Jak animovat pohyb planety v GeoGebře

5. Animace pohybu planety pomocí Keplerovy rovnice

Žán Pól Kastról

26. července 2022

https://www.geogebra.org/m/m3q5cd4r

1 ZÁMYŠ

Nyní využijeme všechny možné triky a finty z předešlých kapitol, tak doufám, že jsi je četla!

Jaká je **základní myšlenka** (ZÁMYŠ) animace pohybu planety v GeoGebře ($\mathcal{GGB}$)? Potřebujeme propojit **polohu** planety na elipse s **časem**.

Poloha je dána parametrickými rovnicemi s parametrem E:

PREL 2. $(E \to x; y)$

$$x = a\cos E \tag{1}$$

$$y = b\sin E \qquad E \in \langle 0; 2\pi) \tag{2}$$

Potřebujeme tedy propojit *excentrickou anomálii* E s časem. K tomu slouží odvozená Keplerova rovnice ($\mathcal{KEPRO}$):

Keplerova rovnice

$$M = E - \varepsilon\sin E \tag{3}$$

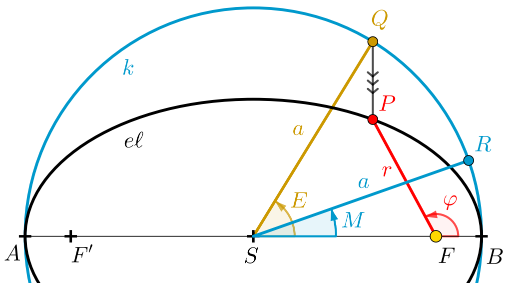
kde M je *střední anomálie* a platí

Střední anomálie

$$M = \frac{2\pi}{T}\cdot t \tag{4}$$

V $\mathcal{GGB}$ tedy zvolíme periodu, například $T = 1$, a vytvoříme *posuvník* t, který má rozsah od 0 do T. Necháme ho animovat a tím nám běží pěkně rovnoměrně čas.

Do $\mathcal{GGB}$ zadáme vzorec (4) a máme rovnoměrně se měnící *střední anomálii* M (propojenou s pomocným bodem R, který běhá rovnoměrně po kružnici k – viz obr. 1).



Obr. 1

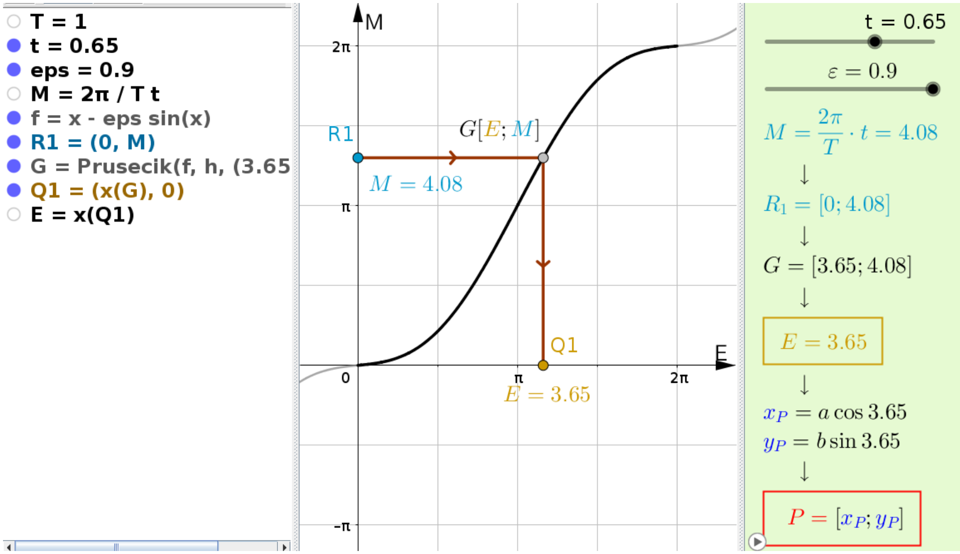
Nyní potřebujeme vyřešit $\mathcal{KEPRO}$ (3) a zjistit pro danou hodnotu M příslušnou hodnotu E, kterou dosadíme do rovnic (1) a (2) a máme souřadnice planety P, která teď pěkně nerovnoměrně obíhá po elipse.

