UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ - UESC

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS - DCEX

Licenciatura em Matemática

Estudo exploratório da cônica - parábola

Professora Orientadora: Claudia Ribeiro Santana

Professor Co-Orientador: Paulo Vasconcelos

Estudante: Fábio Câmara Silva **Matrícula:** 201810330

Exercícios - Aula 04

Exercícios nível 01 - contexto matemático

1) Determine as coordenadas do Foco, a equação da diretriz e do eixo focal, a medida do *latus rectum* de cada uma das seguintes parábolas de vértice $V = (h, k)$. Use o geogebra para a representação gráfica, escolha duas e faça um esboço do gráfico no seu caderno.

(a) $y^2 - 6x - 8x + 17 = 0$ (h) $4x^2 + 48x + 12y + 156 = 0$ (o) $y^2 - 12x - 10y + 37 = 0$

(b) $x^2 - 12x + 16y + 68 = 0$ (i) $y^2 + 20x + 8y + 56 = 0$ (p) $x^2 + 2x + 4y - 19 = 0$

(c) $y^2 - 8x - 16 = 0$ (j) $x^2 - 24y + 48 = 0$ (q) $x^2 + 8x - 6y + 28 = 0$

(d) $y^2 - 5x + 6y + 13 = 0$ (k) $4x^2 - 12x - 16y + 41 = 0$ (r) $16y^2 - 24x + 8y + 49 = 0$

(e) $4x^2 - 4x - 16y - 23 = 0$ (l) $3y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$ (s) $2x^2 - 4y + 1 = 0$

(f) $4y^2 - 5x + 5 = 0$ (m) $x^2 + 2x - 12y + 1 = 0$ (t) $y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

(g) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 8y - 22 = 0$ (n) $4y^2 - 12x - 4\sqrt{5}y + 17 = 0$ (u) $9x^2 + 30x + 3\sqrt{7}y + 25 = 12\sqrt{7}$

Solução do item (k) $3y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$

Visto que o termo quadrático está na variável y, a parábola é horizontal com vértice $V(h, k)$, devemos, determinar os seus elementos e fazer um esboço do gráfico da parábola. Para tanto, inicialmente escrevemos a sua equação na forma canônica $(y - k)^2 = 4p(x - h)$. Para realizar este desenvolvimento, realizamos o seguinte tratamento algébrico:

$$3y^2 - 4x + 6y + 15 = 0 \;\Rightarrow\; y^2 - \frac{4}{3}x + 2y + 5 = 0 \;\Rightarrow\; y^2 + 2y = \frac{4}{3}x - 5 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y^2 + 2y + 1 = \frac{4}{3}x - 5 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (y+1)^2 = \frac{4}{3}x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; (y+1)^2 = \frac{4}{3}(x-3) = 0$$

Portanto a equação reduzida da parábola do item (k) é $(y + 1)^2 = \frac{4}{3}(x - 3) = 0$ de onde verifica-se os seguinte elementos.

Elementos

1 - Parâmetro: $4p = \dfrac{4}{3} \quad \rightarrow \quad p = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3}$;

2 - Vértice: $V = (h, k) = (3, -1)$;

3 - Foco: $F = (h + p, k) = \left(3 + \dfrac{1}{3}, -1\right) = \left(\dfrac{10}{3}, -1\right)$;

