalho futuro, seriam os relógios que registram quantidade de energia consumida em cada residência. Esses relógios possuem uma roda que gira e fazem girar engrenagens que giram determinados ponteiros. Saber como são aquelas engrenagens, quantos dentes tem cada roda dentada, qual o sistema de base numérica para contagem do número de voltas do relógio de luz, é no mínimo curioso. São inúmeros os conhecimentos que se podem tirar desses instrumentos, Pêndulo e a Roda Dentada.

7. Conclusão

Não acaba nunca. Pensando na história da Matemática... No início eram os Naturais, números para frente. Depois os Inteiros, para frente e para trás. Depois vieram os Reais, além de para frente e para trás, números para "dentro" (números entre dois números quaisquer). Aí chegamos aos complexos, para frente, para trás, para dentro, para cima, para baixo. Agora com o GeoGebra e com a Geometria Analítica munida dos vetores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ e $\vec{k}$, números para todos os lados, nas três dimensões, não tem como deixar de lado as simulações da realidade. Com estes conhecimentos é possível construir instrumentos físicos no GeoGebra.

Como dito no passado, "a Matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o Universo". A Geometria junto com a Física vem desenhar e mostrar este Universo, todo feito em Matemática. É como se a Geometria e a Física fossem línguas diferentes formando palavras com o mesmo alfabeto. A Geometria com palavras que descrevem a aparência e a Física com palavras que descrevem o comportamento. E o GeoGebra mostra tudo o que foi escrito (na Janela de Álgebra) e ainda é capaz de ler, exibindo esta leitura na Janela de Visualização. É como desenhar e fazer animações usando equações matemáticas e com o apoio da Física, mostrar a realidade, toda feita em equações, toda feita com o alfabeto Matemática.

Colocar estas engrenagens, deste instrumento, no GeoGebra 3D que já tem alguns de seus mistérios desvendados no trabalho sobre Teodolito da Esther Zilkha[§§], e depois passar no escâner 3D, e montar peça por peça desse relógio para visualizá-lo, sólido e concreto como um objeto didático, seria gratificante.

Temos que registar o que foi feito para que outros possam desenvolver, ainda mais, para que o conhecimento não venha a se perder.

No Ensino Básico, é nele que temos que entregar o GeoGebra. Ele ainda não é tão difundido, mas não é difícil se apaixonar por ele depois de conhecê-lo. Com o GeoGebra e os conhecimentos de Geometria Analítica, podemos escrever as equações e funções Matemáticas que se aproximam

[§§] Trabalho sobre Teodolito da Esther Zilkha da turma de 2012 do ProfMat do IMPA.

do comportamento de um instrumento físico, em uma determinada realidade.

8. Referências Bibliográficas

_____, Parâmetros Curriculares Nacionais, Matemática – 5ª a 8ª Séries. Secretaria de Educação Fundamental, MEC/SEF, Brasília, 1998.

_____, Parâmetros Curriculares Nacionais, Matemática – Ensino Médio. Secretaria de Educação Fundamental, MEC/SEF, Brasília, 1999.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo e MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio – Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2006.

WAGNER, Eduardo. Construções Geométricas. 6ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2007.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: PCN ensino médio, ciências da natureza, da Matemática e suas tecnologias. Ministério da Educação. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria da Educação Média, 1999.

GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo Antônio Silvani e MATTOS, Francisco Roberto Pinto. Recursos Computacionais no Ensino da Matemática. Coleção ProfMat, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

GRAVINA, Maria Alice e SANTAROSA, Lucila Maria. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. IV Congresso RIBIE(Rede Ibero-americana de Informática Educativa), Brasília, 1998.

Valente, J.A. (1993b). Por Quê o Computador na Educação. Em J.A. Valente (Org.), Computadores e Conhecimento: repensando a educação (pp. 24-44), Campinas, SP: Gráfica da UNICAMP.

ARAUJO, Claudio Lopes de. GeoGebra, Um Bom Software Livre. Revista do Professor de Matemática, nº 67, p. 43-7, 3º quadrimestre de 2008.

A Relíquia – O Relógio através do tempo – http://www.areliquia.com.br/artigos%20anteriores/64Relogio.htm

Wikipédia, a enciclopédia livre – Relógio de pêndulo – http://pt.wikipedia.org/wiki/Rel%C3%B3gio_de_p%C3%AAndulo

Prof. Rogério - CTBM Pelotas – http://professor-rogerio.blogspot.com.br/2011/03/tipos-de-relogios.html

Só Física! – Pêndulo Simples – http://www.sofisica.com.br/conteudos/Ondulatoria/MHS/pendulo.php

Uso do GeoGebra para analisar o movimento harmonico simples por meio do pendulo simples – http://www.academia.edu/3879666/

GeoGebra – http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/69.pdf

GeoGebra – http://wiki.geogebra.org/pt/Publications

GeoGebra – http://wiki.geogebra.org/pt/Tutorial:P%C3%A1gina_Principal

GeoGebra – http://wiki.geogebra.org/pt/Categoria:Ferramentas

GeoGebra – http://wiki.geogebra.org/pt/Categoria:Comandos

GeoGebra – http://wiki.geogebra.org/pt/Manual:P%C3%A1gina_Principal

GeoGebra – http://www.geogebratube.org/?lang=pt_BR