Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 14 - concepto de base, base ortogonal y base ortonormal

1. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,0,1)$, $\vec{w}=(0,1,0)$, demuestra que forman una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$. Calcula las coordenadas del vector $\vec{w}=(10,4,-3)$ en dicha base.

Tres vectores en el espacio tridimensional forman una base si son sistema generador y linealmente independientes.

Demostremos primero que forman un sistema generador, es decir, que cualquier vector del espacio tridimensional se puede representar como combinación lineal de los tres vectores de partida.

$$(x,y,z)=a(1,1,1)+b(2,0,1)+c(0,1,0)$$

Resultando un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas: a,b,c .

$$\left\{\begin{matrix} x=a+2b \\ y=a+c \\ z=a+b \end{matrix}\right\}$$

Si restamos la primera ecuación menos la tercera → $x-z=b$

Si multiplicamos la tercera ecuación por 2 y le restamos la primera → $2z-x=a$

Si sustituimos el valor de a en la segunda ecuación → $x+y-2z=c$

Hemos obtenido solución única de las tres incógnitas, en función de los valores del vector arbitrario (x,y,z) . Por lo tanto, los tres vectores de partida forman un sistema generador.

Serán linealmente independientes si hacen nulos todos los parámetros de la siguiente igualdad:

$$(0,0,0)=a(1,1,1)+b(2,0,1)+c(0,1,0)$$

Que da lugar al siguiente sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\left\{\begin{matrix} 0=a+2b \\ 0=a+c \\ 0=a+b \end{matrix}\right\}$$

De la primera ecuación → $a=-2b$

De la tercera ecuación → $a=-b$

Por lo tanto → $b=2b$ → $b=0$ → $a=0$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación → $c=0$

Es decir, los tres vectores son linealmente independientes.

Por lo tanto, forman una base por ser sistema generador y linealmente independientes.

Otra forma de razonar podría ser la siguiente: estudiar el rango de los tres vectores de tres dimensiones y comprobar que vale 3. Cuando tres vectores de tres dimensiones tienen rango 3, forman un base.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \rightarrow \quad F'_2=F_2-2F_1 \quad \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-1\\0&1&0\end{pmatrix} \rightarrow \quad F'_3=2F_3+F_2 \quad \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Tras aplicar el método de Gauss, obtenemos tres vectores con al menos un coeficiente no nulo. El rango es 3. Los vectores forman una base.

Podemos expresar $\vec{w}=(10,4,-3)$ como combinación de los tres vectores, recordando las relaciones obtenidas como sistema generador:

$$2z-x=a$$

$$x-z=b$$

$$x+y-2z=c$$

Para $\vec{w}=(10,4,-3) \rightarrow \quad x=10 \quad , \quad y=4 \quad , \quad z=-3$

Por lo tanto → $a=-16 \quad , \quad b=13 \quad , \quad c=20$

La coordenadas de $\vec{w}$ en la base → $(10,4,-3)=-16(1,1,1)+13(2,0,1)+20(0,1,0)$

2. Demostrar analíticamente que los siguientes vectores forman una base ortogonal en V^3 : $\vec{u}=(2,2,0)$, $\vec{v}=(-2,2,0)$, $\vec{w}=(0,0,2)$.

Para formar una base, el conjunto de vectores debe ser linealmente independientes y sistema generador.

Son linealmente independientes si el siguiente sistema tiene solución única $(0,0,0)$.

$$a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{w}=\vec{0}$$

$$\begin{Bmatrix}2a-2b=0\\2a+2b=0\\2c=0\end{Bmatrix} \rightarrow c=0 \rightarrow \begin{Bmatrix}2a-2b=0\\2a+2b=0\end{Bmatrix} \rightarrow a=0 \quad , \quad b=0$$

Tenemos, por tanto, un sistema compatible determinado → Solución única → Los vectores son linealmente independientes.

Para formar sistema generador, cualquier vector arbitrario (x,y,z) debe poder expresarse como combinación lineal de los tres vectores.

$$a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{w}=(x,y,z)$$

$$\begin{Bmatrix}2a-2b=x\\2a+2b=y\\2c=z\end{Bmatrix} \rightarrow c=\frac{z}{2} \rightarrow \begin{Bmatrix}2a-2b=x\\2a+2b=y\end{Bmatrix} \rightarrow a=\frac{x+y}{4} \quad , \quad b=\frac{y-x}{4}$$

Por tanto, podemos expresar los coeficientes a,b,c en función de los valores (x,y,z) del vector arbitrario → Sistema generador.

Podríamos habernos ahorrado estos dos pasos estudiando el rango de los vectores y comprobando que es igual a 3. Ya que tres vectores de tres dimensiones forman base si su rango es igual a 3.

