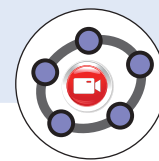


4 Hipérbola



PIENSA Y CALCULA

Halla mentalmente las pendientes de las siguientes rectas: a) $y = \frac{3x}{4}$ b) $y = -\frac{3x}{4}$

EVITAR ERRORES

Si los focos están en el eje Y , la constante es igual a $2b$

4.1 Hipérbola

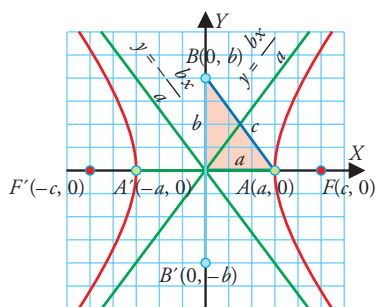
Una **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a $2a$. La hipérbola tiene dos ramas.

Ecuación reducida

Focos en el eje X

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

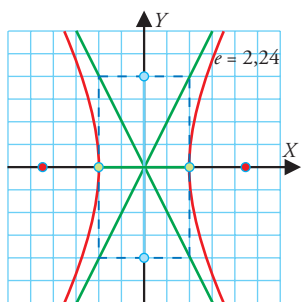
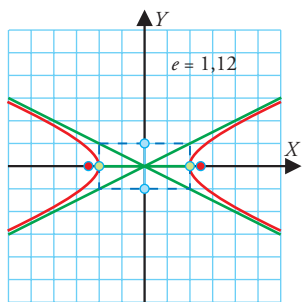
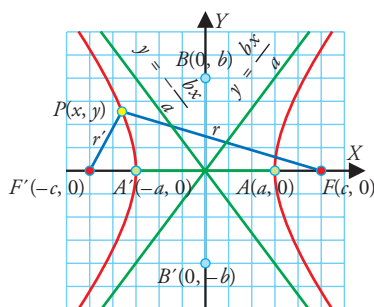
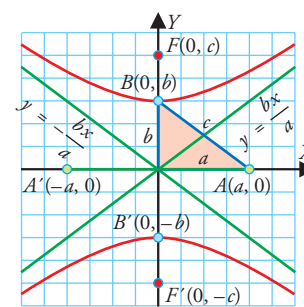
Relación fundamental:
 $c^2 = a^2 + b^2$



Focos en el eje Y

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Relación fundamental:
 $c^2 = a^2 + b^2$



Elementos de la hipérbola con los focos en el eje X

• Puntos:

- Centro:** es el punto de intersección de los ejes: $O(0, 0)$
- Vértices:** son los puntos: $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$
- Focos:** son los puntos fijos: $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$

• Segmentos:

- Eje principal o eje focal:** es el segmento AA' , cuya longitud es $d(A, A') = 2a$
- Eje secundario:** es el segmento BB' , cuya longitud es $d(B, B') = 2b$
- Distancia focal:** es la longitud del segmento FF' : $d(F, F') = 2c$
- Radiovectores:** son los segmentos $r = PF$ y $r' = PF'$

• Rectas:

Asíntotas: $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$

Para dibujar una hipérbola a mano alzada, se hace un rectángulo centrado en el origen, de longitud $2a$ y altura $2b$; las diagonales prolongadas son las asíntotas. Se trazan estas y la hipérbola.

• Excentricidad:

La **excentricidad de una hipérbola** es el cociente: $e = c/a$

Como en una hipérbola $0 < a < c$, la excentricidad será siempre positiva y mayor que 1. Si la excentricidad es pequeña, cercana a uno, las ramas de la hipérbola se cierran, y si es grande, se abren.

EJERCICIO RESUELTO

- 9** Se tiene una hipérbola en la que $a = 4$, $c = 5$ y los focos están en el eje X . Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas. Dibuja la hipérbola.

Aplicando la relación fundamental o teorema de Pitágoras, se tiene:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow b = \sqrt{25 - 16} = 3 \Rightarrow \text{ecuación reducida: } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

• Puntos:

a) Centro: $O(0, 0)$

b) Vértices: $A(4, 0)$, $A'(-4, 0)$,
 $B(0, 3)$ y $B'(0, -3)$

c) Focos: $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$

• Segmentos:

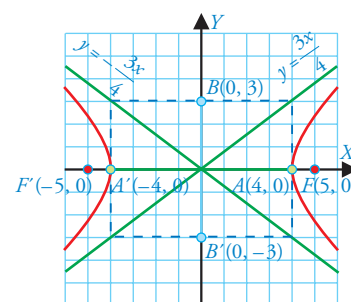
a) Eje principal: $2 \cdot 4 = 8$

b) Eje secundario: $2 \cdot 3 = 6$

c) Distancia focal: $2 \cdot 5 = 10$

• Excentricidad: $e = \frac{5}{4} = 1,25$

• Rectas, asíntotas: $y = \frac{3x}{4}$, $y = -\frac{3x}{4}$



4.2 Hipérbola centrada en el punto $C(m, n)$

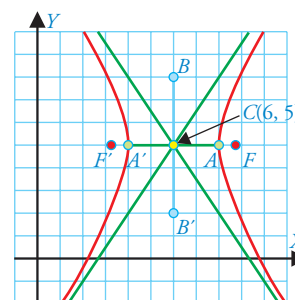
La ecuación reducida de una hipérbola de centro el punto $C(m, n)$ se obtiene haciendo una traslación; x se sustituye por $x - m$, e y , por $y - n$

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

EJERCICIO RESUELTO

10 Halla la ecuación de una hipérbola que tiene el centro en el punto $C(6, 5)$ y en la que $a = 2$ y $b = 3$

$$\frac{(x - 6)^2}{4} - \frac{(y - 5)^2}{9} = 1$$

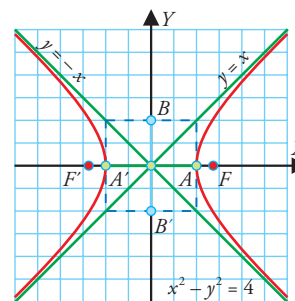


4.3 Hipérbola equilátera

Una **hipérbola equilátera** es una hipérbola en la que $a = b$; por tanto, la ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

Las asíntotas son: $y = x$, $y = -x$



Si se gira 45° , se obtiene la hipérbola correspondiente a la función de proporcionalidad inversa: $xy = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}$

EJERCICIO RESUELTO

11 Dibuja la hipérbola equilátera: $y = \frac{3}{x}$

