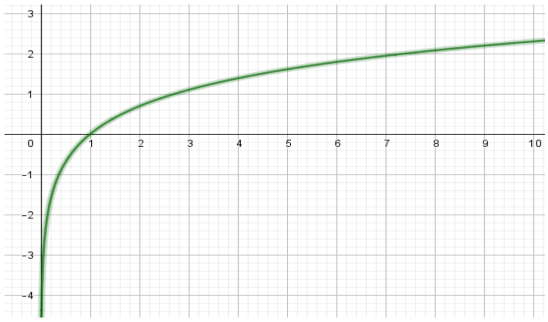
A5 : Logarithme népérien

I/ Définition et propriétés :

Définition et courbe représentative :

Cette fonction tire son nom du mathématicien John Napier (1550 – 1617). Le but de cette fonction est de pouvoir transformer les produits en somme.



- Son expression est donc : *f(x) = ln(x)*.
- Cette fonction est définie sur]0 ; +∞[.
- Elle est strictement croissante.
- Elle s'annule en 1. Donc ln(1) = 0
- ln (e) = 1
- Pour tout *x* de]0 ; +∞[et pour tout y de $\mathbb{R}$:

$\ln x = y \Longleftrightarrow e^y = x$

- On admettra que :

$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} l\,n(x) = +\infty$

Propriétés de calcul :

On retiendra trois propriétés de calcul, avec a et b > 0 :

- $ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^b) = b \times \ln(a)$

Résolution d'équation à l'aide des propriétés de base :

On admettra que *ln(a) = ln(b)* ↔ *a = b*, cette propriété ajoutée aux précédente permet la résolution de nombreuses équations. On fera tout de même attention lorsque l'on utilise la fonction *ln*. En effet on ne peut calculer des logarithmes que de nombres positifs. Il faudra donc s'assurer que ce soit bien toujours le cas.

Exemple : Résoudre les équations suivantes :

$ln(x) + ln(2) = 0$	$2 - e^{x+3} = 0$	$2ln(x) - 1 = 1$
$ln(2x) = 0$	$2 = e^{x+3}$	$2ln(x) = 2$
$ln(2x) = ln(1)$	$ln(2) = ln(e^{x+3})$	$ln(x) = 1$
$2x = 1$	$ln(2) = x + 3$	$ln(x) = ln(e)$
$x = ½$	$x = ln(2) - 3$	$x = e$

II/ Dérivée et primitives :

La dérivée de *ln(x)* sur]0 ; +∞[est $\frac{1}{x}$

Exemple d'étude de fonction :
Soit la *f*, la fonction définie sur]0 ; +∞[par :
f(x) = 2x – 2 – 4ln(x)

Calcul de *f '* :

$$f'(x) = 2 - 4 \times \frac{1}{x} = 2 - \frac{4}{x}$$

Simplification de l'écriture de *f '* :

$$f'(x) = \frac{2 \times x}{x} - \frac{4}{x} = \frac{2x - 4}{x}$$

Etude du signe de *f '* :
Sur]0 ; +∞[on sait que *x > 0*

$2x - 4 > 0$

$2x > 4$

$x > 2$

Tableau de signe de *f '* et variations de *f*.

x	0		2		$+\infty$
x		$+$	$+$	$+$	
$2x-4$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2-4ln(2)$	↗	$+\infty$

$$\lim_{x \to 0} 2x - 2 - 4\ln(x) = +\infty$$

Car $x \rightarrow 0$ donc $2x - 2 \rightarrow -2$ et $ln(x) \rightarrow -\infty$ donc $-4\ ln(x) \rightarrow +\infty$.

$f(2) = 2\times2 - 2 - 4ln(2) = 2 - 4ln(2)$

$$\lim_{x \to +\infty} 2x - 2 - 4\ln(x) = +\infty$$

Car $x \rightarrow +\infty$ donc $2x - 2 \rightarrow +\infty$ et $ln(x) \rightarrow +\infty$

III/ Liens entre *ln(x)* et *log(x)*.

Il existe d'autres bases de logarithmes. En science pour le son ou le calcul du pH on utilise un log de base 10. Il a les même caractéristiques que le logarithme népérien mais ici c'est $log(10) = 1$.

On admettra que, $\forall\ x \in]0\ ;\ +\infty[$:

$$log(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}$$