Problemas – Tema 3

Problemas resueltos - 4 - conjugado y división en notación binómica

1. Opera $\frac{2+3i}{1+i}$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{2+3i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{2-2i+3i-3i^2}{1-i^2}=\frac{5+i}{2}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$$

2. Calcular el valor de a para que el resultado de $\frac{2+ai}{3-i}$ sea un número imaginario puro.

Multiplico y divido por el conjugado del denominador.

$$\frac{(2+ai)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{6+2i+3ai+ai^2}{3^2-i^2}=\frac{6+2i+3ai-a}{9+1}$$

Separo la parte real de la imaginaria.

$$\frac{6-a}{10}+\frac{(2+3a)i}{10}$$

Como me piden que el resultado tiene que ser un número imaginario puro, igualo la parte real a 0.

$$\frac{6-a}{10}=0 \rightarrow 6-a=0 \rightarrow a=6$$

3. Deduce que el inverso del complejo $(a+bi)$ **es igual a** $(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i)$ **.**

Sea $z=a+bi$ → Inverso → $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}$

Multiplico y divido por el conjugado del denominador

$$\frac{1}{a+bi}x\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2-b^2i^2}$$

Sabiendo que $i^2=-1$:

$$\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i\right)$$

Como queríamos demostrar.

4. Sabiendo que z es un número complejo, resuelve la ecuación $\frac{z}{1+i}+\frac{z}{i}=2\mathrm{i}$.

Respecto del primer factor de la suma, que es un cociente, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{z}{(1+i)}*\left(\frac{(1-i)}{(1-i)}\right) = \frac{z-zi}{(1-i+i-i^2)}=\frac{z-zi}{2}$$

Respecto del segundo factor de la suma, que es un cociente, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{z}{i}*\left(\frac{-i}{-i}\right)=\frac{-zi}{-i^2}=-zi$$

Sumamos ambos sumandos → $\frac{z-zi}{2}-zi=\frac{z-zi-2zi}{2}$

Igualamos al factor $2i$ → $\frac{z-zi-2zi}{2}=2i$ → $z-zi-2zi=4i$ → $z-3zi=4i$

Sacamos factor común de la incógnita z → $z(1-3i)=4i$ → $z=\frac{4i}{1-3i}$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$z=\frac{4i}{1-3i}\cdot\frac{1+3i}{1+3i} \rightarrow z=\frac{4i+12i^2}{1-9i^2} \rightarrow z=\frac{4i-12}{1+9} \rightarrow z=\frac{-6}{5}+\frac{2}{5}i$$

5. Calcula x para que el resultado del cociente $\frac{1+3i}{1+xi}$ tenga de módulo $\sqrt{5}$

Al multiplicar un número complejo $z=a+bi$ por su conjugado $\bar{z}=a-bi$ el resultado coincide con el cuadrado de su módulo.

Por lo tanto, si multiplicamos el numerador por su conjugado, si multiplicamos el denominador por su conjugado y realizamos la división, el resultado coincidirá con el cuadrado de $\sqrt{5}$.

$$\frac{1+3i}{1+xi}\cdot\frac{1-3i}{1-xi}=\left(\sqrt{5}\right)^2 \rightarrow \frac{1+9}{1+x^2}=5 \rightarrow 1+9=5+5x^2 \rightarrow 5x^2-5=0 \rightarrow x^2=\frac{5}{5} \rightarrow x=\pm 1$$

6. Resuelve los siguientes cocientes.

a) $\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$

b) $\frac{(3-i)^2}{i(1+i)}$

a) Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}\cdot\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}-i}=\frac{2+i^2-2\cdot\sqrt{2}i}{3}=\frac{1-2\cdot\sqrt{2}i}{3}=\frac{1}{3}-\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}i$$

b) Operamos en numerador y denominador, recordando que $i^2=-1$.

$$\frac{(3-i)^2}{i(1+i)}=\frac{9+i^2-6i}{i+i^2}=\frac{8-6i}{-1+i}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{8-6i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i}=\frac{-8-8i+6i+6i^2}{1-i^2}=\frac{-14-2i}{2}=-7-i$$

7. Halla dos números complejos sabiendo que su suma es $1+6i$ y que el cociente de los mismos es un número imaginario puro. Además, la parte imaginaria de uno de los números complejos es igual a uno.

Los dos números complejos son:

$$z_1=a+bi \quad , \quad z_2=c+i$$

Donde hemos considerado la parte imaginaria del segundo número igual a la unidad.

Realizamos la suma de ambos números complejos.

$$z_1+z_2=1+6i \quad \rightarrow \quad (a+c)+(b+1)i=1+6i \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} a+c=1 \\ b+1=6 \end{Bmatrix}$$

De la segunda ecuación del sistema obtenemos → $b=5$

Realizamos el cociente, que da lugar a un número imaginario puro.

$$\frac{a+5i}{c+i}\cdot\frac{c-i}{c-i}=\frac{ac-ai+5ci+5}{c^2+1}=\frac{ac+5}{c^2+1}+\frac{5c-a}{c^2+1}i \quad \rightarrow \quad \frac{ac+5}{c^2+1}=0 \quad \rightarrow \quad ac+5=0$$

Podemos formar un sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas a y c .

$$\begin{Bmatrix} a+c=1 \\ ac+5=0 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} c=1-a \\ ac+5=0 \end{Bmatrix}$$ → Sustituimos el valor de la primera en la segunda.

$$a(1-a)+5=0 \quad \rightarrow \quad a-a^2+5=0 \quad \rightarrow \quad a^2-a-5=0 \quad \rightarrow \quad a=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$$

Si $a=\frac{1+\sqrt{21}}{2} \quad \rightarrow \quad c=1-\frac{1+\sqrt{21}}{2}=\frac{1-\sqrt{21}}{2} \quad \rightarrow \quad z_1=\frac{1+\sqrt{21}}{2}+5i \quad , \quad z_2=\frac{1-\sqrt{21}}{2}+i$

Si $a=\frac{1-\sqrt{21}}{2} \quad \rightarrow \quad c=1-\frac{1-\sqrt{21}}{2}=\frac{1+\sqrt{21}}{2} \quad \rightarrow \quad z_1=\frac{1-\sqrt{21}}{2}+5i \quad , \quad z_2=\frac{1+\sqrt{21}}{2}+i$

8. Demuestra que para el complejo $z=\cos x-i\cdot sen\,x$ **se verifica** $\frac{1}{z}=\cos x+i\cdot sen\,x$ **.**

$z=\cos x-i\cdot sen\,x$

$\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos x-i\cdot sen\,x}$ → Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos x-i\cdot sen\,x}\cdot\frac{\cos x+i\cdot sen\,x}{\cos x+i\cdot sen\,x}$ → $\frac{1}{z}=\frac{\cos x+i\cdot sen\,x}{\cos^2 x-i^2\cdot sen^2\,x}$ → $\frac{1}{z}=\frac{\cos x+i\cdot sen\,x}{\cos^2 x+sen^2\,x}$

$\frac{1}{z}=\frac{\cos x+i\cdot sen\,x}{1}$ → $\frac{1}{z}=\cos x+i\cdot sen\,x$ → Como queríamos demostrar.

Donde hemos utilizado la relación fundamental de trigonometría → $\cos^2 x+sen^2\,x=1$