Aufgabe 2

a) Es bezeichne X das erreichte Lebensalter der Fischotter. Argumentieren Sie, basierend auf dem Text, wie groß, Ihrer Meinung nach, der Erwartungswert E(X) ist.

b) Wir betrachten 4 Fähen die trächtig geworden sind. Wie viele Otterjunge werden diese zusammen insgesamt, im Schnitt, zur Welt bringen?

c) Fähen ziehen ihre Jungen etwa 1 Jahr auf. Unter der Annahme, dass diese erst nach der Aufzucht erneut trächtig werden und dass etwa 50% der Fähen innerhalb eines Jahres trächtig werden: Wie viele Otterjunge werden dann erwartungsgemäß in einem Jahr geboren, wenn wir eine Grundpopulation von 12 Fähen zugrunde legen?

d) Wie ändert sich die Zahl der Geburten in Aufgabenteil c) wenn wir 4 Jahre betrachten und gleich viele männliche wie weibliche Junge geboren werden? Falls es Ihnen nicht möglich ist, die genaue Zahl zu bestimmen, erläutern Sie das Vorgehen und worauf zu achten ist. Gehen Sie zur einfacheren Berechnung in dieser Aufgabe außerdem davon aus, dass in dieser Zeit keine Fähen versterben.

Lösungsvorschlag

a) *Laut Text: 8 - 12 Jahre. Hier könnte also der Mittelwert 10 Jahre genommen werden. Diese Angabe gilt aber für nicht Jungtiere (geht nicht direkt aus dem Text hervor!), denn wenn nur 15% der Jungtiere älter als 3 Jahre werden, müssen entsprechend sehr viele Fischotter weit über 20 Jahre alt werden(hier sollte man dann stutzig werden), damit der Erwartungswert 10 angenommen wird. Hier ist abzuwägen, ob dies erwähnt wird bei der Behandlung der Aufgabe oder offen gelassen wird.*

b) *2,3 Junge im Schnitt pro Fähe, also* $2{,}3 \cdot 4 = 9{,}2$

c) $0{,}5 \cdot 12 = 6$ *werden trächtig, damit gilt analog zu b)* $2{,}3 \cdot 7{,}2 = 13{,}8$ *Junge werden geboren.*

d) *In dieser Aufgabe geht es darum, dass mehr Fähen hinzu kommen und diese innerhalb der 4 Jahre auch geschlechtsreif werden. Für das erste Jahr gilt nach Aufgabenteil c) 13,8 Junge kamen hinzu. Von diesen werden 50% Fähen sein und diese werden auch geschlechtsreif und dementsprechend trächtig ab dem 3. Jahr.*

	Jahr 0	*Jahr 1*	*Jahr 2*	*Jahr 3*	*Jahr 4*
Fähe	12	12	12	18,9	25,8
Junge	0	13,8	27,6	35,535	51,405

,

wobei durch die Aufgabe genügend Interpretationsspielraum gelassen wird, um auch folgende (etwas einfachere) Tabelle zu erstellen:

	Jahr 1	*Jahr 2*	*Jahr 3*	*Jahr 4*
Fähe	12	12	12	18,9
Junge	0	13,8	27,6	35,535

Aufgabe 3

a) Erstellen Sie zwei Vektoren zur Otterpopulation mit einmal 4 Jungen und 15 Fähen und einmal 2 Jungen und 10 Fähen.

b) Führen Sie die Vektoraddition bei den beiden in a) erstellten Vektoren durch. Wie ist der resultierende neue Vektor zu interpretieren?

c) Führen Sie die skalare Multiplikation des Vektors v aus dem Beispiel mit dem Skalar n = 2 durch. Was bedeutet die skalare Multiplikation mit 2 im Sachzusammenhang zur Fischotterpopulation?

d) Betrachten wir erneut Aufgabe 2d). Erstellen sie für jeden Jahresabschnitt der 4 Jahre einen entsprechenden Vektor, der den jeweils aktuellen Populationsbestand repräsentiert.

