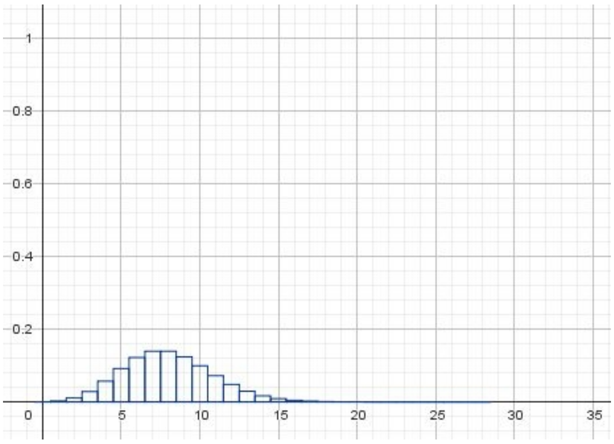
☺ Distribución de Poisson. X ~ P(λ).

Una v. a. X tiene distribución de Poisson com media $\lambda, \lambda > 0$

si tiene como función de probabilidad: $f_X(x) =$

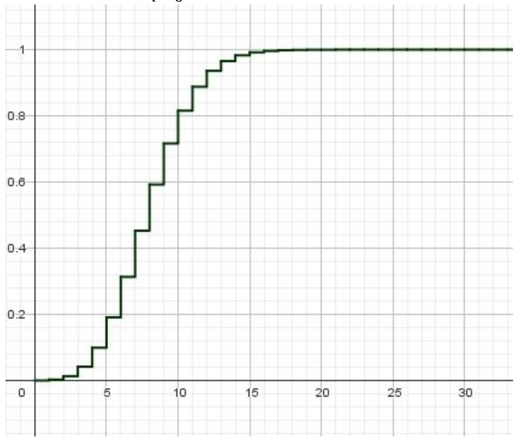
$$= 0 \cdot I_{\{\mathbb{R}-\mathbb{N}\}}(x) + \frac{e^{-x} \cdot \lambda^x}{x!} \cdot I_{\{\mathbb{N}\}}(x)$$



Ejemplo de f(x) para $\lambda = 8$.

Y cuya función de distribución es: $F_X(x) =$

$$= 0 \cdot I_{(-\infty,0)}(x) + \sum_{i=0}^{[x]} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^i}{i!} \cdot I_{[0,+\infty)}(x)$$



Ejemplo de F(x) para $\lambda = 8$.

Además

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) \quad .$$

Algunos de sus parámetros o momentos destacables son:

✔ $$E\{X^k\} = \sum_{i=0}^{n} i^k \cdot f(i) = \sum_{i=0}^{+\infty} i^k \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^i}{i!} ; \forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

Para $k = 1$, Se cumple:

$$E\{X\} = \sum_{i=0}^{n} i \cdot f(i) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot f(i) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \lambda .$$

Para $k = 2$, Se cumple:

$$E\{X^2\} = \sum_{i=0}^{n} i^2 \cdot f(i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \cdot f(i) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} i \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} =$$

$$= \lambda \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} + \lambda \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \lambda^2 + \lambda .$$

✔ $$E\{(X-\alpha)^k\} = \sum_{i=0}^{n} (i - E\{X\})^k \cdot f(i) = \sum_{i=0}^{+\infty} (i-\lambda)^k \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^i}{i!} ; \forall k \in \mathbb{N} - \{0\} \quad .$$

En particular si $k = 2$, se cumple:

$$E\{(X-\alpha)^2\} = E\{X^2\} - (E\{X\})^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda = \mu_2$$

✔ $$\phi_X(t)=E\{e^{X\cdot t\cdot \hat{\imath}}\}=\sum_{k=0}^{n} e^{k\cdot t\cdot \hat{\imath}}\cdot f(k)=\sum_{k=0}^{n} e^{k\cdot t\cdot \hat{\imath}}\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{k\cdot t\cdot \hat{\imath}}\cdot\lambda^k}{k!}=$$
$$=e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\lambda\cdot e^{t\cdot \hat{\imath}}\right)^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda\cdot e^{t\cdot \hat{\imath}}}=e^{\lambda\cdot\left(e^{t\cdot \hat{\imath}}-1\right)}$$

Observaciones:

- Al distribución de Poisson también se le denomina a veces de Sucesos Raros.
- Si $X\sim Bi(n,p)$ y $n\Rightarrow+\infty$, entonces, $X\sim P(n\cdot p)$.

  En la práctica, se utiliza si $p\leq 0{,}1$ y $n\cdot p\leq 5$.