



- **Conceptos claves
de trigonometría**

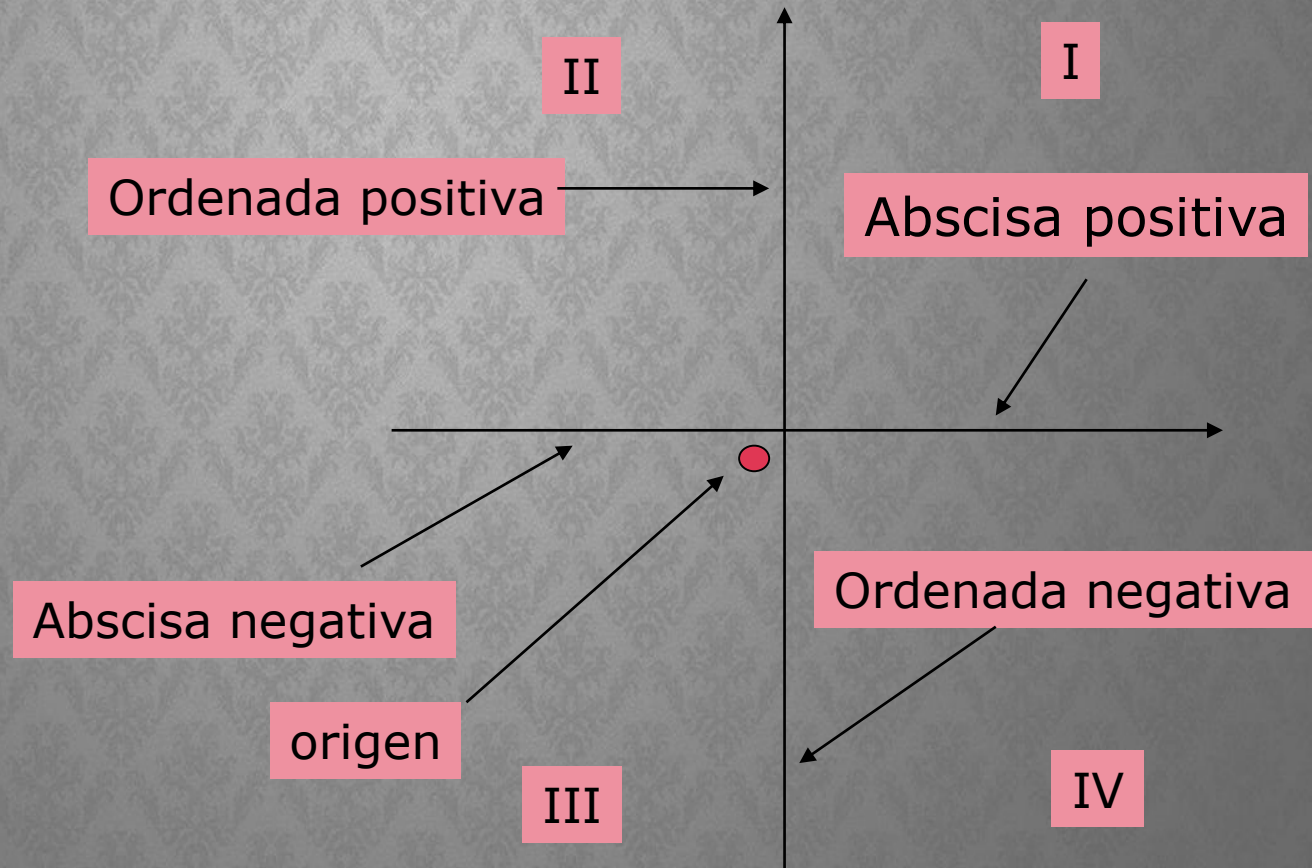


CONCEPTOS GENERALES DE TRIGONOMETRÍA(PARTE A)