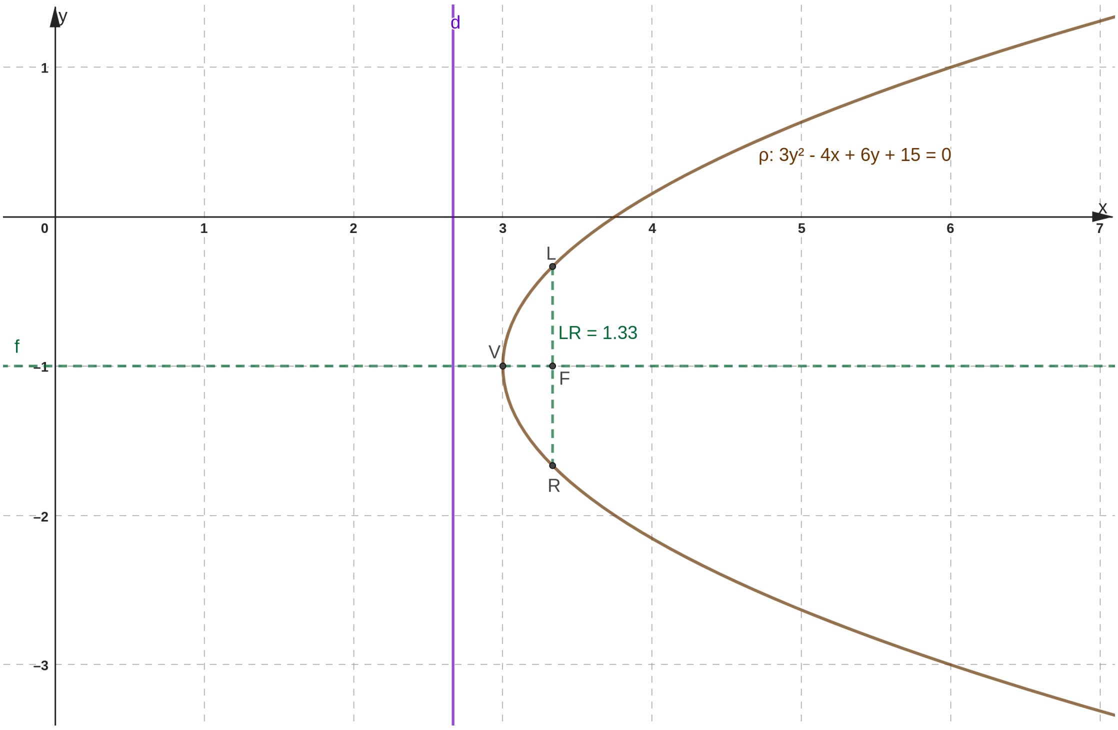
4 - A diretriz é a reta vertical de equação

$$d : x - (h - p) = 0 \quad \rightarrow \quad d : x - (3 - \frac{1}{3}) = 0 \quad \rightarrow \quad d : x - \frac{8}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad d : 3x - 8 = 0$$

5 - O eixo focal é reta horizontal de equação $f : y - k = 0 \quad \rightarrow \quad f : y + 1 = 0$;

6 - A medida do *latus rectum*: $\overline{LR} = |4p| = \left|4 \cdot \dfrac{1}{3}\right| = \left|\dfrac{4}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$;

Figura 1: Representação gráfica da parábola $\rho : 3y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$



Fonte: produção própria com geogebra

2) Determine a equação, os elementos da parábola ρ e faça um esboço do gráfico, dado:

(a) $V = (2, 4)$ e $F = (-3, 4)$

(b) $V = (-5, 2)$ e $F = (-5, 5)$

(c) $V = (-3, -2)$ e $F = \left(-3, \dfrac{1}{3}\right)$

(d) $V = (3, -1)$ e $F = (3, -5)$

(e) $V = (3, 2)$ e $F = (5, 2)$

(f) $V = (2, -4)$ e $F = \left(\dfrac{5}{2}, -4\right)$

Solução do item (e) $V = (3, 2)$ e $F = (5, 2)$

Observe que os pontos V e F estão alinhados horizontalmente, pois $y(V) = y(F) = k = 2$, ou seja, o Eixo Focal f é uma reta horizontal e a parábola em questão tem equação da forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ com $p \neq 0$, $V = (h, k)$ e $F = (h + p, k)$.

Se $h = 3$, então $3 + p = 5 \ \rightarrow \ p = 5 - 3 = 2$ e a equação reduzida da parábola é

$$(y - 2)^2 = 8(x - 3)$$

e a equação geral

$$y^2 - 8x - 4y + 28 = 0$$

Dados, $V = (3, 2)$ e $F = (5, 2)$, os demais elementos são:

