<u>Θυμήσου ότι:</u> το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, με $\alpha<\beta$, ορίζεται ως το όριο του αθροίσματος Riemann

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right) = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right) = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\frac{\beta-\alpha}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\right)$$

στην περίπτωση που διαιρούμε σε ν ίσα υποδιαστήματα με πλάτος $\Delta x = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Δραστηριότητα 1

Στην εφαρμογή δίνεται μία προεπιλεγμένη συνάρτηση f. *Αρχικά ακολούθησε τα ακόλουθα βήματα*:

- Επίλεξε το κουτί «Έναρξη» και στα αντίστοιχα πλαίσια επίλεξε τα άκρα ολοκλήρωσης α, β που θέλεις (αρχικά βάλε τις τιμές $\alpha=-1$, $\beta=2$).
- Επίλεξε το κουτί «Διαμέριση» για να διαιρέσεις το $[\alpha,\beta]$ σε ν ίσα υποδιαστήματα.

  Οι τιμές του ν αλλάζουν με τον πράσινο μετρητή (επίλεξέ τον με το ποντίκι σου και άλλαξε τις τιμές του με τα πλήκτρα κατεύθυνσης του πληκτρολογίου ή κάνε κλικ στο κουμπί «κίνηση»).
  Με τον δρομέα «speed» μπορείς να επιλέξεις την ταχύτητα με την οποία κινείται το ν).
- Επίλεξε $\nu=1$ και στη συνέχεια επίλεξε το κουτί «ενδιάμεσα σημεία» για να εμφανίσεις τα ξ_κ.
- Επίλεξε διαδοχικά τα κουτιά «εμφάνιση υψών» και «ορθογώνια» για να δεις γραφικά τα γινόμενα $f(\xi_\kappa)\Delta x$
- Επίλεξε το κουτί «Μετρήσεις» για να εμφανιστούν οι σχετικοί υπολογισμοί.
- Άλλαξε τις τιμές του ν και παρατήρησε τι συμβαίνει.

Για τη συνάρτηση f, συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα
(φρόντισε σε κάθε περίπτωση να είναι $\nu=1000$).
Ως **Ω** θεωρούμε το χωρίο που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.

Διάστημα [α , β]	**Πρόσημο της f(x)**	$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$	**Ε(Ω)**

① Τι παρατηρείς για το πρόσημο του $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$; Μπορείτε να εξηγήσεις γιατί;

② Ποια σχέση συνδέει το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ με το εμβαδόν E του χωρίου Ω;

Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;

Γενικά συμπεράσματα για την περίπτωση αυτή:
Όταν $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0 \quad \text{και} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = E(\Omega)$$

όπου **Ω** θεωρούμε το χωρίο που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.

Δραστηριότητα 2

- Επίλεξε το κουτί «επιλογή τύπου» και σύρε με το ποντίκι σου τον μωβ δρομέα στη θέση «2η συνάρτηση».

- Αποεπίλεξε το κουτί «επιλογή τύπου» και επανάλαβε τα προηγούμενα βήματα.

Για τη συνάρτηση f, συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα
(φρόντισε σε κάθε περίπτωση να είναι $\nu = 1000$).
Ως **Ω** θεωρούμε το χωρίο που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.

Διάστημα [α , β]	**Πρόσημο της f(x)**	$\int_\alpha^\beta f(x)dx$	**Ε(Ω)**

① Τι παρατηρείς για το πρόσημο του $\int_\alpha^\beta f(x)dx$; Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;

② Ποια σχέση συνδέει το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ με το εμβαδόν E του χωρίου Ω;
Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;

Γενικά συμπεράσματα για την περίπτωση αυτή:
Όταν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση (δηλαδή υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) \neq 0$), τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0 \quad \text{και} \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega)$$

όπου **Ω** θεωρούμε το χωρίο που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.

Δραστηριότητα 3

- Επίλεξε το κουτί «επιλογή τύπου» και σύρε με το ποντίκι σου τον μωβ δρομέα στη θέση «3η συνάρτηση».

- Αποεπίλεξε το κουτί «επιλογή τύπου» και επανάλαβε τα προηγούμενα βήματα. Δώσε αρχικά ως άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης $\alpha=-2$ και $\beta=1$.

Για τη συνάρτηση f, συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα
(φρόντισε σε κάθε περίπτωση να είναι $\nu=1000$).
Ως **Ω** θεωρούμε το χωρίο που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.

Διάστημα [α , β]	**Πρόσημο της f(x)**	$\int_\alpha^\beta f(x)dx$	**Ε(Ω)**

① Τι παρατηρείς για το πρόσημο του $\int_\alpha^\beta f(x)dx$; Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;

② Ποια σχέση συνδέει το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ με το εμβαδόν E του χωρίου Ω;
Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;

Γενικά συμπεράσματα για την περίπτωση αυτή:
Όταν $f(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx<0 \quad \text{και} \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx=-E(\Omega)$$

όπου **Ω** θεωρούμε το χωρίο που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.

Δραστηριότητα 4

- Επίλεξε το κουτί «επιλογή τύπου» και σύρε με το ποντίκι σου τον μωβ δρομέα στη θέση «4η συνάρτηση».

- Αποεπίλεξε το κουτί «επιλογή τύπου» και επανάλαβε τα προηγούμενα βήματα.
  Δώσε αρχικά ως άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης $\alpha = -1$ και $\beta = 3$.

Για τη συνάρτηση f, συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα
(φρόντισε σε κάθε περίπτωση να είναι $\nu = 1000$).
Ως **Ω** θεωρούμε το χωρίο που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.

Διάστημα [α , β]	**Πρόσημο της f(x)**	$\int_\alpha^\beta f(x)dx$	**Ε(Ω)**

① Τι παρατηρείς για το πρόσημο του $\int_\alpha^\beta f(x)dx$; Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;

② Ποια σχέση συνδέει το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ με το εμβαδόν E του χωρίου Ω ;
Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;

Γενικά συμπεράσματα για την περίπτωση αυτή:
Όταν $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση (δηλαδή υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) \neq 0$), τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx < 0 \quad \text{και} \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx = -E(\Omega)$$

όπου **Ω** θεωρούμε το χωρίο που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.