CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Índice:

1. Continuidad de funciones.

Decimos que la función $f(x)$ **es continua en un punto c**, cuando existe $\lim_{x\to c} f(x)$ y se cumple $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$.

 # Ejemplo.-

- *La función* $f(x)=\frac{1}{x}$ *, no es continua en* $x=0$ *, ya que en este punto ni está definido* $f(0)$ *, ni existe el límite.*

La definición de continuidad de f en un punto c, equivale a las siguientes condiciones:

- Existe $f(c)$
- Existe $\lim_{x\to c} f(x)$
- Los dos valores anteriores coinciden: $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

 # Ejemplo.-

- *La función* $f(x)=2x+3$ *es continua en* $x=1$ *, ya que existen* $f(1)=5$ *,* $\lim_{x\to 1} f(x)=5$ *y los dos valores coinciden.*

CONTINUIDAD LATERAL.

Decimos que la función $f(x)$ es continua por la izquierda en el punto c, cuando existe $\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c:x<c} f(x)$ y se cumple . $\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$

Decimos que la función $f(x)$ es continua por la derecha en el punto c, cuando existe $\lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{x\to c:x>c} f(x)$ y se cumple . $\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$

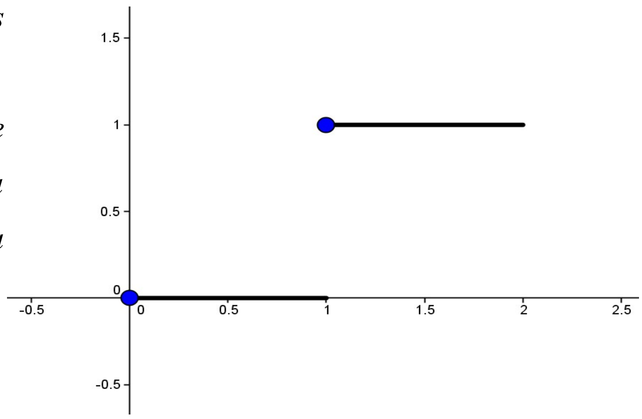
 # Ejemplos.-

- *La función* $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si \quad x\leq 1 \\ x^2 & si \quad x>1 \end{cases}$ *es continua en x = 1, ya que* $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2x-1=1=\lim_{x\to 1^+} x^2=\lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=1$ *y como* $f(1)=2,1-1=1$ *,* $f(x)$ *es continua en* $x=1$ *.*

- *La función* $f(x)=[x]$ *(parte entera de x), es continua por la derecha en* $x=1$ *, pero discontinua por la izquierda, ya*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=0\neq f(1)=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=1$$



CONTINUIDAD EN UN INTERVALO.

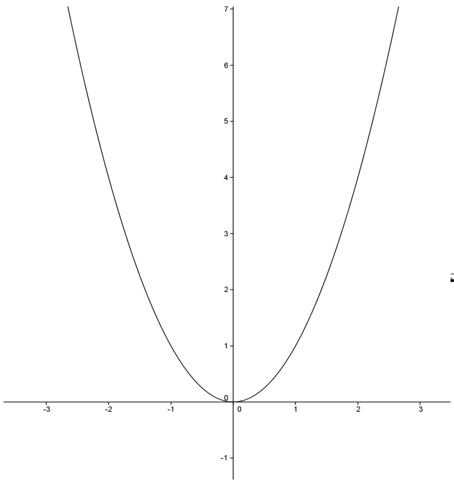
La función $f(x)$ es continua en un intervalo (a, b) si lo es en cada uno de sus puntos.

La función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$ si lo es en cada uno de sus puntos de (a, b), y además, es continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

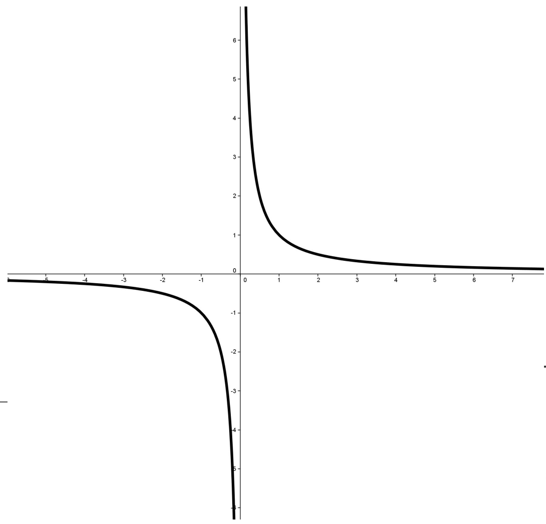
 # Ejemplo.-

- *Si observamos las gráficas de las funciones* $f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=[x]$, *vemos que* $f(x)$ *es continua en cualquier intervalo real,* $g(x)$ *no es continua en* $[-1,1]$ *, ya que* $g(x)$ *no está definida en* $x=0$ *, y la función* $h(x)$ *tampoco es continua en el intervalo* $[0,2]$ *, puesto que es discontinua en* $x=1$.