Lösungsvorschlag

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \end{pmatrix}$. *Der resultierende Vektor gibt eine neue Otterpopulation an, in der beide vorherigen Otterpopulationen zusammengefasst sind.*

c) *Es gilt:*
$v \cdot n = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}$. *Bei dieser Operation wurde die Beispielpopulation die durch v gegeben war verdoppelt. Und zwar werden sowohl die Anzahl der Jungtiere, als auch der Fähen verdoppelt.*

d) *1. Jahr:* $\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$, *2. Jahr:* $\begin{pmatrix} 13,8 \\ 12 \end{pmatrix}$, *3. Jahr:* $\begin{pmatrix} 27,6 \\ 12 \end{pmatrix}$, *4. Jahr:* $\begin{pmatrix} 35,535 \\ 18,9 \end{pmatrix}$,
5. Jahr: $\begin{pmatrix} 51,405 \\ 25,8 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

a) Es sei $M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ eine Matrix und w $= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Vektor. Führen Sie die Matrix-Vektor Multiplikation M $\cdot$ w durch.

b) Es sei $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Matrix und w $= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Vektor. Führen Sie die Matrix-Vektor Multiplikation M $\cdot$ w durch.

c) Die Matrix in Aufgabenteil b) nennen wir <u>Einheitsmatrix</u>. Erläutern Sie was diese Matrix auszeichnet, insbesondere im Hinblick auf das Matrix-Vektor Produkt mit einem beliebigen Vektor.

Lösungsvorschlag

a) $M_1 \cdot w = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix}$

b) $M_2 \cdot w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) *Die Einheitsmatrix besitzt die Eigenschaft, dass sie bei einem Matrix-Vektor Produkt mit einem beliebigen Vektor, derselbe Vektor erzeugt wird, der an die Matrix multipliziert wurde.*

Bonusfrage: Was ist, wenn mehr Einträge im Vektor v sind, als Spalten in der Matrix A? Was ist im umgekehrten Fall? Überlegen Sie sich was also für Einschränkungen für die Matrix-Vektor Multiplikation gelten muss.

Lösung: *Angenommen wir haben m Spalten und n Einträge im Vektor und es gilt* $n > m$, *so ist die Multiplikation nicht definiert, da wir den m+1 -ten Eintrag des Vektors nicht mehr an die Matrix multiplizieren können. Umgekehrt bei* $m > n$ *haben wir das Problem, dass nicht definiert ist, was mit der n+1 -ten Spalte der Matrix passieren soll.*
Es muss also gelten, dass bei der Matrix-Vektor Multiplikation die Spaltenzahl der Matrix mit der Anzahl der Einträge im Vektor übereinstimmt.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Matrizen gelten als (spalten-) stochastisch?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,6 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$

Lösungsvorschlag

a) *In jeder Spalte steht genau einmal die 1 und sonst nur 0en, damit ist die Spaltensumme stets 1. Die Einheitsmatrix ist also spaltenstochastisch.*

b) *Für die 1. Spalte gilt: 0,4 + 0,2 + 0,5 = 1,1*
Damit ist schon mit der 1. Spalte die Matrix nicht mehr spaltenstochastisch.

c) *Es gilt:*
0,5 + 0,4 + 0,1 = 1, für die 1. Spalte
0,3 + 0,5 + 0,2 = 1, für die 2. Spalte
0,3 + 0,6 + 0,1 = 1, für die 3. Spalte
Damit ist die Spaltensumme in jeder Spalte 1 und die Matrix somit spaltenstochastisch.

d) *Für die Spalte 4 gilt:* $0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}8 \neq 1$ *und damit folgt, dass die Matrix nicht spaltenstochastisch ist.*

Aufgabe 6

Überlegen Sie sich einen Startvektor zu Beispiel 1, der die Startbedingungen darstellt von flüssigem und gasförmigen Wasser. Führen Sie anschließend die Matrix-Vektor Multiplikation mit diesem Vektor und der Matrix aus Beispiel 1 durch.
Beschreiben Sie, was sie bei mehrmaligem durchführen der Matrix-Vektor Multiplikation beobachten können (Multiplizieren sie stets den jeweils neu resultierenden Vektor an die Matrix!). Spielt es eine Rolle, ob Sie einen stochastischen Vektor (mit relativen Zahlen) verwenden oder einen, der beispielsweise die Literangaben darstellt(absoluten Zahlen)?

Lösungsvorschlag

Startvektor (relativ): $\begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,05 \end{pmatrix}$, *Startvektor (absolut in Liter):* $\begin{pmatrix} 5 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

Der erste Eintrag modelliert die Menge (relativ/absolut) von flüssigem Wasser und der zweite Eintrag die Menge die in den Gaszustand gewechselt ist.

relativ: $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7625 \\ 0,2375 \end{pmatrix}$

absolut: $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,01 \\ 1,19 \end{pmatrix}$

mehrmalig mit relativen Werten:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix}^5 \cdot \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3779785 \\ 0,6220215 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2422351 \\ 0,7577649 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix}^{100} \cdot \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

Durch das wiederholte Multiplizieren, nähern wir uns einer Verteilung an, bei der nur noch 20% des Wassers flüssig bleibt und 80% gasförmig wurde.
Verwenden wir stochastische Vektoren, so können wir einfacher allgemeinere Aussagen tätigen über den stochastischen Prozess. Bei absoluten Zahlen müssen wir erst immer noch wieder umrechnen, jedoch liegen zu untersuchende Situationen meist zunächst in absoluten Zahlen vor. Fallen liegen hier auch noch bei den Einheiten, denn Gas müssten wir in $\frac{l}{m^3}$ angeben.