Ya hemos demostrado que forman una base. Para que sea ortogonal, sus vectores deben ser perpendiculares dos a dos. Para demostrarlo, recordamos que el producto escalar de dos vectores perpendiculares (ángulo de 90º) es cero.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot(-2)+2\cdot2+0\cdot0=0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=2\cdot0+2\cdot0+0\cdot2=0$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=-2\cdot0+2\cdot0+0\cdot2=0$$

Es decir, todos los vectores son perpendiculares entre si → Base ortogonal.

3. Calcula a para que el conjunto de vectores $\vec{u}=(\frac{3}{5},\frac{-4}{5})$ y $\vec{v}=(2a,\frac{3a}{2})$ sea una base ortonormal.

Una base ortonormal en dos dimensiones está formada por dos vectores unitarios y perpendiculares entre si.

El primer vector es de módulo unidad → $|\vec{u}|=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25}{25}}=1$

El segundo vector también debe ser unitario → $|\vec{v}|=\sqrt{4a^2+\frac{9a^2}{4}}=\sqrt{\frac{25a^2}{4}}=1 \rightarrow a=\pm\frac{2}{5}$

Para comprobar que son perpendiculares, vemos si su producto escalar se anula:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{6a}{5}-\frac{6a}{5}=0$$

Es decir, el producto escalar se anula independientemente del valor de a . Tenemos una base ortonormal para $a=\pm\frac{2}{5}$.

Si estudiáramos el rango de ambos vectores, concluiríamos que su rango vale 2. Y ya sabemos que dos vectores de dos dimensiones con rango 2 forman una base en el plano bidimensional.

4. Las siguientes afirmaciones son verdaderas. Poner un ejemplo que demuestre analíticamente cada afirmación y resolverlo.

a) Tres vectores en V^2 que forman un sistema generador no forman una base.

b) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores en V^2 y tienen el mismo módulo, entonces los vectores suma $(\vec{u}+\vec{v})$ y diferencia $(\vec{u}-\vec{v})$ son perpendiculares.

c) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortogonales en V^2 , verifican $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$.

a) Tres vectores en V^2 que forman un sistema generador no forman una base porque, en dos dimensiones, todas las bases están formadas solo por dos vectores. Para una mayor número de vectores, obligatoriamente, uno de los vectores será combinación lineal de los otros dos.

Por ejemplo: $\vec{u}=(1,0)$, $\vec{v}=(0,1)$, $\vec{w}=(2,0)$ son un sistema generador. Demostrémoslo:

$$a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{w}=(x,y)$$

$$\begin{Bmatrix} a+2c=x \\ b=y \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Tendremos un parámetro libre: por ejemplo } c=\lambda$$

De la segunda ecuación: $b=y$

Y en la primera: $a+2\lambda=x \rightarrow a=x-2\lambda$

Por lo tanto, podemos expresar los parámetros a,b,c en función de las componentes del vector arbitrario (x,y) → Forman un sistema generador.

Pero no una base. Comprobemos que el siguiente sistema no tiene solución única trivial $(0,0,0)$.

$$a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{w}=(0,0)$$

$$\begin{Bmatrix} a+2c=0 \\ b=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Tendremos un parámetro libre: por ejemplo } c=\lambda \rightarrow b=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a=-2\lambda$$

Como el parámetro λ puede tomar cualquier valor, tendremos infinitas soluciones válidas → S.C.I. → no forman una base.

Otra forma de demostrarlo: estudiar el rango de la matriz formada por los tres vectores. Obtendríamos rango iguala a 2. Y por ser tres vectores de dos dimensiones, significaría que forman sistema generador por no base.

b) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores en V^2 y tienen el mismo módulo, entonces los vectores suma $(\vec{u}+\vec{v})$ y diferencia $(\vec{u}-\vec{v})$ son perpendiculares.

Por ejemplo: $\vec{u}=(3,4)$, $\vec{v}=(4,3)$ → Ambos son de módulo 5 .

$$(\vec{u}+\vec{v})=(7,7)$$
$$(\vec{u}-\vec{v})=(-1,1)$$

Hacemos el producto escalar del vector suma por el vector diferencia. Y si es nulo, indica que son perpendiculares (ángulo 90º).

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=(7,7)\cdot(-1,1)=-7+7=0$$

c) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortogonales en V^2 , verifican $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$.

Planteamos los siguientes vectores ortogonales (perpendiculares), aprovechando los resultados del apartado anterior.

$$\vec{u}=(7,7)$$
$$\vec{v}=(-1,1)$$

Debemos demostrar la igualdad $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$. Operamos en cada término y comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2=|(7,7)+(-1,1)|^2=|(6,8)|^2=(\sqrt{36+64})^2=36+64=100$$
$$|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2=|(7,7)|^2+|(-1,1)|^2=(\sqrt{49+49})^2+(\sqrt{1+1})^2=98+2=100$$