1. **SISTEMAS DE COORDENADAS RECTANGULARES**
2. **CONCEPTO DE RADIO VECTOR, APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PÍTAGORAS**
3. **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS BASICAS**
4. **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ANGULO EN POSICIÓN NORMAL**
5. **RELACIÓN ENTRE RADIANES Y GRADOS**
6. **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO MAYOR DE 90 EN TERMINOS DE UN ÁNGULO RELACIONADO**
7. **FUNCIONES DE ÁNGULOS DE 30,60 Y 45 GRADOS**
8. **VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MÚLTIPLOS DE 30,60 Y 45**
9. **FUNCIONES DE ÁNGULOS DE CUADRANTE**
10. **CONCEPTO DE ÁNGULO COTERMINAL**

SISTEMAS DE COORDENADAS RECTANGULARES

Todo sistema cartesiano esta compuesto por dos ejes que se cortan perpendicularmente en un punto llamado origen. Al eje horizontal se le conoce como abscisa o eje de las "x" Al eje vertical se le conoce como ordenada o eje de las "y" . Existe un semi eje positivo y negativo para ambos ejes.



LOCALIZACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO

- Las coordenadas o puntos se escriben como pares ordenados

(X, Y). Donde se escribe primero la abscisa y segundo la ordenada

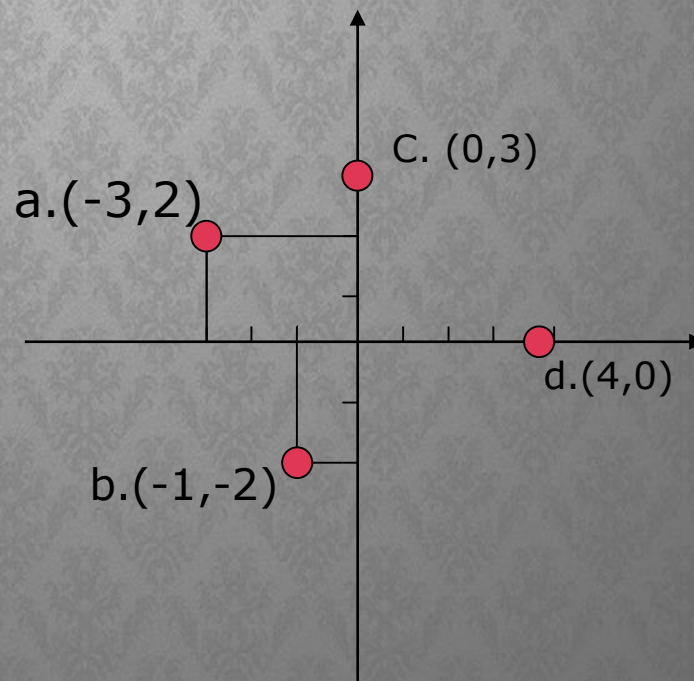
Ejemplos

a.(-3,2)

b.(-1,-2)

C. (0,3)

d.(4,0)



CONCEPTO DE RADIO VECTOR, APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PÍTAGORAS

Radio Vector: Es el segmento que une el origen con un punto en el plano

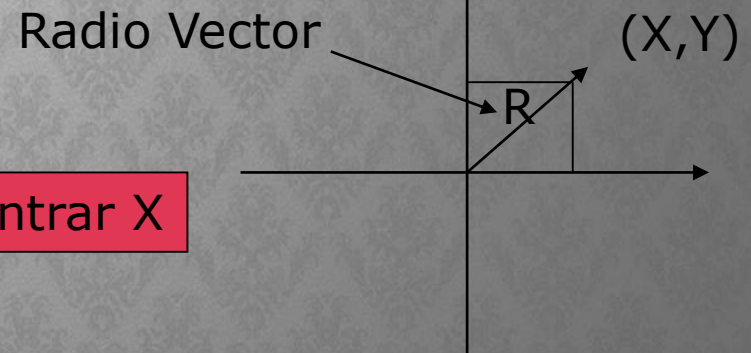
Considerando que el radio vector junto a las coordenadas del punto forman un triángulo rectángulo. Podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular uno de los valores faltantes de la terna Pitagórica