Víme však, že $\mathcal{KEPRO}$ musíme řešit nějakou přibližnou methodou. Ukážeme si dvě možnosti, jak to v $\mathcal{GGB}$ udělat.

2 Grafické řešení $\mathcal{KEPRO}$

Nakreslíme si v $\mathcal{GGB}$ graf Keplerovy rovnice a hodnotu E odečteme jednoduše z grafu (obr. 2). V obrázku vidíme v levém sloupci postup (pomocné objekty nejsou zobrazeny):

- zvolíme *periodu* $T = 1$
- vytvoříme posuvník *času* t a zapneme jeho animaci (rostoucí)
- vytvoříme posuvník pro *relativní excentricitu* ε (vlevo označená „eps“)
- zadáme vzorec pro *střední anomálii* $M = \frac{2\pi}{T}$
- zadáme funkci f=x−eps \sin x, tím se vykreslí graf $\mathcal{KEPRO}$
- vytvoříme bod $R1 = [0, M]$, který při zapnuté animaci posuvníku t běhá v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ po svislé ose.
- z bodu $R1$ vedeme kolmici k ose y a získáme bod grafu G



Obr. 2: Řešení $\mathcal{KEPRO}$ pomocí garfu: $E = x(Q1)$.

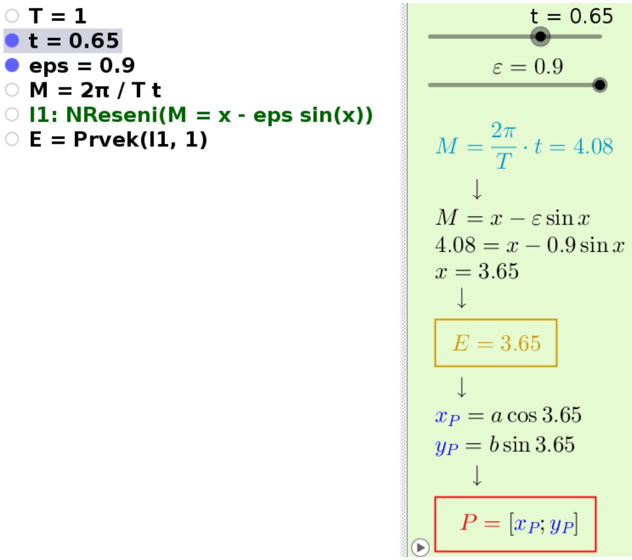
https://www.geogebra.org/m/z6aeckw8

- x-ová souřadnice bodu G je zřejmě naše **vytoužená hodnota** E, kterou potřebujeme pro výpočet souřadnic planety.
- můžeme ještě pro úplnost vést z G kolmici k ose x a získáme bod $Q1$, který si lítá v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ po vodorovné ose (a jeho x-ová souřadnice je rovněž E).

A je to, čili, jak říkáme u nás v Hnuslích, „itis"!

3 Numerické řešení $\mathcal{KEPRO}$

Pro numerické řešení $\mathcal{KEPRO}$, tedy pro nalezení hodnoty E, použijeme v $\mathcal{GGB}$ příkaz NReseni (obr. 3). V obrázku vidíme v levém sloupci postup



Obr. 3: Numerické $\mathcal{KEPRO}$ pomocí příkazu „NReseni“.

https://www.geogebra.org/m/a69e8n3v

(pomocné objekty nejsou zobrazeny):

- zvolíme *periodu* $T = 1$
- vytvoříme posuvník *času* t a zapneme jeho animaci (rostoucí)
- vytvoříme posuvník pro *relativní excentricitu* ε (vlevo označená „eps“)
- zadáme vzorec pro *střední anomálii* $M = \frac{2\pi}{T}$
- zadáme příkaz NReseni(M = x − eps sin(x)), GeoGebra rovnici vyřeší a řešení E máme v seznamu l1.