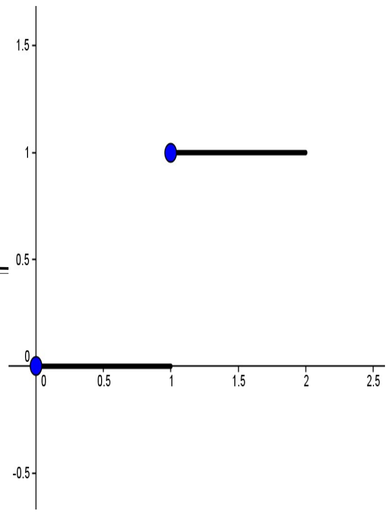
$f(x)$



$g(x)$



$h(x)$



Una función es continua en todo su dominio si lo es en todos sus puntos que lo componen.

Una función que es continua en todo valor real, diremos que es continua en $\mathbb{R}$, o simplemente que es continua.

DEFINICIÓN MÉTRICA DE CONTINUIDAD

La función $f(x)$ **es continua en un punto c**, cuando para cualquier valor real positivo ϵ , existe un valor real $\delta > 0$ tal que $|f(x)-f(c)|<\epsilon \Rightarrow |x-c|<\delta$

 # Ejemplo.-

$f(x)=3x-4$ *es continua en* $x=3$ *, ya para cualquier* $\epsilon>0$ *tal que*

$$|f(x)-f(3)|<\epsilon \Rightarrow |(3x-4)-(3.3-4)|=|3x-9|<\epsilon$$
$$\Rightarrow -\epsilon<3(x-3)<\epsilon \Rightarrow -\frac{\epsilon}{3}<x-3<\frac{\epsilon}{3} \Rightarrow |x-3|<\frac{\epsilon}{3}=\delta$$

Así por ejemplo para $\epsilon=0{,}003$ *, será* $\delta=0{,}001$

2. Discontinuidades

Teniendo en cuenta, que si una función $f(x)$ está definida en el entorno simétrico de un punto c, entonces $f(x)$ es continua en $x=c$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$. Una función es discontinua en un punto $x=c$ cuando se cumple una de las dos condiciones siguientes

$$\lim_{x\to c} f(x)\neq f(c) \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to c^-} f(x)\neq \lim_{x\to c^+} f(x)$$

$f(x)$ tiene una **discontinuidad evitable** en $x=c$, cuando existe $\lim_{x\to c} f(x)$ y existe $f(c)$, y se cumple $\lim_{x\to c} f(x)\neq f(c)$ **.**

 # Ejemplo.-

- *La función* $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\, x\neq 1 \\ 1 & si\, x=1 \end{cases}$ *tiene una discontinuidad evitable en* $x=1$ *, de valor verdadero* $\lim_{x\to 1} f(x)=0$

$f(x)$ tiene una **discontinuidad inevitable** (***de primera especie***) en $x=c$, cuando existe $\lim_{x\to c^-} f(x)$ y $\lim_{x\to c^+} f(x)$, y se cumple $\lim_{x\to c} f(x)\neq f(c)$ **.**

Además

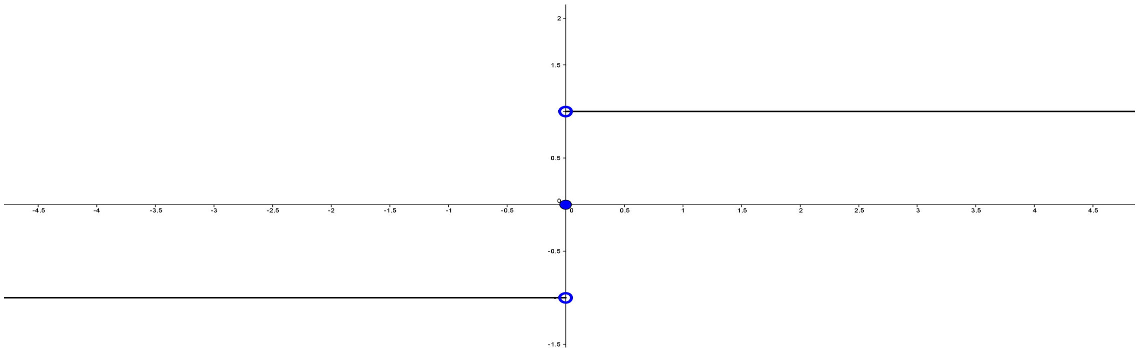
Si $\lim_{x\to c^-} f(x)$ y $\lim_{x\to c^+} f(x)$ son finitos, decimos que $f(x)$ tiene en c **un salto finito**