Dado X, Y, para encontrar R

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Dado R, Y para encontrar X



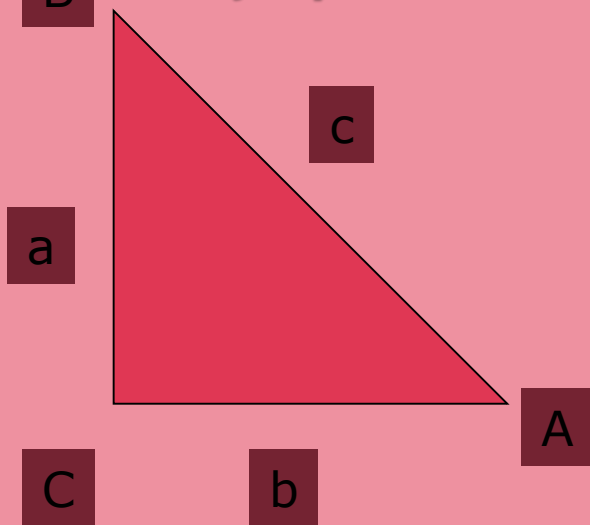
Dado R, X para encontrar Y

El signo de la "X" o "Y" dependerá del Cuadrante donde se ubique el punto

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS

Funciones trigonométricas respecto al ángulo A del triángulo

- Las funciones trigonométricas básicas se definen como las razones trigonométricas para un triángulo rectángulo, según coincida su lado terminal con el eje "x" o Eje "y".



Principales

$$\text{sen}A = \frac{\text{ladoopuesto } a}{\text{hipotenusa } c}$$

$$\text{cos}A = \frac{\text{ladoadyacente } b}{\text{hipotenusa } c}$$

$$\text{Tan}A = \frac{\text{Ladoopuesto } a}{\text{ladoadyacente } b}$$

Recíprocas

$$\text{Csc}A = \frac{\text{hipotenusa } c}{\text{ladoopuesto } a}$$

$$\text{Sec}A = \frac{\text{hipotenusa } c}{\text{ladoadyacente } b}$$

$$\text{Cot}A = \frac{\text{Ladoadyacente } b}{\text{Ladoopuesto } a}$$



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ANGULO EN POSICIÓN NORMAL

- **Definiciones de ángulo:**

Según el sentido de giro:

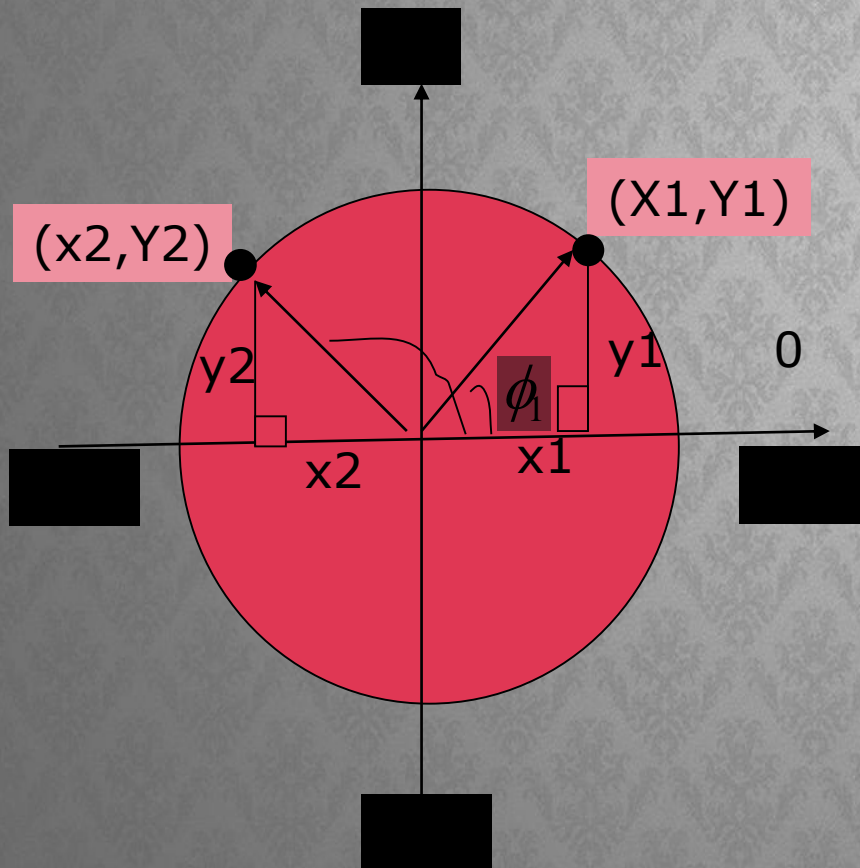
**positivo: Gira en contra de las
manecillas del reloj**