Dostáváme stejné hodnoty E jako v grafickém řešení.

4 Výsledný aplet

Nyní můžeme konečně vytvořit výsledný aplet, který bude s využitím $\mathcal{KEPRO}$ modelovat nerovnoměrný pohyb planety po elipse (viz obr. 4 a odkaz na „**Výsledný aplet**“ v popisku obrázku).

V apletu máme krástně synchronizován pohyb planety P a obou pomocných bodů Q, R (4a) s pohybem bodu G po křivce grafu Keplerovy rovnice (4b).

V obrázku 4c máme dva pohledy na **algebraické okno** GeoGebry.

Vlevo jsou **definice** nejdůležitějších objektů apletu (pomocné objekty, jako např. rovnice elipsy, výpočet souřadnic ohnisek atd., jsou skryty). Například vzorec $M = \frac{2\pi}{T} t$.

Vpravo jsou **hodnoty** těchto objektů. Například $M = 0.597$.

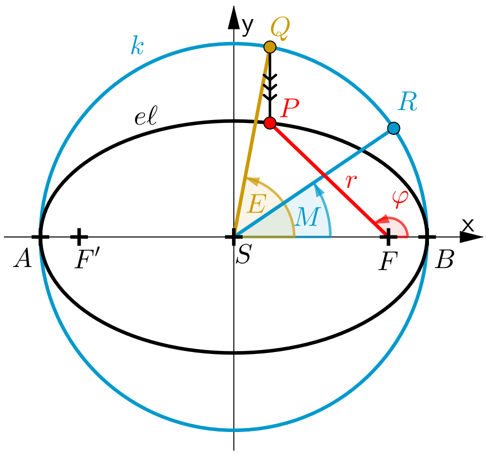
Aplet byl vytvářen ve verzi GeoGebra 5, se kterou se nám v Hnuslích lépe pracuje než s novější verzí 6. Ve verzi 5 se mezi zobrazením definic a hodnot musí přepínat. Aplet na webu se však zobrazuje v novější verzi, kde je možné definice i hodnoty zobrazit najednou.

Důležité body postupu při tvorbě apletu v obr. 4c:

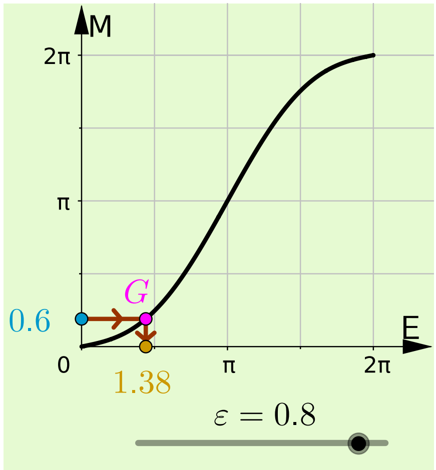
- Vlevo vidíme, že jsme hodnotu E zjistili oběma výše uvedenými způsoby, **graficky** ($E = x(G)$) i **numericky** (příkaz NReseni(M = x − eps sin(x))) a vpravo je vidět, že se hodnoty shodují!
- Pro animaci bodů R, Q, P jsme s výhodou využili toho, že souřadnice těchto bodů musejí splňovat paramatrické rovnice kružnice (body R, Q – parametry M, E) a elipsy (parametr E):

$$\begin{aligned} R &= [a \cos M; a \sin M] \\ Q &= [a \cos E; a \sin E] \\ P &= [a \cos E; b \sin E] \end{aligned}$$

