Problemas sobre Teorema del Resto y Regla de Ruffini

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach CCSS	Repaso 4ºESO	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Factoriza:

a) $\boldsymbol{P(x) = 6x^4 - x^3 - 22x^2 + 11x + 6}$ **.**

b) $\boldsymbol{P(x) = 12x^4 - 5x^3 - \frac{2x^2}{3} + \frac{x}{3}}$ **.**

a) Vamos a factorizar por Ruffini. Los números candidatos a ser solución son los divisores del término independiente y/o los divisores del término independiente divididos entre los divisores del coeficiente del término de mayor grado del polinomio (esto último será muy útil para los casos en que existan raíces racionales).

Las raíces del polinomio son los valores $x = 1, x = -2, x = \frac{-1}{3}, x = \frac{3}{2}$. Sin olvidar el coeficiente que acompaña al término de mayor grado:

$$P(x) = 6(x - 1)(x + 2)(x + \frac{1}{3})(x - \frac{3}{2})$$

b) Aplicando Ruffini, las raíces son: $x = 0$, $x = \frac{-1}{4}$, $x = \frac{1}{3}$ (raíz doble). ¡Ojo al coeficiente líder del polinomio!

$$P(x) = 12x(x - \frac{1}{3})^2(x + \frac{1}{4})$$

PROBLEMA 2

Calcula el m.c.m y el M.C.D. de los siguientes polinomios:

$\boldsymbol{P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4}$

$\boldsymbol{Q(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 13x + 10}$

Factorizando por Ruffini:

$P(x) = (x + 1)^3(x - 2)^2$

$Q(x) = (x + 1)^2(x - 2)(x - 5)$

Para el m.c.m tomamos los comunes y no comunes con mayor exponente.

$m.c.m. = (x + 1)^3(x - 2)^2(x - 5)$

Para el M.C.D. tomamos los comunes con menor exponente.

$M.C.D. = (x + 1)^2(x - 2)$

PROBLEMA 3

Opera y simplifica $\left(\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^2-1}:\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}\right)\frac{1}{x^2-9}$.

Aplicamos Ruffini en el numerador de la primera fracción.

	1	-5	3	9		
3		3	-6	-9		
	1	-2	-3	0	$\rightarrow$	$(x-3)$
3		3	3			
	1	1	0		$\rightarrow$	$(x-3)$
-1		-1				
	1	0			$\rightarrow$	$(x+1)$

Desarrollamos como identidad notable el denominador de la primera fracción:

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

Aplicamos Ruffini en el numerador de la segunda fracción:x^2+2x+1.

	1	2	1		
-1		-1	-1		
	1	1	0	$\rightarrow$	$(x+1)$
-1		-1			
	1	0		$\rightarrow$	$(x+1)$

Aplicamos Ruffini en el denominador de la segunda fracción:

	1	2	-3		
-3		-3	3		
	1	-1	0	$\rightarrow$	$(x+3)$
1		1			
	1	0		$\rightarrow$	$(x-1)$

El numerador de la tercera fracción es simplemente 1.

Desarrollamos como identidad notable el denominador de la tercera fracción:

$$x^2-9=(x-3)(x+3)$$

Sustituimos los factores y simplificamos.

$$\frac{(x-3)(x-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} : \frac{(x+1)(x+1)}{(x+3)(x-1)} \cdot \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

$$\frac{(x-3)(x-3)(x+3)}{(x+1)(x+1)} \cdot \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

$$\frac{x-3}{(x+1)^2}$$

PROBLEMA 4

Opera y simplifica $\frac{(2x^2+x-1)(x-5)+13x+1}{2x^3-3x^2-8x-3}$.

Desarrollamos los paréntesis del numerador $\rightarrow \frac{2x^3-10x^2+x^2-5x-x+5+13x+1}{2x^3-3x^2-8x-3}$

Agrupamos los términos del numerador $\rightarrow \frac{2x^3-9x^2+7x+6}{2x^3-3x^2-8x-3}$

Factorizamos numerador y denominador por la regla de Ruffini.

	2	-9	7	6
3		6	-9	-6
	2	**-3**	**-2**	**0**
2		4	2	
	2	**1**	**0**	

Numerador $\rightarrow 2x^3-9x^2+7x+6=(x-3)(x-2)(2x+1)$

	2	-3	-8	-3
3		6	9	3
	2	**3**	**1**	**0**
-1		-2	-1	
	2	**1**	**0**	

Denominador $\rightarrow 2x^3-3x^2-8x-3=(x-3)(x+1)(2x+1)$

Simplificamos entre numerador y denominador

$$\frac{(x-3)(x-2)(2x+1)}{(x-3)(x+1)(2x+1)} \rightarrow \frac{x-2}{x+1}$$

PROBLEMA 5

Calcula los puntos de corte e la función $g(x)=x^3+2x^2-x-2$ con los ejes de coordenadas. Ayuda: el eje OX se representa por la recta vertical x=0. El eje OY se representa por la recta horizontal y=0.

Para calcular los puntos de corte con el eje de abscisas $y=0$, igualamos a cero la función y aplicamos Ruffini.

	1	2	-1	-2
-2		-2	0	2
	1	0	-1	0
-1		-1	1	
	1	-1	0	
1		1		
	1	0		

Es decir los puntos de corte con el eje OX son: $(-2,0),(-1,0),(1,0)$.

Para poder calcular el punto de corte con el eje de ordenadas realizamos $x=0$.

$x=0 \rightarrow y=-2 \rightarrow$ punto $(0,-2)$

PROBLEMA 6

Halla el valor de k para que al dividir el polinomio $P(x) = x^4 - 2kx^2 + x - 1$ entre $(x-2)$ el resto sea 1.

Por el Teorema del Resto, el valor de un polinomio $P(x)$ evaluado en un valor $x = a$ coincide con el valor del resto de la división de ese polinomio entre $(x-a)$. Aplicado esto a nuestro ejercicio:

$$P(2) = 1$$

$$2^4 - 2k2^2 + 2 - 1 = 1$$

$$16 - 8k = 0$$

$$k = 2$$

PROBLEMA 7

Halla el valor de a y b de forma que el polinomio $P(x) = x^3 - ax^2 + 7x + b$ tenga resto 9 al dividir entre $(x-2)$ y sea divisible por $(x-5)$.

Por el Teorema del Resto, el valor de un polinomio $P(x)$ evaluado en un valor $x = a$ coincide con el valor del resto de la división de ese polinomio entre $(x-a)$. Aplicado esto a nuestro ejercicio:

$$P(2) = 9$$

$$2^3 - a2^2 + 7 \cdot 2 + b = 9$$

$$8 - 4a + 14 + b = 9$$

$$-4a + b = -13$$

Por otro lado, si el polinomio es divisible por $(x-5)$ su resto debe ser igual a 0.

$$P(5) = 0$$

$$5^3 - a \cdot 5^2 + 7 \cdot 5 + b = 0$$

$$125 - 25a + 35 + b = 0$$

$$-25a + b = -160$$

Llegamos a un sistema lineal 2x2:

$$\begin{cases} -4a + b = -13 \\ -25a + b = -160 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, aplicando reducción:

$$21a = 147$$

$$a = 7$$

Quedando el segundo parámetro:

$$-4a + b = -13 \rightarrow si\ a = 7 \rightarrow -28 + b = -13 \rightarrow b = 15$$