**negativo: gira a favor de las
manecillas del reloj**

Ángulo en posición normal:

**Es aquel que tiene su vértice en el origen y su lado
inicial coincide con el eje positivo de las abscisas o “x”**

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ANGULO EN POSICIÓN NORMAL



Un ángulo en posición normal puede estar entre 0 y 360

El signo de las funciones depende del cuadrante

Funciones trigonométricas de ϕ_2

$$\operatorname{sen}\phi_2 = \frac{y_2}{r_2}$$

$$\operatorname{cos}\phi_2 = \frac{-x_2}{r_2}$$

$$\operatorname{tan}\phi_2 = \frac{y_2}{-x_2}$$



SIGNO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SEGÚN CUADRANTE

$(- X , + Y)$

Sólo el sen y Csc son positivas

$(+ X , + Y)$

Todas las funciones son positivas

Sólo la Tan y Cot son positivas

$(- X , - Y)$

Cos y sec son positivas

$(+ X , - Y)$

RELACIÓN ENTRE RADIANES Y GRADOS

- Los ángulos pueden medirse en grados o radianes. Por lo tanto, se hace necesario el dominio de ambas unidades de medida.
- Transformación de Grados a Radianes. Para transformar de grados a radianes se debe multiplicar por

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$$

Ejemplo

$$60^\circ = 60^\circ \left[\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right] = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

- Transformación de radianes a grados: Para transformar de radianes a grados se debe multiplicar por:

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$$

Ejemplos

$$4 \text{ rad} = 4 \text{ rad} \left[\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \right] = 4 \text{ rad} \left[\frac{180^\circ}{3.14 \text{ rad}} \right] = 229^\circ$$
$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \left[\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \right] = 30^\circ$$

Si el ángulo en grados tiene minutos y segundos debe transformar los minutos y segundos a grados



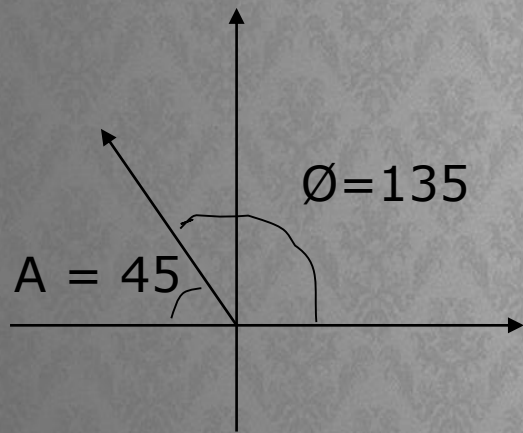
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO MAYOR DE 90 EN TERMINOS DE UN ÁNGULO RELACIONADO

Todos los ángulos mayores de 90 se pueden expresar en términos de ángulos agudos positivos. Esto se hace mediante la utilización de ángulo de referencia o relacionado.