Aufgabe 7

Sie wollen die Populationsentwicklungen der Fischotter nun im Ganzen modellieren. Aus dem Eingangstext lassen sich unterschiedliche Modelle für den Zustandsvektor ableiten. Sie könnten zum Beispiel die Fischotter klassifizieren (wie wir das auch schon in Kapiteln zuvor gemacht haben) in Junge, Fähe und zusätzlich nun Rüde. Sie könnten aber auch eine Einteilung nach Jahren vornehmen, indem sie Neugeborene, 1 Jährige, 2 Jährige, etc. Fischotter betrachten. Sie könnten aber auch versuchen die beiden Konzepte zusammenzuführen und somit ein Mischmodell erzeugen. Die Modelle haben jeweils unterschiedliche Vor- und Nachteile.

Kreativaufgabe Wählen Sie bzw. überlegen Sie sich ein ihrer Meinung nach geeignetes Modell zur Beschreibung der Fischotterpopulation. Versuchen Sie dabei auf den Einleitungstext Bezug zu nehmen, wo es möglich ist, und vereinfachen sie an geeigneten Stellen.

a) Beschreiben Sie ihr Modell, indem Sie erläutern, was die Einträge in ihren Zustandsvektoren und Populationsmatrizen bedeuten.

b) Überlegen Sie sich eine Grundpopulation und stellen Sie diese in einem, ihrem Modell entsprechenden, Zustandsvektor v dar.

c) Erstellen Sie ein Diagramm, was die Veränderungen in ihrer Population darstellt. (Hinweis: Betrachten Sie Beispiel 2)

d) Leiten Sie aus ihrem Diagramm eine Populationsmatrix P ab und führen Sie die Matrix-Vektor Multiplikation P $\cdot$ v durch.

e) Führen Sie die Matrix-Vektor Multiplikation mehrmals durch, indem Sie den resultierenden Vektor stets an P multiplizieren. Was beobachten Sie? Wie interpretieren Sie Ihr Ergebnis, im Zusammenhang zu Ihrem Modell?

Lösungsvorschlag

Eine Musterlösung zur Kreativaufgabe gibt es nicht, da hier sehr viel Freiraum gelassen wurde. Hier ist die Lehrkraft gefragt einzuschätzen, ob und welche SuS diese Aufgabe bearbeiten sollen. Die Rechenaufgabe ist eine geschlossenerere Form der Kreativaufgabe und kann somit als Hilfe dienen, ist jedoch massiver Varianz ausgesetzt, die aus der Modellierungsfreiheit der Populationsmatrizen resultiert.

Rechenaufgabe Sie wollen die Fischotterpopulation modellieren, indem Sie diese einteilen in Junge, Fähe und Rüde. Diese Einteilung sollen Sie verwenden, um darauf basierend Zustandsvektoren und Populationsmatrizen zu erstellen.

a) In der beobachteten Population existieren 12 Junge, 9 Fähen und 8 Rüden. Erstellen Sie einen Zustandsvektor, der dies beschreibt.

b) Aus dem Eingangstext wissen wir, dass von den Jungtieren nur 15% älter als 3 Jahre werden und damit die Geschlechtsreife erreichen. Wir interpretieren daher eine Matrix-Vektor Multiplikation, also einen Zeitschritt, so, dass dabei 3 Jahre vergehen. Fähen erreichen die geschlechtsreife jedoch früher.
Wenn durchschnittlich Fähen nach 2 Jahren, Rüden nach 3 Jahren geschlechtsreif werden, wie viele von den 12 Jungtieren sind dann nach einem Schritt (3 Jahre) Rüden, und wie viele Fähen?

c) Um die Modellierung zu vereinfachen gehen wir nun davon aus, dass etwa 50% der Fähen alle 1,5 Jahre einen Wurf Jungtiere bekommt. Unter Hinzunahme der durchschnittlichen Anzahl Junge, die bei einem Wurf neu geboren werden: Wie viele Junge werden dann von Fähen pro Zeitschritt (bezogen auf unser Modell) geboren? Wenn wir den Pfeil im Populationsdiagramm **von** Fähe **zu** Junge beschriften wollten, was müssten wir dort dranschreiben?

