Teoría – Tema 5

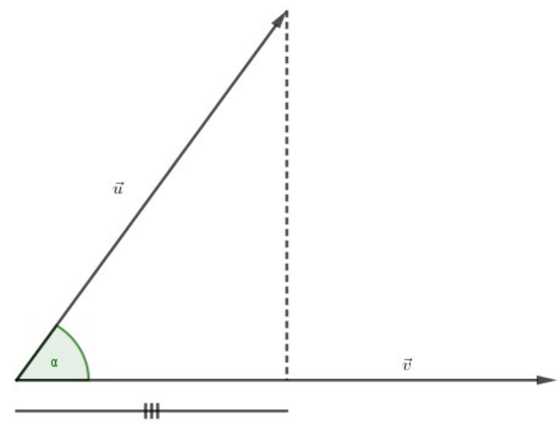
Teoría - 5 - Proyección ortogonal. Definición de producto escalar

Proyección ortogonal de un vector sobre otro

El término ortogonal es sinónimo de perpendicular. Por lo que proyectar ortogonalmente un vector sobe otro implica realizar una proyección perpendicular.

Sea el vector $\vec{u}$ y el vector $\vec{v}$ de la imagen de la derecha. Proyectar ortogonalmente $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ es como si iluminásemos con una linterna de manera perpendicular a $\vec{v}$ y obtuviéramos la sombra generador por el vector $\vec{u}$.

El ángulo formado por los dos vectores siempre se elige el más pequeño posible (en el intervalo 0º y 180º), siendo positivo por sentido antihorario.



$Proyección\ de\ \vec{u}\ sobre\ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot cos(\alpha)$

Producto escalar de dos vectores

Se llama producto escalar de dos vectores no nulos, al número real resultante de multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$ → la proyección ortogonal multiplicada por el módulo del segundo vector

Importante: **el resultado del producto escalar es un número real**, no un vector. Este producto escalar cumple las siguientes propiedades:

- **Propiedad conmutativa →** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

  Demostremos esta propiedad, recordando que si α es el ángulo que forma en sentido antihorario $\vec{u}$ con $\vec{v}$, diremos que $-\alpha$ es el ángulo que forma en sentido horario $\vec{v}$ con $\vec{u}$.

  $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$

  $\vec{v}\cdot\vec{u}=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(-\alpha)=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\alpha)$

  Donde hemos aplicado que la función coseno es una función par. Y como el producto de número reales es conmutativo, podemos igualar:

  $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\alpha)$

- **Propiedad asociativa mixta →** $(\lambda\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

  Demostremos esta propiedad, considerando los siguientes casos:

  Si $\lambda=0$ → $0=0$ → se cumple la igualdad

  Si $\lambda>0$ → $(\lambda\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=|\lambda\cdot\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)=|\lambda|\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$ → Y como el módulo de un número positivo es ese mismo número llegamos al resultado final que demuestra la igualdad → $|\lambda|\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)=\lambda\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)=\lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$

  Si $\lambda<0$ --> $(\lambda\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=|\lambda\cdot\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(180º-\alpha)$ → Ya que el signo negativo de λ hace que el vector $\vec{u}$ cambie de sentido, por lo que cambia el ángulo que forman los dos vectores. Recordamos que el coseno de un ángulo cambia de signo si sumamos 180º a ese ángulo.

  Y recordamos que el módulo de un número negativo es ese número cambiado de signo. De esta forma obtenemos la siguiente igualdad:

  $|\lambda\cdot\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(180º-\alpha)=|\lambda|\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot(-\cos(\alpha))=\lambda\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)=\lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$

- **Propiedad distributiva →** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

- **Propiedad positiva →** $\vec{u}\cdot\vec{u}>0$ si $\vec{u}\neq\vec{0}$

  El producto escalar de cualquier vector no nulo por si mismo, es un número positivo.

  Demostración → $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(0º)=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|=|\vec{u}|^2>0$ → Como el vector no es nulo, su módulo es positivo; y el cuadrado de un número no nulo siempre es positivo.

Si tenemos dos vectores perpendiculares, la proyección ortogonal de uno de ellos sobre el otro valdrá cero (ya que “la sombra” que genera un vector sobre otro es nula). Por lo tanto, **el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero**.

$$\vec{u}\neq 0,\ \vec{v}\neq 0 \quad \text{y} \quad \vec{u}\perp\vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(90^{\circ})=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot 0 \quad \rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

Sobre este resultado volveremos más adelante, cuando estudiemos una segunda expresión para el producto escalar. Y nos permitirá estudiar fácilmente la perpendicularidad no solo en vectores de dos dimensiones.