Definición de ángulo relacionado:

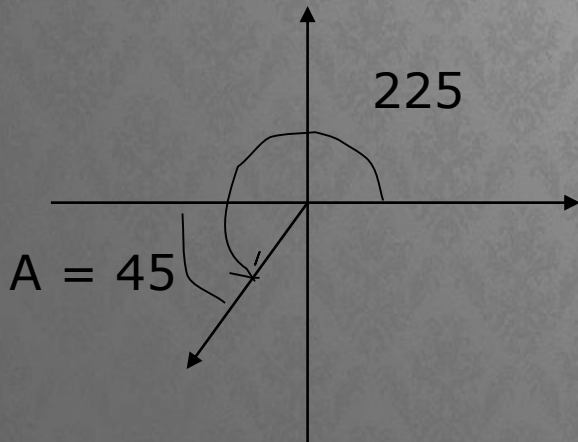
El ángulo relacionado es el ángulo agudo positivo formado por su lado terminal y el eje "x", con el cual se puede expresar cualquier ángulo, que no sea múltiplo de 90 y se encuentre en posición normal.

EJEMPLOS DE ÁNGULOS RELACIONADOS



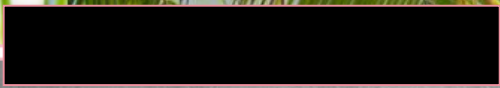
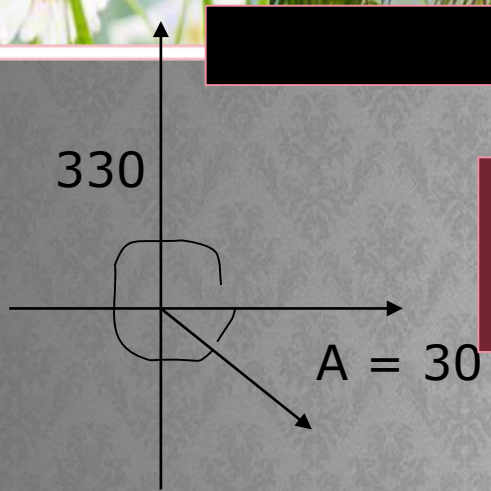
$$\begin{aligned} A &= 180 - \emptyset \\ A &= 180 - 135 \\ A &= 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sen}135 &= \text{sen}45 \\ \text{Cos}135 &= -\text{cos}45 \\ \text{Tan}135 &= -\text{tan}45 \end{aligned}$$



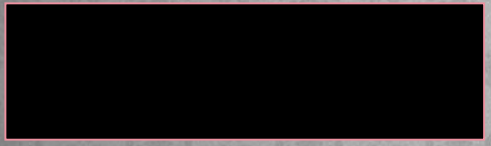
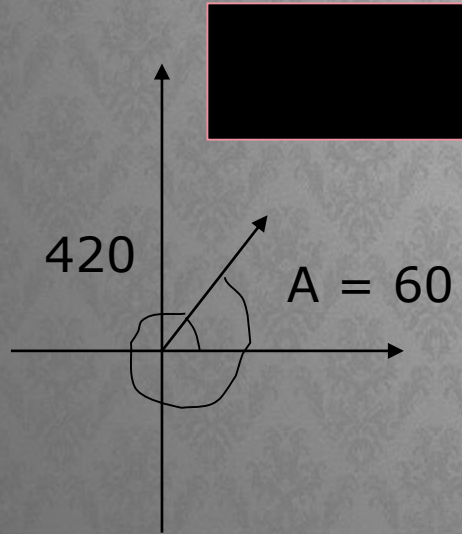
$$\begin{aligned} A &= \emptyset - 180 \\ A &= 225 - 180 \\ A &= 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sen}225 &= -\text{sen}45 \\ \text{Cos}225 &= -\text{cos}45 \\ \text{Tan}225 &= \text{tan}45 \end{aligned}$$



$$A = 360 - \emptyset$$
$$A = 360 - 330$$
$$A = 30$$

$$\text{Sen}330 = -\text{sen}30$$
$$\text{Cos}330 = \text{cos}30$$
$$\text{Tan}330 = -\text{tan}30$$



