Änderungen und Änderungsraten in Wirtschaftssituationen

Im Folgenden werden als Einheit für die Waren Menge „Mengeneinheiten" (ME) und als Einheit für Kosten, Erlöse und Gewinne Geldeinheiten (GE) verwendet.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Preisabsatzfunktion $p(x) = \frac{1}{4}\,x^2 - 5\,x + 25$

a) Berechnen sie den Funktionswert an der Stelle $x = 4\,\mathrm{ME}$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis in einem Antwortsatz: Was hat das Ergebnis zu bedeuten?

Lösung: $p(4) = \frac{1}{4}\cdot 4^2 - 5\cdot 4 + 25 = 9$ Das Ergebnis bedeutet, dass bei einem Preis von $9\mathrm{GE}$ genau $4\mathrm{ME}$ der Ware abgesetzt werden.

b) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Preisabsatzfunktion im Intervall $x \in [4\,\mathrm{ME}; 6\,\mathrm{ME}]$

Lösung: $m = \frac{p(6) - p(4)}{6-4} = -\frac{5}{2} = -2,5$ Die mittlere Änderungsrate der Preisabsatzfunktion im Intervall $x \in [4\,\mathrm{ME}; 6\,\mathrm{ME}]$ beträgt $-2,5\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{ME}^2}$

c) Berechnen Sie die erste Ableitungsfunktion $p'(x)$ der Preisabsatzfunktion $p(x)$

Lösung: $p'(x) = \frac{1}{2}\,x - 5$

d) Berechnen Sie die Änderungsraten der Preisabsatzfunktion an den Stellen $x = 4\,\mathrm{ME}$ und $x = 6\,\mathrm{ME}$. Was bedeuten die Ergebnisse?

Lösung: $p'(4) = \frac{1}{2}\cdot 4 - 5 = -3$ und $p'(6) = \frac{1}{2}\cdot 6 - 5 = -2$

Bedeutung: Wenn man $x = 4\mathrm{ME}$ der Ware absetzt und die Produktion erhöhen möchte, dann muss sich der Preis, laut Preisabsatzfunktion, um $-3\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{ME}}$ pro ME, also $p'(4) = -3\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{ME}^2}$ ändern.

Wenn man $x = 6\mathrm{ME}$ der Ware absetzt und die Produktion erhöhen möchte, dann muss sich der Preis , laut Preisabsatzfunktion, um $p'(6) = -2\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{ME}^2}$ ändern. Das heißt der Preis muss abnehmen, wenn mehr Ware abgesetzt werden soll.

e) Berechnen Sie an Hand von $p(x)$ den ökonomischen Definitionsbereich. Berechnen Sie außerdem $p'(12)$. Begründen Sie an Hand des Ergebnisses: Warum liegt der Wert $x = 12\,\mathrm{ME}$ nicht mehr im ökonomischen Definitionsbereich?

Lösung: Gesucht ist die Sättigungsmenge, also ist der mathematische Ansatz: $p(x_S) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\,x_S^2 - 5\,x_S + 25 = 0$ Mit pq-Formel oder Geogebra löse(p(x)=0) $\Rightarrow x_S = 10\mathrm{ME}$

Der ökonomisch sinnvolle Definitionsbereich ist $D_{ök} = [0\mathrm{ME}; 10\mathrm{ME}]$

f) Begründen Sie: Warum sind die Funktionswerte der Ableitungsfunktion einer Preisabsatzfunktion im ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich immer negativ?

Lösung: Wenn der Preis ***gesenkt*** wird, dann lässt sich *mehr* Ware absetzen. Daher ist die Änderungsrate immer negativ.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x) = \dfrac{1}{3}\,x^3 - 2\,x^2 + 5\,x + 10$

a) Wie hoch sind die Fixkosten?

Lösung: Die Fixkosten sind $K_{fix} = K(0) = 10\,\mathrm{GE}$

b) Wie lautet die Funktion der variablen Kosten?

