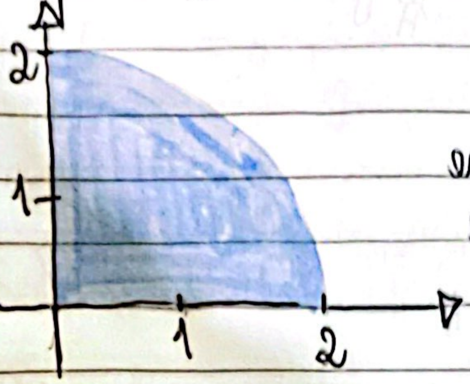
Integrais duplas em coordenadas polares

Regiões Polares Simples

Algumas integrais duplas são mais fáceis de calcular se a região de integração for expressa em coordenadas polares. Por exemplo o quarto de disco é descrito por



$$0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

em coordenadas retangulares, mas em coordenadas polares essa região é dada por

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Além disso, as integrais duplas cujos integrandos envolvem x^2+y^2 também tendem a ser mais fáceis de calcular em coordenadas polares, pois essa soma é igual a r^2 quando são aplicadas as fórmulas de conversão $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

A figura a seguir mostra uma região R em um sistema de coordenadas polares que é delimitada por dois raios, $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e duas curvas polares $r = r_1(\theta)$ e $r = r_2(\theta)$.

/ /

EXEMPLO 8

Use uma integral dupla para calcular a área da região R compreendida pela parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ e a reta $2x = y$

Tipo I

$$\text{área de } R = \iint_R dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x^2}^{2x} dy\,dx$$

$$= \int_0^4 \int_{\frac{x^2}{2}}^{2x} y\,dx = \int_0^4 2x - \frac{x^2}{2}\,dx = x^2 - \frac{x^3}{6}\Big]_0^4 = 4^2 - \frac{4^3}{6} = \frac{16}{3}$$

Tipo II $\quad y = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow 2y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{2y}, \; y = 2x \rightarrow x = y/2$

$$\text{área de } R = \iint_R dA = \int_0^8 \int_{y/2}^{\sqrt{2y}} dx\,dy = \int_0^8 x\Big]_{y/2}^{\sqrt{2y}} dy$$

$$= \int_0^8 \sqrt{2y} - \frac{y}{2}\,dy = \frac{2\sqrt{2}}{3}y^{3/2} - \frac{y^2}{4}\Big]_0^8 = \frac{2\sqrt{2}(8)^{3/2}}{3} - \frac{8^2}{4} = \frac{16}{3}$$

EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.2

① Preencha as lacunas com o integrando e os extremos de integração que faltam.

a) $\int_1^5 \int_2^{y/2} 6x^2 y\,dx\,dy = \int_1^5 2x^3y\Big]_2^{y/2} dy = \int_1^5 \left[2\left(\frac{y}{2}\right)^3 y - 2(2^3)y\right] dy$

$$= \int_1^5 \frac{2y^3}{8}y - 16y\,dy = \int_1^5 \left(\frac{y^4}{4} - 16y\right) dy$$

Inversão da ordem de integração

EXEMPLO 4

Como não há antiderivada elementar de e^{x^2}, a integral $\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\,dx\,dy$ não pode ser calculada integrando primeiro em relação a x. Calcule essa integral expressando-a como uma integral iterada equivalente com ordem de integral iterada equivalente com ordem de integração invertida.

Na integração interna, y é fixado e x varia entre as retas
$x=1$ e $x=\frac{y}{2}$, $y=2x$

Na integração externa, y varia de 0 a 2, de modo que a integral iterada dada é igual à integral dupla na região triangular R.

Para inverter a ordem de integração, consideramos R como uma região do tipo I.

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\,dx\,dy = \iint_R e^{x^2}\,dA = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[e^{x^2} y\right]_0^{2x} dx = \int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2}\Big]_0^1 = e-1$$

Área calculada como uma integral dupla

$$\text{área de } R = \iint_R 1\,dA = \iint_R dA$$

A fórmula pretende equacionar somente os valores numéricos da área e do volume, e não as unidades, que, naturalmente, devem ser diferentes.

