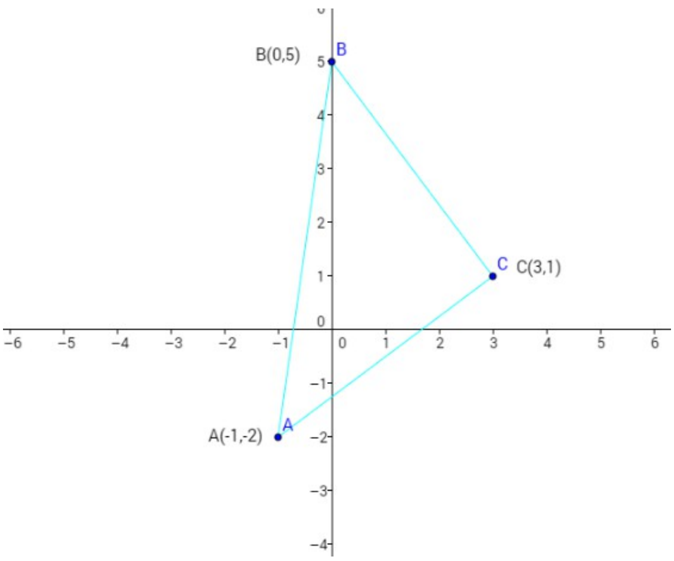
Problemas – Tema 6

Problemas resueltos - 6 - puntos y rectas notables de un triángulo

1. ¿Qué clase de triángulo determinan los puntos $A(-1,-2), B(0,5), C(3,1)$? Halla la mediana del lado $\overline{BA}$ (unión del punto medio del lado con el vértice opuesto). Calcula su área.

En primer lugar, para ver la clase de triángulo que determinan estos puntos, vamos a representarlo gráficamente.



$$\vec{AB}=(1,7) \quad \rightarrow \quad |\vec{AB}|=\sqrt{50}$$

$$\vec{AC}=(4,3) \quad \rightarrow \quad |\vec{AC}|=\sqrt{25}=5$$

$$\vec{BC}=(3,-4) \quad \rightarrow \quad |\vec{BC}|=\sqrt{25}=5$$

Al poseer dos lados de igual longitud, y el tercero distinto, estamos ante un triángulo isósceles.

Además el siguiente producto escalar es nulo → $\vec{AC}\cdot\vec{BC}=12-12=0$ → El triángulo es rectángulo en el vértice $\hat{C}$.

El punto medio del segmento $\overline{BA}$ es $P.M.(\overline{BA})=(\frac{-1}{2},\frac{3}{2})$. Y la mediana que buscamos pasa por este punto medio y por el vértice $C(3,1)$. Teniendo dos puntos, podemos calcular la ecuación de la recta solución.

$$r:\frac{y-1}{x-3}=\frac{1-\frac{3}{2}}{3+\frac{1}{2}} \quad\rightarrow\quad r:\frac{y-1}{x-3}=\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{7}{2}} \quad\rightarrow\quad r:\frac{y-1}{x-3}=\frac{-1}{7} \quad\rightarrow\quad r:y=-\frac{x}{7}+\frac{10}{7}$$

$r: x+7y-10=0$ → ecuación general de la recta mediana

El área del triángulo, al ser rectángulo, podemos calcularla como:

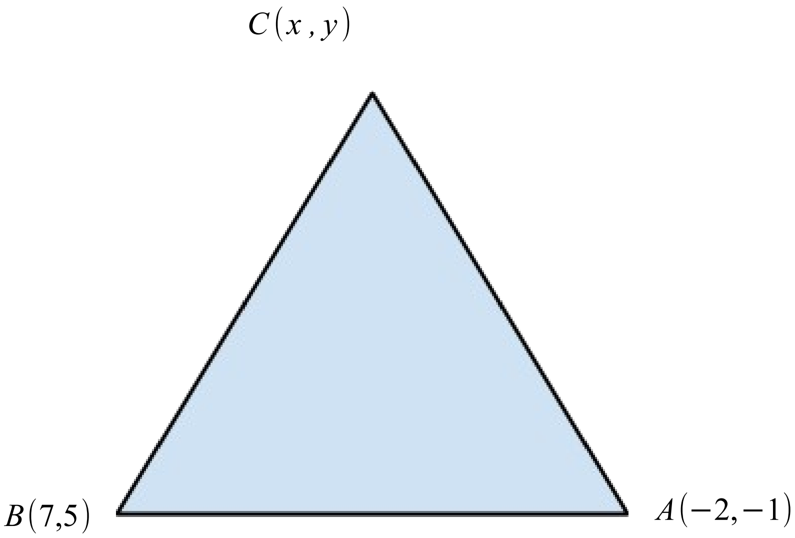
$$A=\frac{|\vec{AC}|\cdot|\vec{BC}|}{2}=\frac{25}{2}\ u^2$$

