Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 14 - posición relativa de tres planos

1. Sean los planos $\Pi_1 : x+y=1$ **,** $\Pi_2 : a\,y+z=0$ **,** $\Pi_3 : x+(1+a)\,y+a\,z=a+1$ **.**

a) Cuánto debe valer a **para que no tengan ningún punto en común?**

b) Para $a=0$ **determina la posición relativa de los planos.**

a) Los planos no tendrán ningún punto en común si el sistema $3x3$ formado por sus tres ecuaciones generales resulta incompatible.

$$\begin{Bmatrix} x+y=1 \\ a\,y+z=0 \\ x+(1+a)\,y+a\,z=a+1 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Notación matricial} \rightarrow \quad A/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a & a+1 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz del sistema, calculando en primer lugar su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} = a^2+1+0-(0+0+1+a)=a^2-a=a(a-1)$$

El determinante se anula si y solo si $a=0\,,\,a=1$.

Realizamos la discusión de casos del rango en función de los valores del parámetro a .

- Si $a\neq 0$ o $a\neq 1$ $\rightarrow$ $det(A)\neq 0 \rightarrow rango(A)=3 \rightarrow rango(A/D)=3$ $\rightarrow$ Por Rouché-Frobenius estamos ante un sistema compatible determinado con solución única. Los tres planos se cortan en un punto.

- Si $a=0$ $\rightarrow$ $det(A)=0$ $\rightarrow$ Buscamos un menor no nulo $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\rightarrow$

  $|\alpha_{11}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$ $\rightarrow$ $rango(A)=2$ $\rightarrow$ Estudiamos el rango de la ampliado, comprobando en primer lugar la existencia de menores de orden 3 no nulos $\rightarrow$ $A/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\rightarrow$

  $|C_1\,C_2\,C_3|=0$ (coincide con el determinante de A)

$|C_1 C_2 C_4|=0$ (por tener las tres columnas iguales)

$|C_1 C_3 C_4|=0$ (por tener dos columnas iguales)

$|C_2 C_3 C_4|=0$ (por tener dos columnas iguales)

El rango de la ampliada también será dos, al no aparecer ningún menor de orden tres no nulo → $Rango(A)=2=Rango(A/D)<3=n^o\ incógnitas$ → Por Rouché-Frobenius estamos ante un sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones con un parámetro libre. La solución al sistema es una recta común a los tres planos

- Si $a=1$ → $det(A)=0$ → Buscamos un menor no nulo → $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ → $|\alpha_{11}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1$ → $rango(A)=2$ → Estudiamos el rango de la ampliado, comprobando en primer lugar la existencia de menores de orden 3 no nulos → $A/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$ →

  $|C_1 C_2 C_3|=0$ (coincide con el determinante de A)

  $|C_1 C_2 C_4|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2+1+0-(0+0+0)=2\neq 0$ → $rango(A/D)=3\neq 2=rango(A)$ →

  Por Rouché-Frobenius estamos ante un sistema incompatible. No hay solución. Los planos no tienen ningún punto en común si $a=1$.

b) Como hemos justificado en el apartado anterior, si $a=0$ → El rango de la ampliada también será dos, al no aparecer ningún menor de orden tres no nulo.

Esto implica → $Rango(A)=2=Rango(A/D)<3=n^o\ incógnitas$ → Por Rouché-Frobenius estamos ante un sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones con un parámetro libre. La solución al sistema es una recta común a los tres planos.

2. Sean los planos:

$\Pi_1 : 2x+2y+az=1$, $\Pi_2 : 2x+ay+2z=-2$ y $\Pi_3 : ax+2y+2z=1$

a) El valor de a para que los planos tengan una recta en común.

b) Hallar el vector director de dicha recta.

c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta común a los tres planos.

Debemos estudiar la solución común de los tres planos, lo cual reduce nuestro problema de geometría al estudio de la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{Bmatrix} 2x+2y+az=1 \\ 2x+ay+2z=-2 \\ ax+2y+2z=1 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Notación matricial} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & a & 1 \\ 2 & a & 2 & -2 \\ a & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz del sistema A y de la matriz ampliada A/C .

Si la solución del sistema es una recta, necesitamos que el sistema sea compatible indeterminado (infinitas soluciones), con un parámetro libre. Es decir, necesitamos:

$$rango(A)=rango(A/C)=2<3=número\ \ de\ \ incógnitas$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 2 & 2 \end{vmatrix}=4a+4a+4a-(a^3+8+8)=-a^3+12a-16=0 \rightarrow \quad a=2 \ \ , \ \ a=-4$$

Discusión de casos:

Si $a\neq 2$ y $a\neq -4$ → Solución única → Sistema compatible determinado → La solución es un punto. Este caso no nos da una recta solución.

Si $a=2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$ → El rango de A es 1, por tener tres columnas idénticas, por lo que solo hay un vector linealmente independiente. Este caso tampoco nos sirve, ya que necesitamos que el rango de A sea 2.

Si $a=-4 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$ → El rango de A es 2, ya que existe al menos un menor de orden 2 no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{11}|=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-8-4=-12\neq 0$.

Debemos estudiar el rango de la matriz ampliada A/C , para lo cual estudiamos todos los determinantes de orden 3 contenidos en la matriz ampliada.

$$|C_2 C_3 C_4| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4+16-8-(4-8+16)=0$$

$$|C_1 C_3 C_4| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4-32+4-(-8-8-8)=0$$

$$|C_1 C_2 C_4| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8+16+4-(16+4-8)=0$$

Todos los menores de orden 3 son nulos, por lo que el rango de la ampliada no es 3. Por lo tanto, el rango de la ampliada es 2, al estar la matriz A contenida dentro de la matriz ampliada.

Si $a=-4 \rightarrow rango(A)=rango(A/C)=2<3=número\ de\ incógnitas \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado (3 – 2 = 1 parámetro libre). La solución común a los tres planos es una recta.

b) Buscamos la ecuación de la recta solución, para obtener un vector director de la misma.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \text{SCI} \rightarrow \text{Tomamos como parámetro} \quad z=\lambda$$

Reduciendo nuestro estudio a un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+2y=1+4\lambda \\ 2x-4y=-2-2\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \text{Restamos} \rightarrow \quad 6y=3+6\lambda \quad \rightarrow \quad y=\frac{1}{2}+\lambda$$

Llevamos este valor a la primera de las ecuaciones del sistema.

$$2x+2\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)=1+4\lambda \quad \rightarrow \quad 2x+1+2\lambda=1+4\lambda \quad \rightarrow \quad 2x=2\lambda \quad \rightarrow \quad x=\lambda$$

La recta solución, en paramétricas, resulta: $r:\left\{\begin{array}{c} x=\lambda \\ y=\frac{1}{2}+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow$ Vector director $\vec{u}_r=(1,1,1)$

c) La ecuación paramétrica de la recta la hemos obtenido en el apartado anterior.

$$r:\left\{\begin{array}{c} x=\lambda \\ y=\frac{1}{2}+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$