/ /

EXEMPLO 5

Use uma integral dupla para calcular o volume do tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $z = 4 - 4x - 2y$.

O tetraedro é limitado pelo plano $z = 4 - 4x - 2y$, acima. Abaixo, pela região triangular. O volume é dado por

$$\iint_R (4 - 4x - 2y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (4 - 4x - 2y)\, dy\, dx$$

$z = 4 - 4x - 2y$
$0 = 4 - 4x - 2y$
$-2y = -4 + 4x$
$y = 2 - 2x$
$0 = 2 - 2x$
$2x = 2$
$x = 1$

$$= \int_0^1 4y - 4xy - y^2 \Big]_0^{2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 4(2-2x) - 4x(2-2x) - (2-2x)^2\, dx$$

$$= \int_0^1 8 - 8x - 8x + 8x^2 - (4 - 8x + 4x^2)\, dx$$

$$= \int_0^1 4x^2 - 8x + 4\, dx = \frac{4x^3}{3} - 4x^2 + 4x \Big]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} - 4 + 4 = \frac{4}{3}$$

EXEMPLO 6

Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e os planos $y + z = 4$ e $z = 0$

$y + z = 4$
$z = 4 - y$ região
$x^2 + y^2 = 4$
$y^2 = \sqrt{4 - x^2}$
$y = \sqrt{4 - x^2}$

$$\iint 4 - y\, dy\, dx$$

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\, dy\, dx = \int_{-2}^{2} \left[4y - \frac{1}{2} y^2 \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}$$

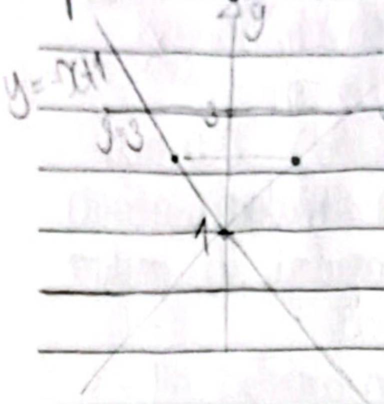
$$= \int_{-2}^{2} 8\sqrt{4 - x^2}\, dx = 8(2\pi) = 16\pi$$

Pauta Branca

EXEMPLO 4

Calcule $\iint_R (2x-y^2)\,dA$ na região triangular R compreendida pelas retas $y=-x+1$, $y=x+1$ e $y=3$

Tipo II



$$\int_1^3\int_{1-y}^{y-1} (2x-y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^3 \left[x^2 - xy^2\right]_{1-y}^{y-1} dy$$

$$= \int_1^3 [(y-1)^2-(y-1)y^2] - [(1-y)^2-(1-y)y^2]\,dy$$

$y=-x+1 \Rightarrow x=1-y$

$y=x+1 \Rightarrow x=y-1$

$$= \int_1^3 2y^2-2y^3\,dy = \frac{2y^3}{3}-\frac{y^4}{2}\Big]_1^3$$

$$= \left(\frac{2\cdot 3^3}{3}-\frac{3^4}{2}\right) - \left(\frac{2\cdot 1^3}{3}-\frac{1^4}{2}\right) = 18-\frac{81}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2} = \frac{108-243-4+3}{6}$$

$$= -\frac{136}{6} = -\frac{68}{3}$$

Tratando R como região do tipo I devemos decompor a região em duas partes, R_1 e R_2.

$$\iint_R (2x-y^2)\,dA = \iint_{R_1} (2x-y^2)\,dA + \iint_{R_2} (2x-y^2)\,dA$$

$$= \int_{-2}^{0}\int_{-x+1}^{3} (2x-y^2)\,dy\,dx + \int_0^2\int_{x+1}^{3} (2x-y^2)\,dy\,dx.$$

Isto fornecerá o mesmo resultado que foi obtido no Exemplo 4.