2. Los vértices de un triángulo son $A(-2,-1), B(7,5)$ y $C(x,y)$.

a) Calcular el área del triángulo en función de x e y .

b) Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x,y) tales que la anterior área sea 36 u^2.

a) Hacemos un dibujo ilustrativo con los datos del enunciado.



Hallamos el vector que une los puntos A y B .

$$\vec{AB}=(7-(-2),5-(-1))=(9,6)$$

El módulo de este vector será la base de nuestro triángulo.

$$base=|\vec{AB}|=\sqrt{9^2+6^2}=\sqrt{117}$$

La altura h es la distancia del punto $C(x,y)$ a la recta que pasa por $A(-2,-1)$ y $B(7,5)$. Calculamos la ecuación de esta recta, sabiendo que pasa por $A(-2,-1)$ y que un vector director es $\vec{AB}=(9,6)$.

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y} \rightarrow \frac{x-(-2)}{9}=\frac{y-(-1)}{6} \rightarrow 2x-3y+1=0$$

De esta forma tenemos la ecuación implícita de la recta $r: Ax+By+C=0$. Dado un punto $C(x,y)$ exterior a la recta, su distancia respecto la recta es:

$$d(C,r)=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2x-3y+1|}{\sqrt{13}}=altura$$

Por lo tanto el área del triángulo podemos calcularla como:

$$Área=\frac{1}{2}\cdot base\cdot altura=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{117}\cdot\frac{|2x-3y+1|}{\sqrt{13}} \rightarrow Área=\frac{3}{2}|2x-3y+1|$$

b) Si el área es igual a 36 unidades cuadradas, igualamos la expresión anterior a 36.

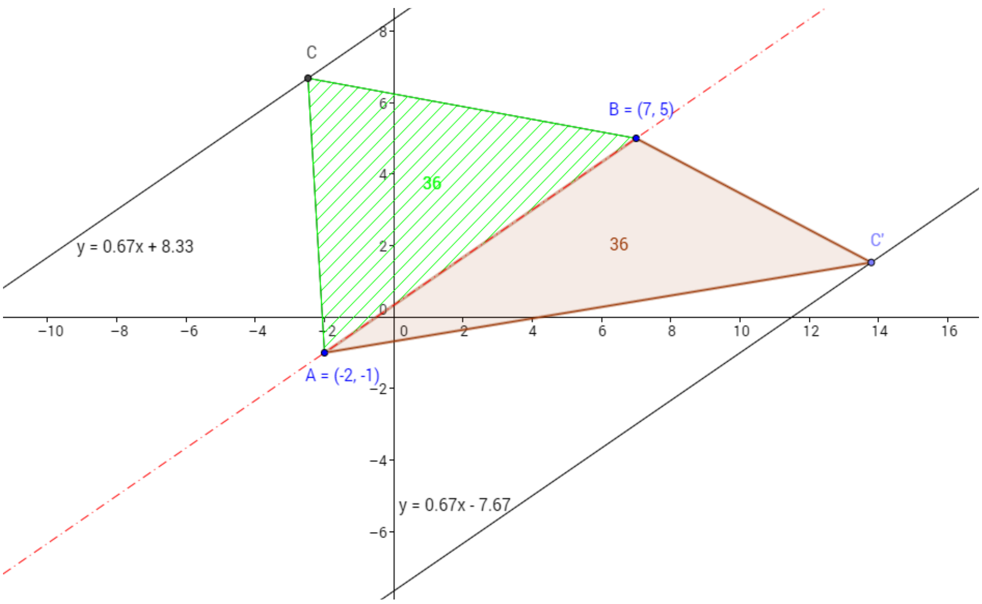
$$\frac{3}{2}|2x-3y+1|=36 \rightarrow |2x-3y+1|=24$$

Como la función contenida en el valor absoluto debe ser igual a ± 24 , tendremos dos opciones.

$$2x-3y+1=24 \rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{23}{3}$$

$$2x-3y+1=-24 \rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{25}{3}$$

$$Los\ puntos\ (x,y)\ de\ las\ rectas\ solución\ generan\ triángulos\ de\ área\ 36\ u^2$$



3. Sea un triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(8,-10)$ y $C(4,6)$. Obtener:

a) Circuncentro (punto de intersección de las mediatrices).

b) Ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo, con centro en el circuncentro y radio igual a la distancia del circuncentro a uno de los vértices del triángulo.

a) Para obtener el circuncentro basta con obtener la intersección de dos de las mediatrices del triángulo.