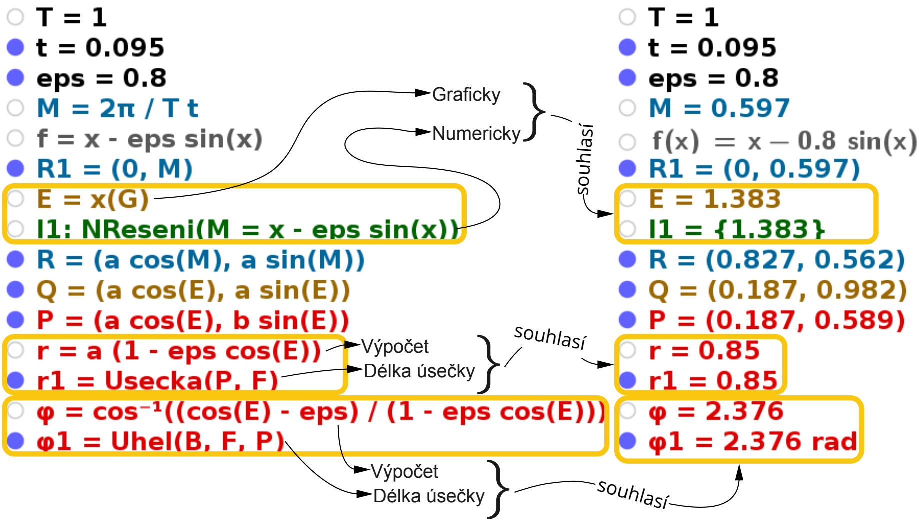
- I když to pro animaci planety není nutné, spočítali jsme si dle parametrických rovnic s parametrem E, které jsme odvodili dříve,



(a) Nákresna 1: animace planety



(b) Nákresna 2: grafické řešení



(c) Algebraické okno: vlevo **definice**, vpravo **hodnoty**.

Obr. 4: Výsledný aplet.

https://www.geogebra.org/m/evc5tthm

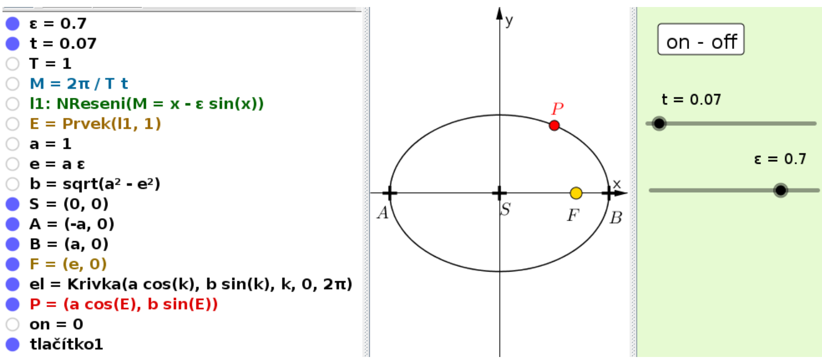
také hodnotu průvodiče r (vzd. planety od Slunce) a rovněž hodnotu pravé anomálie φ:

$$r = a(1 - \varepsilon \cos E)$$
$$\varphi = \frac{\cos E - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos E}$$

Porovnáme-li hodnotu vypočítaného r s délkou úsečky $r1 = |PF|$ z apletu, vidíme, že se shodují. Stejně tak se shoduje hodnota vypočítaného φ s velikostí $\varphi 1$ úhlu BFP!

5 Aplet – minimální verze

Pro praktické modelování pohybu planety nepotřebujeme tolik objektů jako v předchozím apletu, vystačíme si s minimální verzí, kde E se počítá jen numericky (viz obr. 5 a odkaz na „Aplet – minimální verze“ v popisu obrázku).



Obr. 5: Aplet - minimální verze. Vlevo jsou zobrazeny i pomocné objekty.

https://www.geogebra.org/m/tmw4eprz

Vidíme, že aplet, včetně pomocných objektů, není nijak moc rozsáhlý. Lze ho využít pro modelování dalších jevů (plošná rychlost, úhlová rychlost, obvodová rychlost).

Δ

Da Sista Les

∞