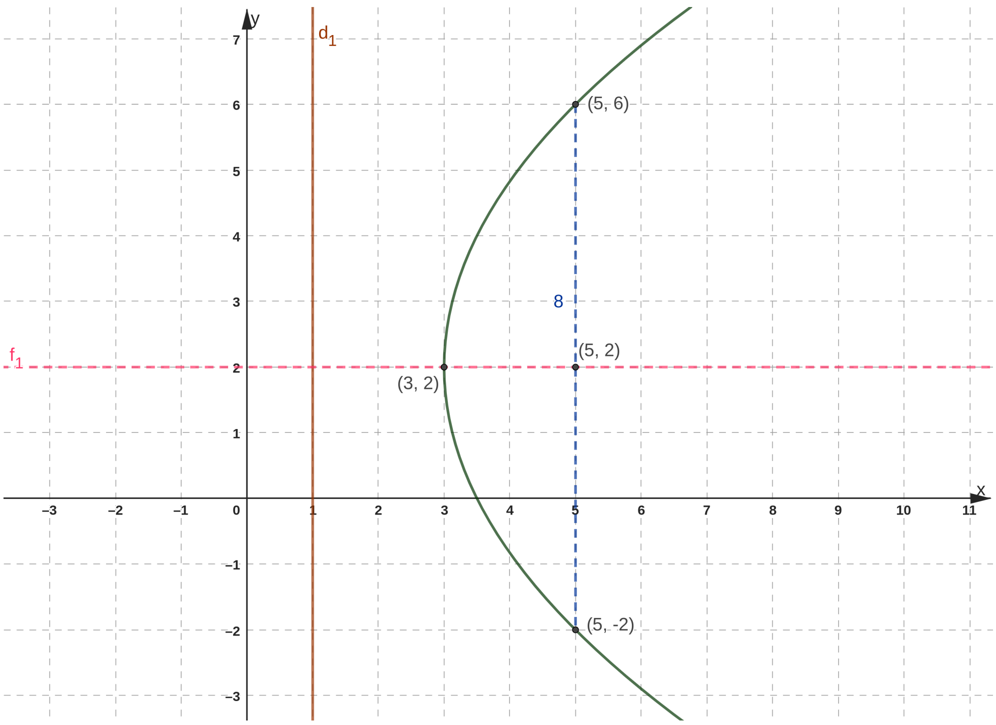
1 - parâmetro $p = 2$;

2 - diretriz $d : x - (h - p) = 0 \ \rightarrow \ d : x - (3 - 2) = 0 \ \rightarrow \ d : x - 1 = 0$;

3 - eixo focal $f : y - k = 0 \ \rightarrow \ f : y - 2 = 0$;

4 - a medida do *latus rectum* $\overline{LR} = |4p| = |4 \cdot 2| = |8| = 8$

Figura 2: Representação gráfica da parábola $y^2 - 8x - 4y + 28 = 0$



Fonte: produção própria com geogebra

3) Determine a equação, os elementos da parábola ρ e faça um esboço do gráfico, dado:

(a) $F = (-2, 6)$ e $d : x - 10 = 0$

(b) $F = (6, -4)$ e $d : x + 4 = 0$

(c) $F = (-5, 2)$ e $d : x - 2 = 0$

(d) $V = (1, -3)$ e $d : y + 5 = 0$

(e) $F = (4, 5)$ e $d : x + 3 = 0$

(f) $F = (0, -6)$ e $d : y - 8 = 0$

(g) $F = (7, 3)$ e $d : y + 2 = 0$

(h) $V = (-3, 5)$ e $LR = 24$

4) Resolva os seguintes problemas

a) Duas ondas parabólicas se chocam frontalmente, seus pontos de interferência destrutiva são $A(4, 6)$ e $B(4, -4)$, que por sua vez limitam a medida de seus *latus rectum*. Determine a equação das duas ondas.

b) Seja uma parábola vertical, com abertura voltada para cima, *latus rectum* igual a 8 e vértice $V(4, 0)$. Determine sua equação, seus elementos e esboce o gráfico. Se no foco desta parábola se encontra a interseção de duas parábolas cujo LR é a metade do LR da primeira, se um dos focos tem coordenadas $(6, 2)$, e as parábolas tem concavidade voltada para cima determine as equações. Esboce um gráfico que mostre as três parábolas.

c) Em uma partida de futebol, um jogador chuta a bola e esta descreve uma trajetória parabólica de equação $2x^2 - 88x + 120y = 0$. Tomando o ponto de partida do chute como a origem e a unidade de medidas em metros determine a altura máxima da bola e o alcance máximo da bola, ou seja, o ponto onde a bola toca novamente o solo.

d) Um refletor com forma parabólica está posicionado a uma altura de 10 m, cuja abertura é de 30 cm e sua profundidade é de 25 cm. Determine a largura da área iluminada por este refletor e a coordenada do foco.