d) Als letzte Bedingung wollen wir annehmen, dass pro Zeitschritt etwa $\frac{1}{5}$ der Ausgewachsenen Tiere verstirbt (Wie viele bleiben also übrig?). Zeichnen Sie nun basierend auf den bisherigen Informationen ein Populations-Diagramm, dass die Gesamtveränderungen in der Population darstellt(unabhängig vom Start).(Hinweis: vergleichen Sie Beispiel 2).

e) Leiten Sie aus ihrem Diagramm eine Populationsmatrix P ab und führen Sie die Matrix-Vektor Multiplikation P · v durch.

f) Beschreiben Sie Ihr Ergebnis, indem Sie jeden Eintrag erläutern. Gibt es Auffälligkeiten? Wie sind diese zu erklären?

g) Führen Sie die Matrix-Vektor Multiplikation mehrmals durch, indem sie den resultierenden Vektor stets an P multiplizieren. Was beobachten Sie? Wie interpretieren Sie Ihr Ergebnis? Beziehen Sie dabei das Modell mit ein.

Lösungsvorschlag

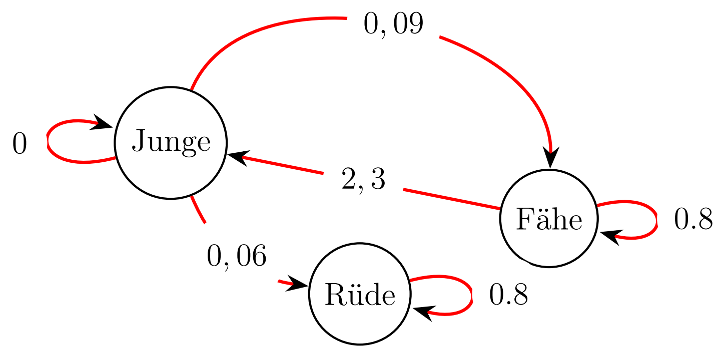
a) *Von oben nach unten interpretieren wir die Einträge als die Anzahl Junge, Anzahl Fähen und Anzahl Rüden der Population.*

$$v = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

b) *Es bleiben nur 15% der Jungtiere nach einem Zeitschritt(3 Jahre), daraus folgt:* $12 \cdot 0,15 = 1,8$ *erwachsene Tiere kommen hinzu. Aus der 2. Bedingung erhalten wir dann, dass, nach einem Zeitschritt, das Verhältnis von Fähe zu Rüde 3:2 ist. Daher gilt, es werden* $1,8 \cdot 2/5 = 0,72$ *im Schnitt Rüden und* $1,8 \cdot 2/5 = 1,08$ *Fähen.*

c) *Wir erhalten im Schnitt 2,3 Junge pro Wurf. Da wir aber alle 1,5 und nicht alle 3 Jahre einen Wurf erwarten, erhalten wir pro Zeitschritt also* $2,3 \cdot 2 = 4,6$ *Junge. Da nur 50% der Fähen Junge bekommt, müssten wir im Diagramm* $4,6 \cdot 0,5 = 2,3$ *dranschreiben.*

d) *Da 80% der erwachsenen Tiere überleben, müssen wir bei sowohl den Rüden, als auch den Fähen einen Pfeil auf sich selbst ziehen mit 0,8. Die Pfeile von Fähe zu Rüde und Rüde zu Fähe wurden aus Übersichtsgründen hier weggelassen. Sie sind auch nicht zwingend notwendig, helfen aber bei dem Verständnis in der Ableitung der Matrizen später, in denen die 0 Einträge vorkommen müssen.*



e) $P = \begin{pmatrix} 0 & 2,3 & 0 \\ 0,09 & 0,8 & 0 \\ 0,06 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$,
wobei die 1. Spalte die Bedingungen in b) aufgreift, der obere Eintrag in der 2.Spalte die Bedingung in c) und beiden hinteren Diagonaleinträge aus d) entstammen.

$$P \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 2,3 & 0 \\ 0,09 & 0,8 & 0 \\ 0,06 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20,7 \\ 8,28 \\ 7,12 \end{pmatrix}$$

f) *Beschreibung: Die Anzahl Junge ist auf fast 21 angestiegen, die Anzahl Fähen und Rüden jedoch auf etwa 8 und 7 gesunken.*
Auffälligkeiten: Es fällt auf, dass die Anzahl Junge stark gestiegen ist und sich fast verdoppelte. Die Anzahl Rüden und Fähen liegen im Gegensatz dazu noch nahe bei ihren Ausgangswerten.