En primer lugar obtenemos el punto medio del lado de vértices $A(0,0)$ y $B(8,-10)$.

$$D=PM\left(\overline{AB}\right)=(4,-5)$$

La recta r que une los vértices $A(0,0)$ y $B(8,-10)$ tiene por ecuación:

$$r:\frac{-10-0}{8-0}=\frac{y-0}{x-0} \rightarrow r:y=\frac{-5}{4}x \rightarrow m_r=\frac{-5}{4}$$

Por lo tanto, una recta perpendicular a r será $r_{perpendicular}$ y tendrá por pendiente:

$$m_r \cdot m_{r_{perpendicular}}=-1 \rightarrow m_{r_{perpendicular}}=\frac{4}{5}$$

Si esta recta $r_{perpendicular}$ pasa por el punto medio $D(4,-5)$ calculado anteriormente, tendremos la mediatriz del lado de vértices $A(0,0)$ y $B(8,-10)$. Podemos expresar su ecuación punto-pendiente de la forma:

$$r_{perpendicular}:\frac{4}{5}=\frac{y+5}{x-4}$$ → Mediatriz del lado de vértices $A(0,0)$ y $B(8,-10)$

Repetimos el mismo razonamiento para el lado de vértices $A(0,0)$ y $C(4,6)$.

El punto medio de este lado será:

$$E=PM\left(\overline{AC}\right)=(2,3)$$

La recta s que une los vértices $A(0,0)$ y $C(4,6)$ tiene por ecuación:

$$s:\frac{6-0}{4-0}=\frac{y-0}{x-0} \rightarrow s:y=\frac{3}{2}x \rightarrow m_s=\frac{3}{2}$$

Por lo tanto, una recta perpendicular a s será $s_{perpendicular}$ y tendrá por pendiente:

$$m_s \cdot m_{s_{perpendicular}} = -1 \quad \rightarrow \quad m_{s_{perpendicular}} = \frac{-2}{3}$$

Si esta recta $s_{perpendicular}$ pasa por el punto medio $E(2,3)$ calculado anteriormente, tendremos la mediatriz del lado de vértices $A(0,0)$ y $C(4,6)$. Podemos expresar su ecuación punto-pendiente de la forma:

$$s_{perpendicular} : \frac{-2}{3} = \frac{y-3}{x-2} \rightarrow \text{Mediatriz del lado de vértices } A(0,0) \text{ y } C(4,6)$$

El circuncentro será la intersección de las dos mediatrices calculadas.

$$\begin{Bmatrix} \frac{4}{5} = \frac{y+5}{x-4} \\ \frac{-2}{3} = \frac{y-3}{x-2} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 4x-16=5y+25 \\ -2x+4=3y-9 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 4x-41=5y \\ -2x+13=3y \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{4x-41}{5} = y \\ \frac{-2x+13}{3} = y \end{Bmatrix}$$

Resolvemos por igualación:

$$\frac{4x-41}{5} = \frac{-2x+13}{3} \rightarrow 12x-123=-10x+65 \rightarrow 22x=188 \rightarrow x = \frac{188}{22} = \frac{94}{11}$$

$$y = \frac{4x-41}{5} \rightarrow y = \frac{4\frac{94}{11}-41}{5} \rightarrow y = \frac{376-451}{55} = \frac{-75}{55} = \frac{-15}{11}$$

Por lo tanto el circuncentro tiene por coordenadas: $C_C = (\frac{94}{11}, \frac{-15}{11})$

b) La circunferencia circunscrita está centrada en el circuncentro $C_C = (\frac{94}{11}, \frac{-15}{11})$. Y el radio es la distancia del circuncentro a uno de los vértices. Lo más sencillo es obtener la distancia del centro al vértice $A(0,0)$.

$$d(C_c, A) = r = \sqrt{\frac{9061}{121}}$$

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia resulta:

$$\left(x - \frac{94}{11}\right)^2 + \left(y + \frac{15}{11}\right)^2 = \frac{9061}{121}$$

Circunferencia circunscrita