Lösung: $K_v(x) = K(x) - K_{fix} = \dfrac{1}{3}\,x^3 - 2\,x^2 + 5\,x$

c) Die erste Ableitungsfunktion von $K(x)$ ist die **Grenzkostenfunktion** $K'(x)$. Berechnen Sie die Grenzkostenfunktion.

Lösung: $K'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot 3\,x^2 - 2 \cdot 2\,x + 5 = \underline{\underline{x^2 - 4x + 5}}$

d) Berechnen Sie die Kosten und die Änderungsrate der Kostenfunktion an der Stelle $x = 3\,\mathrm{ME}$.

Lösung: Kosten: $K(3) = \dfrac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 10 = 16$
Änderungsrate der Kosten: $K'(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 2$
Die Kosten an der Stelle $x = 3\mathrm{ME}$ betragen $K(3) = 13\mathrm{GE}$. Sie ändern sich an dieser Stelle um $K'(3) = 2\,\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{ME}}$

e) Berechnen Sie die mittlere Steigung im Intervall $x \in [1\mathrm{ME}; 3\mathrm{ME}]$

Lösung: $m = \dfrac{K(3) - K(1)}{3 - 1} = \dfrac{4}{3}$ Die mittlere Änderungsrate der Kosten im Intervall $x \in [1\mathrm{ME}; 3\mathrm{ME}]$ ist $m = \frac{4}{3}\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{ME}}$

f) Begründen Sie: Warum ist sind die Funktionswerte einer Grenzkostenfunktion $K'(x)$ **grundsätzlich alle positiv**?

Lösung: Weil die Kosten sich bei einer *größeren* Absatzmenge ***erhöhen*** müssen. Wenn mehr Ware produziert wird, dann müssen auch mehr Rohstoffe verwendet und gekauft werden.

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie aus der Preisabsatzfunktion und der Kostenfunktion aus den Aufgaben 1 und 2 die Gewinnfunktion $G(x)$.

Lösung: Erlösfunktion: $E(x) = x \cdot p(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - 5\,x^2 + 25\,x$ damit und mit der Kostenfunktion:
$G(x) = E(x) - K(x) = -\dfrac{1}{12}x^3 - 3\,x^2 + 20\,x - 10$

b) Bestimmen Sie den Break-even-point und die Gewinngrenze.

Lösung:
Mit Geogebra: löse(G(x)=0) $\Rightarrow x_1 = -41,8$, $x_2 = x_{GS} = 0,545$ und $x_3 = x_{GG} = 5,26$
Die erste Lösung ist nicht im Definitionsbereich, weil es keine negativen Warenmengen gibt. Dann ist die zweite Nullstelle x_2 der Break-even-point bzw. die Gewinnschwelle $x_{GS} \approx 0,55\mathrm{ME}$. Das dritte Ergebnis x_3 ist dann die Gewinngrenze $x_{GG} \approx 5,26\mathrm{ME}$.

c) Die erste Ableitungsfunktion des Gewinns $G'(x)$ heißt **Grenzgewinn** *(das hat nichts mit der Gewinngrenze zu tun!!)* . Berechnen Sie $G'(2)$ und $G'(4)$ und interpretieren Sie die beiden Ergebnisse.

Lösung: $G'(x) = -\dfrac{1}{12} \cdot 3\,x^2 - 3 \cdot 2\,x + 20 = \underline{\underline{-\dfrac{1}{4}x^2 - 6\,x + 20}}$

$G'(2) = -\dfrac{1}{4} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 20 = 7$ und $G'(4) = -\dfrac{1}{4} \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + 20 = -8$
Wenn der Absatz von $x = 2\,\mathrm{ME}$ weiter erhöht wird, dann *steigt* der Gewinn um $7\,\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{ME}}$
Wenn der Absatz von $x = 4\,\mathrm{ME}$ weiter erhöht wird, dann *fällt* der Gewinn um $8\,\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{ME}}$