g) *Zur Untersuchung des Grenzverhaltens berechnen wir iterativ die jeweils neu resultierenden Vektoren:*

$$v_1 = P \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 2,3 & 0 \\ 0,09 & 0,8 & 0 \\ 0,06 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20,7 \\ 8,28 \\ 7,12 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = P \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2,3 & 0 \\ 0,09 & 0,8 & 0 \\ 0,06 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20,7 \\ 8,28 \\ 7,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19,044 \\ 8,487 \\ 6,938 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = P \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2,3 & 0 \\ 0,09 & 0,8 & 0 \\ 0,06 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19,044 \\ 8,487 \\ 6,938 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19,558188 \\ 8,559657 \\ 6,525638 \end{pmatrix}$$

$$v_{10} = P \cdot v_9 = \begin{pmatrix} 20,262622 \\ 8,860980 \\ 6,122068 \end{pmatrix} \quad v_{30} = P \cdot v_{29} = \begin{pmatrix} 22,749593 \\ 9,948548 \\ 6,634841 \end{pmatrix}$$
$$v_{100} = P \cdot v_{99} = \begin{pmatrix} 34,115086 \\ 14,918753 \\ 9,945836 \end{pmatrix} \quad v_{200} = P \cdot v_{199} = \begin{pmatrix} 60.86060 \\ 26.61475 \\ 17.74316 \end{pmatrix}$$

Wir stellen also fest, dass sich zunächst die Erwachsenen Population verkleinert und die Jungtierpopulation schlagartig erhöht. Anschließend wächst jedoch die Fähenpopulation und auf lange Sicht erhöht sich die Gesamtpopulation der Fischotter.
Es dauert nach unserem Modell jedoch sehr lange bis das Gesamtwachstum sichtbar wird. Nach 1 Zeitschritt sind wir bei etwa 35 Tieren. Erst nach 100 Zeitschritten hat sich die Anzahl Tiere auf etwa 60 Tiere erhöht. Das wären umgerechnet 300 Jahre.

Umwelteinfluss(Inversionsaufgabe):Der Klimawandel und Ausbau der Wohnsiedlungen führt zu einem Rückgang der Flüsse und Teiche. Dies sind die natürlichen Lebensräume des Fischotters. Außerdem fallen durch den Ausbau der Straßen mehr und mehr Tiere Autos zum Opfer und auch die Jagd auf Fischotter dezimiert den Bestand. Diese Einflussfaktoren führten (und teilweise führen) zu einer sinkenden Populationszahl.

a) Ausgehend von der Rechenaufgabe und einem Start wie in a) bzw. Ihrer eigenen Modellierung in der Kreativaufgabe: Wie müssten die resultierenden Vektoren nach den Matrix-Vektor Multiplikationen aussehen, wenn die Populationsmatrix die Umwelteinflüsse miteinbezieht? Wie verändern sich die Einträge? Geben Sie beispielhaft Vektoren an, die in etwa Ihren Erwartungen entsprechen.

b) Erstellen Sie eine abgewandelte Populationsmatrix, die die Umwelteinflüsse mit einbezieht nach dem selben von Ihnen schon verwendeten Modell. Beachten sie dabei, dass diese Matrix, unter den selben Startbedingungen wie die erste Populationsmatrix, nun die in a) angegebenen Vektoren (in etwa) als resultierende Vektoren haben soll.

c) Wie lange dauert es, bei Ihrer neuen Populationsmatrix, bis nur noch weniger als 3 Fähen in der Gesamtpopulation vorhanden sind?

Lösungsvorschlag

a) *Die Populationszahl soll sinken, also müssen die Werte der Vektoren sich verkleinern. Dabei können die Anzahl Jungtiere sinken, die Anzahl ausgewachsener Tiere sinken, oder Beide.*
Beispielsweise kann argumentiert werden, dass eine höhere Sterberate der erwachsenen Tiere angenommen wird. Damit könnten die Vektoren sich etwa so entwickeln:
$$v = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es wäre auch denkbar, dass die Fähen weniger oft Junge kriegen und somit die Anzahl Jungtiere direkt senkt. Als Folge davon würden dann letztlich auch die Anzahl erwachsener Tiere sinken.