$$A = \emptyset - 360$$
$$A = 420 - 360$$
$$A = 60$$

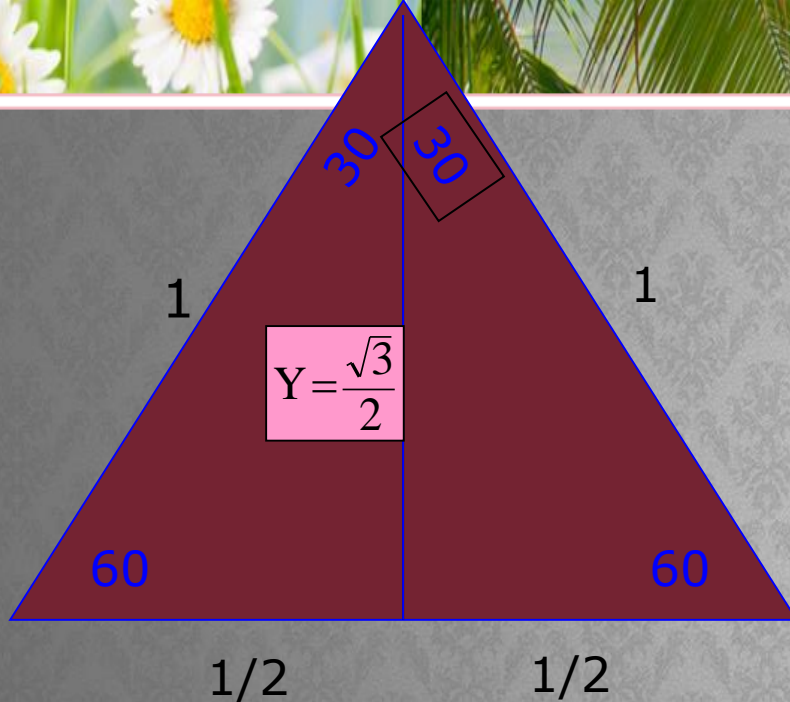
$$\text{Sen}420 = \text{sen}60$$
$$\text{Cos}420 = \text{cos}60$$
$$\text{Tan}420 = \text{tan}60$$



FUNCIONES DE ÁNGULOS DE 30,60 Y 45 GRADOS

Procedimiento para determinar las Funciones de ángulos de 30 y 60:

Para determinar las funciones de los ángulos de 30 y 60 basta dibujar un triángulo equilátero y trazar la bisectriz a uno de sus ángulos. Considerando que los lados son iguales, tendremos la hipotenusa y uno de los catetos para un triángulo con ángulos agudos de 60 y 30 grados



$$Y = \sqrt{R^2 - X^2}$$

$$Y = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$Y = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$

$$Y = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos}60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{tan}60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{csc}60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sec}60^\circ = 2$$

$$\text{cot}60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$$


$$\text{cos}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tan}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{csc}30^\circ = 2$$

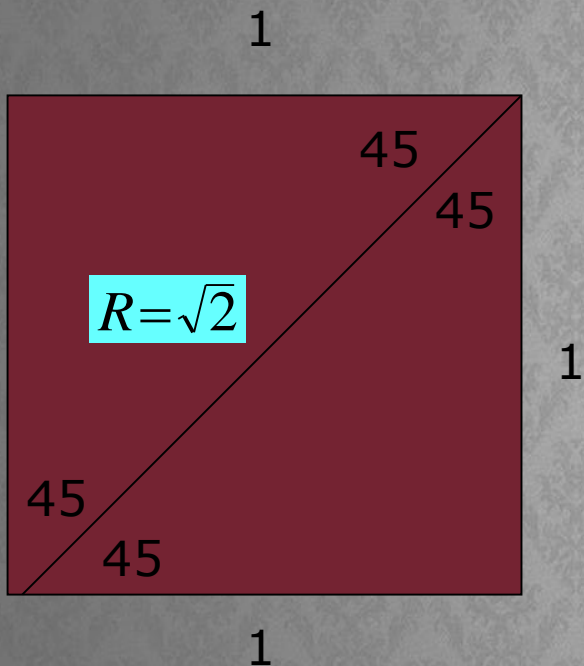
$$\text{sec}30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cot}30^\circ = \sqrt{3}$$