Si alguno de los límites laterales de $f(x)$ en c es infinito, o los dos son infinitos, pero de distinto signo, decimos que $f(x)$ tiene en c **un salto infinito**

$f(x)$ tiene una **discontinuidad inevitable** (***de segunda especie***) en $x=c$, cuando no existe $\lim_{x\to c} f(x)$

 # Ejemplos.-

- *La función* $f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x>0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ -1 & si \quad x<0 \end{cases}$ *es una función de discontinuidad inevitable en* $x=0$ *. El salto de la función en* $x=0$ *es 2.*



 # Ejemplo.- La función es $f(x)=\frac{1}{x}$ *es una función de discontinuidad inevitable en* $x=0$. *El salto de la función* $x=0$ *es* ∞ .

3. Operaciones con funciones continuas

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un punto c , se cumple:

$$(f+g)(x) \ , \ (f-g)(x) \ , \ (f.g)(x) \ \text{y} \ \frac{f(x)}{g(x)} si\, g(x)\neq 0 \quad \text{son continuas en c}$$

 # Ejemplo.- La función $f(x)=3.x+2$ *es continua en* $x=1$ *, ya que es suma de funciones continuas en* $x=1$.

- Si $f(x)$ es continua en c y $g(x)$ es continua en $f(c)$, entonces $(g\, o\, f)(x)$ es continua en c.

 # Ejemplo.- Como la función $f(x)=x^2+1$ *es continua en* $x=1$ *, y la función* $g(x)=2^x$ *es continua en* $f(1)=2$ *, la función* $(g\, o\, f)(x)=g(f(x))=g(2x^2+1)=2^{x^2+1}$ *es continua en* $x=1$

4. Propiedades locales de las funciones continuas

Teorema del conservación del signo

Si $f(x)$ es continua en a, y $f(a)\neq 0$, entonces existe un entorno de a, $(x-\delta, x-\delta)$ en el que la función tiene el mismo signo que $f(a)$, es decir:

$$signo(f(x))=signo(f(a)), \forall x\in(x-\delta, x-\delta)$$

Como consecuencia de este teorema, si una función $f(x)$ es continua en un punto a, y toma valores positivos y negativos en cualquier entorno de a, entonces $f(a)=0$.

Cotas superiores e inferiores. Acotación.

- $f(x)$ está acotada inferiormente cuando existe un número real k tal que $k\leq f(x)$ para todo x del Dominio de la función. Al número k se le denomina cota inferior. Es decir:

  $f(x)$ está **acotada inferiormente** $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}/k\leq f(x), \forall x\in Dom(f)$

- $f(x)$ está acotada superiormente cuando existe un número real k tal que $f(x)\leq k$ para todo x del Dominio de la función. Al número k se le denomina cota superior. Es decir:

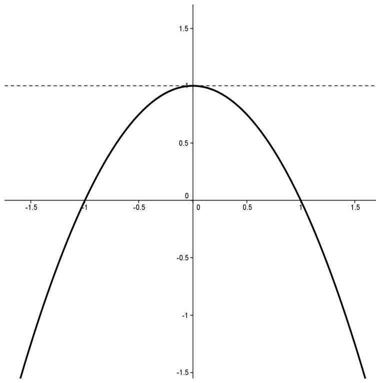
  $f(x)$ está **acotada superiormente** $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}/f(x)\leq k, \forall x\in Dom(f)$

- Una función $f(x)$ está acotada, si está acotada inferiormente y superiormente. Es decir:

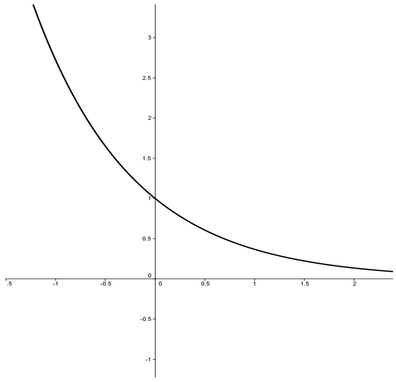
  $f(x)$ está **acotada** $\Leftrightarrow \exists k, l\in\mathbb{R}/k\leq f(x)\leq l, \forall x\in Dom(f)$

 # Ejemplo.- Dadas las funciones $f(x)=-x^2+1$; $g(x)=e^{(-x)}$; $h(x)=sen\,x$, *tenemos que f es una función acotada superiormente; g es una función acotada inferiormente; y h(x) es una función acotada.*

