Teoría – Tema 5

Teoría - 6 - cociente de polinomios con raíces múltiples

Grado del numerador P(x) menor que Grado del denominador Q(x) y raíces múltiples en el denominador

En este segundo caso de integrales de cociente de polinomios, el polinomio del denominador podemos factorizarlo en raíces reales múltiples.

Recuerda: el grado del numerador debe ser inferior al grado del denominador.

Supongamos que el denominador posee una única raíz $x=x_1$ de multiplicada n (es decir, el valor $x=x_1$ aparece n veces como raíz del denominador).

$$Q(x)=(x-x_1)^n$$

Y el cociente de polinomios podemos expresarlo como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-x_1)^n}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{(x-x_1)^2}+...+\frac{N}{(x-x_n)^n}$$

Igualamos los denominadores:

$$P(x)=A\cdot(x-x_1)^{n-1}+B\cdot(x-x_1)^{n-2}+...+N$$

Los factores indeterminados $A, B, ..., N$ podemos conocerlos **dando valores a la variable** x .

Si $x=x_1$ → obtenemos N

Damos valores arbitrarios a $x\neq x_1$ para obtener el resto de factores $A, B, ...$ a través de un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 1 resuelto

$$\int \frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1}dx=\int \frac{(2x-1)}{(x-1)^3}dx$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$$

$$2\mathrm{x}-1=A(x-1)^2+B(x-1)+C$$

Si $x=1 \rightarrow 1=C \rightarrow C=1$

Si $x=0 \rightarrow -1=A-B+1$

Si $x=2 \rightarrow 3=A+B+1$

Con las últimas dos ecuaciones formamos un sistema:

$$\left\{\begin{matrix} -2=A-B \\ 2=A+B \end{matrix}\right\} \rightarrow A=0 \ , \ B=2$$

Sustituyendo estos coeficientes en la integral:

$$\int \frac{(2x-1)}{(x-1)^3}dx=\int \left[\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}\right]dx=\int \left[\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}\right]dx$$

$$\int \left[\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}\right]dx=\frac{-2}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$$