PROCEDIMIENTO PARA DETERMINAR LAS FUNCIONES DE ÁNGULOS DE 45 GRADOS

Para determinar las funciones de los ángulo de 45 grados se debe dibujar un cuadrado y trazar su diagonal. Como el cuadrado tiene sus lados iguales , al trazar la diagonal la misma representa la hipotenusa de los dos triángulos formados. Calculando la hipotenusa y teniendo los catetos que son los lados del triangulo podemos calcular las funciones trigonométricas del ángulo de 45 dado que la diagonal divide el ángulo de 90 en dos ángulos de 45 grados



$$R^2 = X^2 + Y^2$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$R = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$$

$$R = \sqrt{1+1}$$

$$R = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$



FUNCIONES DE ÁNGULOS DE CUADRANTE

PROCEDIMIENTO PARA DETERMINAR LAS FUNCIONES DE ÁNGULOS DE CUADRANTE

Para determinar las funciones de los ángulo de cuadrante se debe dibujar un circulo trigonométrico de radio uno. Ubicando el radio vector en cada uno de los ejes o ángulo de cuadrante, podemos determinar las funciones de cada uno de estos ángulos considerando. que en cada eje el radio vector será igual al mismo cateto, siendo cero el cateto restante.

$$\begin{aligned} \sin 90^\circ &= \frac{Y}{R} = \frac{1}{1} = 1 \\ \cos 90^\circ &= \frac{X}{R} = \frac{0}{1} = 0 \\ \tan 90^\circ &= \frac{Y}{X} = \frac{1}{0} = \infty \\ \csc 90^\circ &= \frac{R}{Y} = \frac{1}{1} = 1 \\ \sec 90^\circ &= \frac{R}{X} = \frac{1}{0} = \infty \\ \cot 90^\circ &= \frac{X}{Y} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 0^\circ &= \frac{Y}{R} = \frac{0}{1} = 0 \\ \cos 0^\circ &= \frac{X}{R} = \frac{1}{1} = 1 \\ \tan 0^\circ &= \frac{Y}{X} = \frac{0}{1} = 0 \\ \csc 0^\circ &= \frac{R}{Y} = \frac{1}{0} = \infty \\ \sec 0^\circ &= \frac{R}{X} = \frac{1}{1} = 1 \\ \cot 0^\circ &= \frac{X}{Y} = \frac{1}{0} = \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 180^\circ &= \frac{Y}{R} = \frac{0}{-1} = 0 \\ \cos 180^\circ &= \frac{X}{R} = \frac{-1}{1} = -1 \\ \tan 180^\circ &= \frac{Y}{X} = \frac{0}{-1} = 0 \\ \csc 180^\circ &= \frac{R}{Y} = \frac{1}{0} = \infty \\ \sec 180^\circ &= \frac{R}{X} = \frac{1}{-1} = -1 \\ \cot 180^\circ &= \frac{X}{Y} = \frac{-1}{0} = \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 270^\circ &= \frac{Y}{R} = \frac{-1}{1} = -1 \\ \cos 270^\circ &= \frac{X}{R} = \frac{0}{1} = 0 \\ \tan 270^\circ &= \frac{Y}{X} = \frac{-1}{0} = \infty \\ \csc 270^\circ &= \frac{R}{Y} = \frac{1}{-1} = -1 \\ \sec 270^\circ &= \frac{R}{X} = \frac{1}{0} = \infty \\ \cot 270^\circ &= \frac{X}{Y} = \frac{0}{-1} = 0 \end{aligned}$$