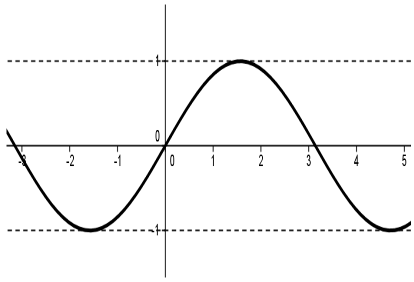
$f(x)$



$g(x)$



$h(x)$



Teorema de acotación

Si $f(x)$ es una función continua en a, entonces existe un entorno de a, en que la función está acotada,

 # Ejemplo.- Calculemos la cota superior e inferior de la función $f(x)=4x-3$ *es un entorno del punto* $x=2$ *de radio 0,5. En primer lugar tenemos que* $f(2)=4.2-3=5$.

Como $f(x)$ *es una función creciente, resulta que* $f(2-0{,}5)<f(2)<f(2+0{,}5)$.

Luego tenemos que: $f(1{,}5)<f(2)<f(2{,}5)\Rightarrow 3<f(2)<7$.

Por tanto $f(x)$ *está acotada superiormente por* $k=7$ *e inferiormente por* $L=3$ *para los valores de* $x\in(1{,}5;2{,}5)$ *. Así,* $f(x)$ *está acotada en este entorno de* $x=2$.

5. Teorema de Bolzano

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado [a,b], y toma valores de signo opuesto en los extremos, entonces existe al menos un punto interior c en el intervalo tal que $f(c)=0$.

 # Ejemplo.- La función $f(x)=x^3+x^2-7x+1$ *corta al eje de abcisas en el intervalo* $(0,1)$ *, ya que f es continua en* $[0,1]$ *y se cumple* $signo\,f(0)=signo\,f(1)$.

Teorema del valor intermedio o Propiedad de Darboux

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado [a,b], y k es un número real comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe, al menos, un $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=k$.

 # Ejemplo.- La función $f(x)=6-2x^2$ *toma valores comprendidos entre* -12 *y* 4 *en el intervalo* $[1,3]$ *.*

Como $f(1)=4$ *,* $f(3)=-12$ *y* $f(x)$ *es continua en* $[1,3]$ *, por el teorema del valor intermedio resulta que* $f(x)$ *toma todos los valores comprendidos entre* -12 *y* 4 *al menos una vez en el intervalo* $(1,3)$ *.*

6. Teorema de acotación y de Weierstrass

Extremos. Máximo y mínimo absolutos.

- Se denomina **extremo superior** de una función $f(x)$ a la mínima de sus cotas superiores. Si este valor lo alcanza la función, se llama **máximo absoluto**.
- Se denomina **extremo inferir** de una función $f(x)$ a la máxima de sus cotas inferiores. Si este valor lo alcanza la función, se llama **mínimo absoluto**.

 # Ejemplo.- Los números $1,\sqrt{(2)},\frac{3}{2,}3,\ldots$ *son cotas superiores de* $f(x)=-x^2+1$ *. Sin embargo, de todas las posibles cotas superiores de esta función la mínima es 1, luego 1 es extremo superior de* $f(x)$ *. Además, como* $f(0)=1$ *, para* $x=0$ *, la función alcanza un máximo absoluto.*

 # Ejemplo.- Los números $\ldots,-3,-\sqrt{(2)},-1,-\frac{1}{2,}0$ *son cotas inferiores de* $g(x)=e^{(-x)}$ *Sin embargo, de todas las posibles cotas inferiores de esta función la máxima es 0, luego 0 es extremo inferior de* $g(x)$ *.*

Teorema de acotación

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces la función está acotada en dicho intervalo, Sin embargo, no significa que una función acotada en un intervalo $[a,b]$ sea continua.

 # Ejemplo,- La función $f(x)=\begin{Bmatrix}-1\; si\, x\leq 0\\ +1\; si\, x>0\end{Bmatrix}$ *es una función acotada en el intervalo* $[-1,1]$ *, sin embargo no es continua.*

Teorema de Weierstrass

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f tiene máximo y mínimo en ese intervalo.

 # Ejemplo.- La función $h(x)=sen\,x$ *, cumple las condiciones del teorema de Weierstrass en el intervalo* $[0,2\pi]$ *, ya que es continua y está definida en dicho intervalo. Además, h tiene un máximo en el punto* $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ *y un mínimo en* $\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$ *.*

La imagen de un intervalo cerrado por una función continua es un intervalo cerrado.

 # Ejemplo.- La imagen de la función $f(x)=\cos x$ *definida en el intervalo* $[0,2\pi]$ *es [-1,1]*