b) *Wir nehmen an, dass sich die Überlebensrate von 0,8 auf 0,6 sinkt, bzw. dass die Sterberate von 20% auf 40% steigt. Das führt zu folgender Populationsmatrix:*
$P = \begin{pmatrix} 0 & 2,3 & 0 \\ 0,09 & 0,6 & 0 \\ 0,06 & 0 & 0,6 \end{pmatrix}$ *Damit ergibt sich für die Vektoren:*
$v_1 = P \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 2,3 & 0 \\ 0,09 & 0,6 & 0 \\ 0,06 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20,7 \\ 6,48 \\ 5,52 \end{pmatrix}$
$v_2 = P \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2,3 & 0 \\ 0,09 & 0,6 & 0 \\ 0,06 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20,7 \\ 6,48 \\ 5,52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14,904 \\ 5,751 \\ 4,554 \end{pmatrix}$
$v_3 = P \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2,3 & 0 \\ 0,09 & 0,6 & 0 \\ 0,06 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14,904 \\ 5,751 \\ 4,554 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.22730 \\ 4.79196 \\ 3.62664 \end{pmatrix}$ *Dies entspricht etwa den in a) erwarteten Vektoren.*

c) *In dem in b) gewählten Beispiel würde bei* $v_6 = \begin{pmatrix} 7.892026 \\ 2.900375 \\ 2.026896 \end{pmatrix}$ *Das erste mal die Grenze von 3 Fähen in der Gesamtpopulation unterschritten werden.*

Aufgabe 8

Wir setzen eine Menge von 15 Fischottern an einem Fluss aus. Um den Fluss befinden sich noch weitere Habitate, und zwar ein Teich und ein Waldstück.
Wir gehen davon aus, dass der Fluss ein sehr attraktives Habitat ist, daher werden 80% der Tiere, die dort eintreffen, dort bleiben. Die restlichen Tiere verteilen sich von dort gleichmässig auf die anderen beiden Gebiete. Ein Teich ist ebenfalls attraktiv für die Otter, sodass etwa 70 % dort bleiben werden. Von dort werden jedoch doppelt so viele Otter zum Fluss gehen, als in den Wald. Der Wald ist das am wenigsten attraktive Gebiet, sodass dort nur 40% verbleiben, 35% zum Fluss ziehen von dort und 25% zum Teich.

a) Modellieren Sie die Verteilung in einem Übergangsdiagramm. (Vergleiche Beispiel 1)

b) Leiten Sie aus dem Übergangsdiagramm eine Übergangstabelle ab.

c) Erstellen Sie aus der Übergangstabelle eine Übergangsmatrix. Begründen Sie anschließend, ob es sich hierbei um einen stochastischen Prozess handelt.

d) Erstellen Sie einen Startzustandsvektor und multiplizieren sie diesen mit der Übergangsmatrix.

e) Führen Sie die Multiplikationen nun mehrfach durch, indem sie den jeweils resultierenden Vektor wieder an die Übergangsmatrix multiplizieren. Was stellen Sie fest? Interpretieren Sie einen der Vektoren im Sachzusammenhang.

f*) Es sei n eine natürliche Zahl, U die Übergangsmatrix, u der Vektor der Grundpopulation und u_n, der resultierende Vektor, nachdem wir n-mal das Matrix-Vektor Produkt wie in e) gebildet haben (Im 1. Schritt also: $u_1 = U \cdot u$).
Beweisen Sie, dass dann gilt:

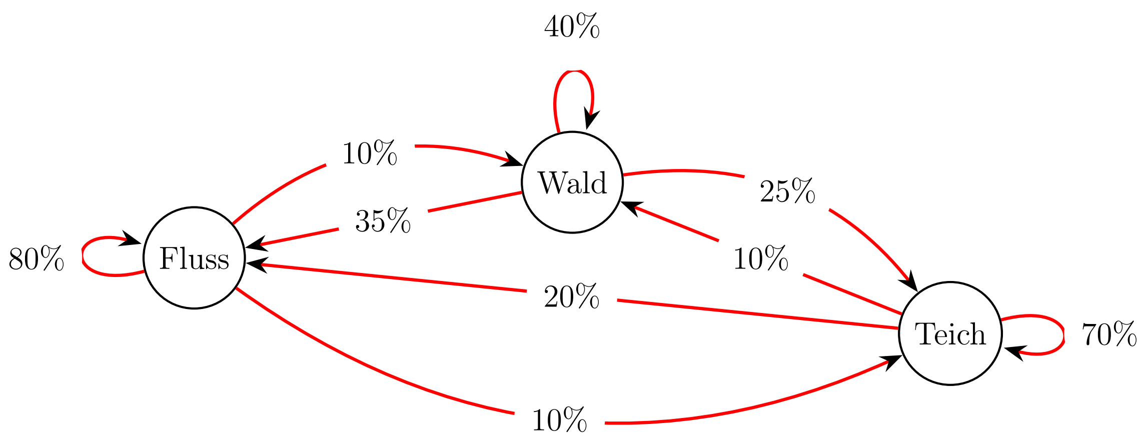
$$u_n = U^n \cdot u$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für Matrizen das Assoziativgesetz gilt.