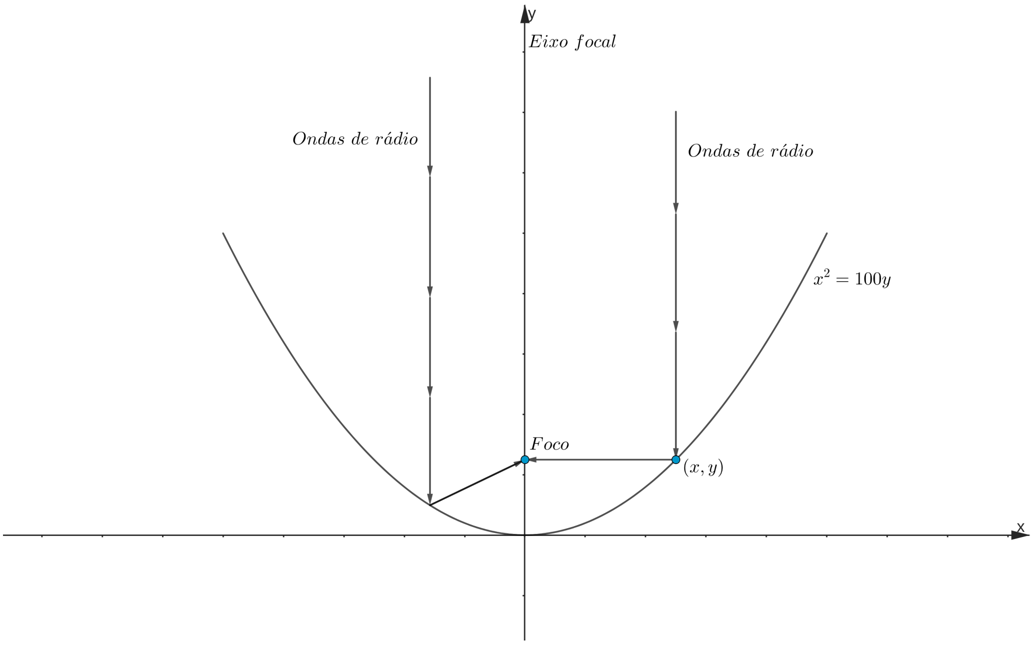
e) Um refletor está projetado de tal forma que a seção transversal que passa pelo seu eixo é uma parábola com foco na fonte de luz. Se o refletor mede 3 m na abertura e 1 m de profundidade, determine a que distância do vértice se encontra a fonte de luz.

f) O refletor de um radio telescópio tem a forma parabólica, de maneira que as ondas de rádio provenientes do espaço que entram paralelas a seu eixo focal são refletidas a antena em seu foco. Se a seção eficaz do refletor esta dada pela equação $x^2 = 100y$ onde x e Y estão em metros.

(a) Determine a posição do foco;

(b) Determine as coordenadas do ponto (x, y) mostrado na Figura 3, no qual as ondas de rádio são refletidas em ângulos retos até o eixo focal da parábola.

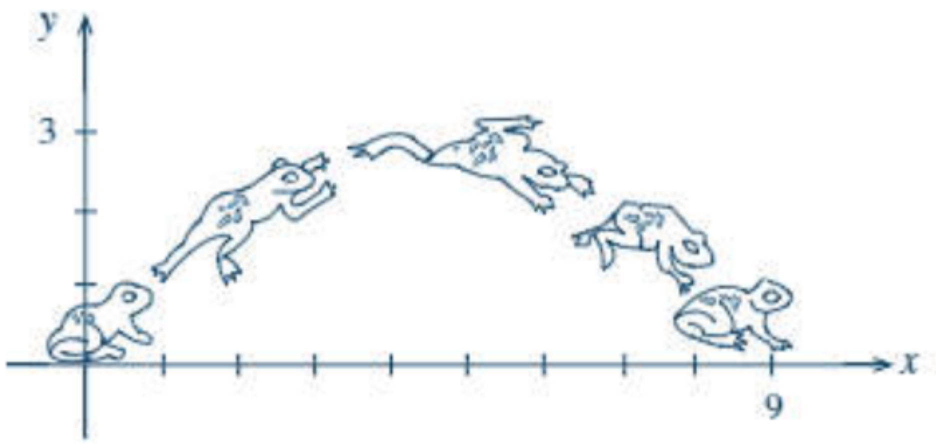
Figura 3: Seção do refletor de um rádio telescópio num sistema de coordenadas cartesianas



Fonte: produção própria

g) A Figura 4 mostra o salto de uma rã sobreposta a um sistema de coordenadas cartesianos. A largura do salto é de 9 metros e altura é de 3 metros. Determine a equação da trajetória do salto.

Figura 4: Salto de um rã sobreposto a um sistema cartesiano



h) Determine a altura de um ponto de um arco parábólico de 24 m de altura e 36 m de base, situado a uma distância de 12 m do centro do arco.