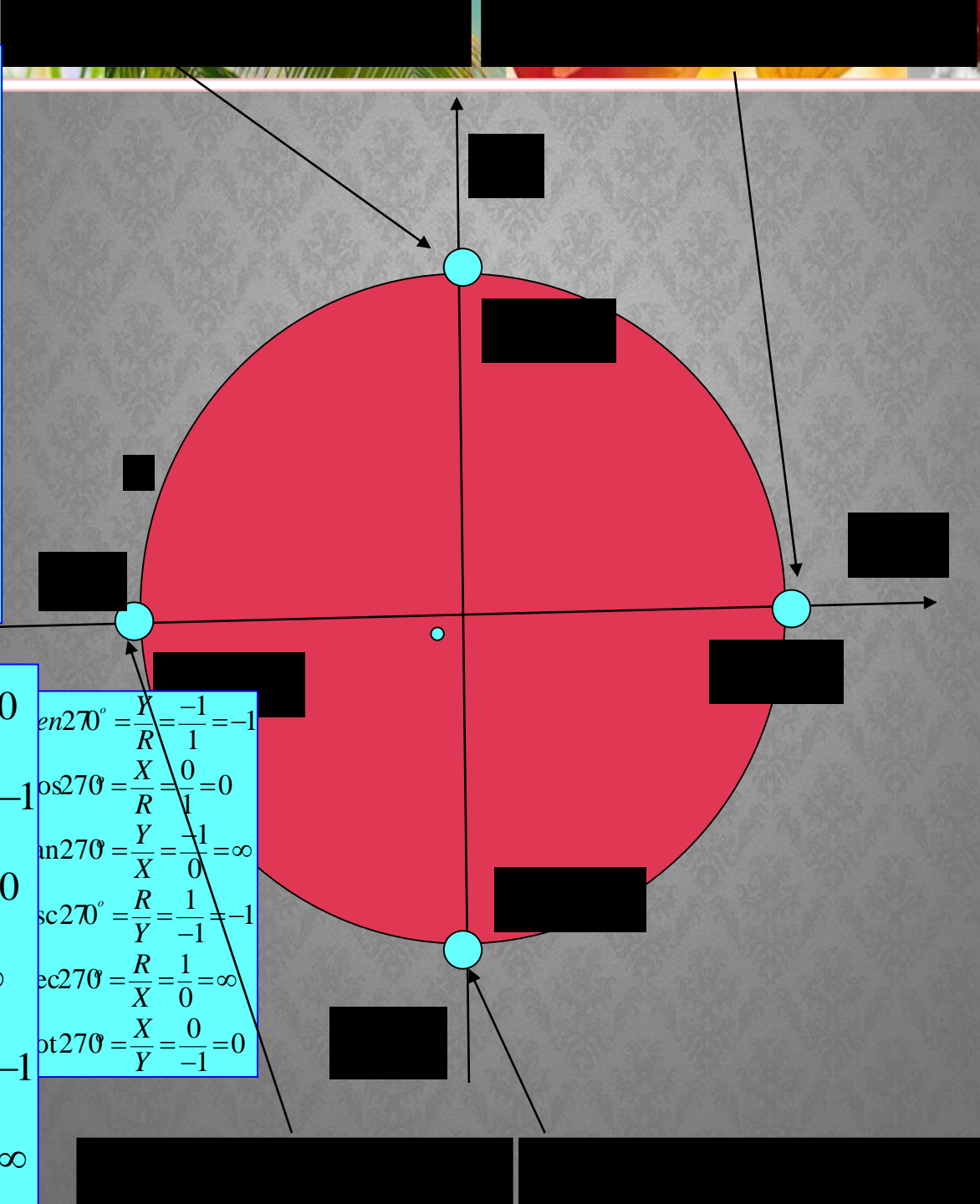


TABLA : FUNCIONES DE ÁNGULOS ESPECIALES

\emptyset	30	60	45	0	90	180	270
Sen	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$0/1=0$	$1/1=1$	$0/1=0$	$-1/1=-1$
Cos	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/1=1$	$0/1=0$	$-1/1=-1$	$0/1=0$
Tan	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$0/1=$	$1/0=\infty$	$0/-1=0$	$-1/0=\infty$
Cot	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1	$1/0=\infty$	$0/1=0$	$-1/0=\infty$	$0/-1=0$
Sec	$2/\sqrt{3}$	2	$\sqrt{2}$	$1/1=1$	$1/0=\infty$	$1/-1=-1$	$1/0=\infty$
csc	2	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$1/0=\infty$	$1/1=1$	$1/0=\infty$	$1/-1=1$