g) Geben Sie die erwartete Verteilung der Fischotter nach 20 Zeitschritten an, indem Sie die Formel aus f) verwenden. Beschreiben Sie Auffälligkeiten.

Lösungsvorschlag

a) *Es müssen bei jedem Zustand / Gebiet 3 eingehende und 3 ausgehende Pfeile eingezeichnet werden:*



b) *Aus dem Diagramm lassen sich die Übergangswahrscheinlichkeiten ablesen und es folgt für die Übergangstabelle:*

	von Fluss	von Teich	von Wald
nach Fluss	$0,8$	$0,2$	$0,35$
nach Teich	$0,1$	$0,7$	$0,25$
nach Wald	$0,1$	$0,1$	$0,4$

c) *Die Übergangsmatrix leitet sich direkt aus der Übergangstabelle ab:*

$$U = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,35 \\ 0,1 & 0,7 & 0,25 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Da die Spaltensummen jeder einzelnen Spalte 1 ergeben und alle Einträge zwischen 0 und 1 liegen, ist die Matrix spaltenstochastisch. Damit modelliert die Matrix einen stochastischen Prozess.

d) *Man könnte natürlich den Startvektor aus Aufgabe 7 nehmen. Wir werden hier jedoch zu Anschauungszwecken nun einen stochastischen Vektor s verwenden:*

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad U \cdot s = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor s modelliert den Start, bei dem alle Tiere zunächst am Fluss ausgesetzt werden.

e)

$$u_1 = U \cdot s = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix} \quad u_2 = U \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 0.695 \\ 0.175 \\ 0.130 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = U \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 0.6365 \\ 0.2245 \\ 0.1390 \end{pmatrix} \quad u_4 = U \cdot u_3 = \begin{pmatrix} 0.60275 \\ 0.25555 \\ 0.14170 \end{pmatrix}$$

$$u_{10} = U \cdot u_9 = \begin{pmatrix} 0.5535714 \\ 0.3035714 \\ 0.1428571 \end{pmatrix}$$

Je nachdem wie viele Iterationen man berechnet erkennen wir, dass sich die Vektoren immer weniger verändern. Sie streben gewissermaßen einem Zielvektor entgegen.
u_2 *kann so interpretiert werden, dass nach 2 Zeitschritten sich etwa 70% der Otter am Fluss, etwa 18% am Teich und 13% im Wald befinden.*

f) *Eine Möglichkeit ist es rekursiv die Formel* $u_n = U \cdot u_{n-1}$ *anzuwenden, die man in den Aufgaben davor verwendet hat. Dies führt dazu, dass gilt:*

$$u_n = U \cdot u_{n-1} = U \cdot U \cdot u_{n-2} = ... = U \cdot U \cdot U \cdot ... \cdot U \cdot u$$

Nach dem Hinweis dürfen wir zuerst die Matrizen miteinander multiplizieren und damit gilt:

$$U \cdot U \cdot U \cdot ... \cdot U \cdot u = U^n \cdot u \ \ q.e.d.$$

Propädeutisch wären z.B. Antworten wie „Wir verwenden <u>immer wieder</u> die Matrix-Vektor Multiplikation“ statt dem Begriff „rekursiv“ zu erwarten und „Es ist nach dem Hinweis egal, wie wir multiplizieren“ oder Ähnliches.
Diese signalisieren, dass die Idee verstanden wurde, nur die Formulierung noch zu verbessern ist.

g) $$u_{20} = U^{20} \cdot s = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,35 \\ 0,1 & 0,7 & 0,25 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}^{20} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5535851 & 0.5535486 & 0.5535669 \\ 0.3035577 & 0.3035943 & 0.3035760 \\ 0.1428571 & 0.1428571 & 0.1428571 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5535851 \\ 0.3035577 \\ 0.1428571 \end{pmatrix}$$

Wir können beobachten, dass die Matrix den Fixvektor in jeder Spalte stehen hat.

Aufgabe 9

Zusammenführung: Am Fluss ist eine Landstraße gebaut worden. Diese führt dazu, dass im Flussgebiet häufiger Tiere bei Verkehrsunfällen sterben.

a) Ausgehend von den Erkenntnissen aus Aufgabe 7 und 8, erläutern Sie, warum es gerade am Fluss so schlimm ist, dass die Sterberate der Fischotter dort höher liegt.

b) Diskutieren Sie Vor- und Nachteile bzgl. einer Umlegung der Straße durch das Waldgebiet. Betrachten Sie dabei nicht nur die Fischotter als Kriterium.

Lösungsvorschlag

a) *Aus Aufgabe 8 wissen wir, dass der Großteil der Fischotter sich auf lange Sicht am Fluss aufhalten wird (etwa 55 %). Wenn nun gerade dort die Population, wo sie am stärksten vertreten ist, eine angestiegene Sterberate besitzt, wirkt sich dies also besonders schlimm auf die Gesamtpopulation aus. Besonders schlimm ist dabei, dass schon kleinere Veränderungen in der allgemeinen Sterberate das Aussterben der Fischotterpopulation zur Folge haben können(Aufgabe 7).*

   Die Aufgabe dient also im Wesentlichen dazu, die Gedanken die sich bei der Bearbeitung von Aufgabe 7 und 8 gebildet haben / haben könnten zu verschriftlichen. Auch ohne die Ergebnisse der Aufgaben 7 und 8 können hier Hypothesen formuliert werden.

b) *Diese Aufgabe ist wieder bewusst sehr offen gestellt.*
   Ein Vorteil wäre zum Beispiel, dass die Sterberate auf das weniger bevölkerte Waldgebiet gelegt wird und somit die Fischotterpopulation geschont wird.
   Ein Nachteil wäre die verringerte Waldfläche, durch die Rodung von Teilen des Waldes zum Bau der Straße. Dies könnte einen massiven Einschnitt in das Ökosystem bedeuten.

Aufgabe 10

In der Biologie gibt es für Populationsmatrizen eine spezielle Form, die sogenannte Leslie-Matrix.

a) Lesen Sie den unten stehenden Artikel durch und markieren Sie bzw. schreiben Sie die wichtigsten neuen Eigenschaften im Vergleich zu den bisherigen Populationsmatrizen heraus.

b) Überlegen Sie sich eine Population, die Sie modellieren wollen und erstellen Sie dazu eine Leslie-Matrix mit fiktiven, aber Glaubwürdigen, Einträgen.

c) Erläutern Sie, warum die letzte Spalte einer Leslie-Matrix oft, abseits des ersten Eintrags, nur 0 Einträge besitzt.

Lösungsvorschlag

Diese Aufgabe dient als Differenzierungsaufgabe. Teil b) ist erneut als kreative Aufgabe gedacht, wobei die Form und Gestalt der zu erstellenden Matrix nun gerichteter ist. Insgesamt soll hiermit vermittelt werden, wie und wo Populationsmatrizen tatsächlich eine Anwendung finden.
In Teilaufgabe a) sollte also insbesondere die feste Form der Matrix erläutert werden.
Zu Teilaufgabe b) könnte z.B. die Menschenpopulation modelliert werden für Kinder, Jugendliche, Erwachsene und Senioren:

n_1 *= Anzahl Kinder,* n_2 *= Anzahl Jugendlicher,* n_3 *= Anzahl Erwachsener,* n_4 *= Anzahl Senioren.*
Da Kinder und Senioren keine Kinder kriegen können, gilt für die Geburtenraten $f_1 = f_4 = 0$.
Für Jugendliche gelten sehr geringe Geburtenraten $f_2 = 0{,}05$ *und für Erwachsene entsprechend höhere* $f_3 = 0{,}3$.
Die Überlebensraten von Kind zu Jugendlicher betragen 0,99, von Jugendlich zu erwachsen 0,9 und von Erwachsen zu Senior 0,7.
Senioren sind die letzte Altersklasse und daher sind die restlichen Einträge in der letzten Spalte 0 (Teilaufgabe c)). Ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 12300 \\ 2970 \\ 5400 \\ 28000 \end{pmatrix}_{t+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0,05 & 0,3 & 0 \\ 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 6000 \\ 40000 \\ 12000 \end{pmatrix}_t$$

Man kann erkennt hieran, dass eine grobe Unterteilung für merkwürdige Veränderungen in der Population sorgt. Darauf muss man dann bei der Interpretation besonders achten.