Oživlé příklady z KABARA I.

https://www.geogebra.org/m/mzypchq6

KASTROL-I-3-3-2 (Chris Půdorys si hrál)

Chris Půdorys si hrál s pružinou od propisky. Chtěl ji použít jako hnací sílu, kterou bude střílet po paní učitelce Věrce papírové kuličky.
Říkal si, když stlačím pružinu, vykonám jistou práci, která bude v pružině uložena v podobě potenciální energie pružnosti. Tuto energii potom využiju na vystřelení kuličky.
Při svých pokusech zjistil, že čím více pružinu stlačí (o hodnotu y), tím více se tomu pružina brání a on musí použít tím větší sílu F. Změřil několik hodnot y a F a zapsal si je do tabulky. Měření provedl pro dvě různě silné pružiny.

slabší pružina					
F[N]	1	2	3	4	5
y[mm]	2	4	6	8	10

silnější pružina					
F[N]	1	2	3	4	5
y[mm]	1	2	3	4	5

Chris si uvědomil, že závislost síly na velikosti stlačení je *přímá úměrnost*, tedy že např. dvojnásobná síla vyvolá dvojnásobné stlačení.

a) Zapiš obecný vztah pro přímou úměrnost mezi silou a stlačením pružiny.
b) Urči konstanty úměrnosti mezi silou a stlačením pro obě pružiny.
c) Jakou práci vykonáme při stlačení pružin o 2 cm?

KASTROL-I-3-3-2 (Chris Půdorys si hrál)

a) $\boxed{F = ky}$

b) $\boxed{k = \frac{F}{y}}$ $\boxed{k_1 = 500\,\mathrm{N \cdot m}}$ $\boxed{k_2 = 1000\,\mathrm{N \cdot m}}$

c) $\boxed{A = \frac{1}{2}ky^2}$ $\boxed{A_1 = 0{,}10\,\mathrm{J}}$ $\boxed{A_2 = 0{,}20\,\mathrm{J}}$

a) Matematicky je přímá úměrnost mezi proměnnými y a x vyjádřena vztahem $y = k \cdot x$, kde k se nazývá *konstanta přímé úměrnosti.* Fyzikálně tedy bude v našem případě dána tato přímá úměrnost vztahem

$$\boxed{F = k \cdot y} \tag{a}$$

b) Ze vztahu (a) vyjádříme konstantu k:

$$\boxed{k = \frac{F}{y}} \tag{b}$$

Nyní určíme číselně tuto konstantu pro obě pružiny. Dosadit můžeme samozřejmě kteroukoli dvojici F a y z tabulky, třeba tu poslední.

Slabší pružina:

$$k_1 = \frac{5\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{mm}} = 0{,}5\,\mathrm{N \cdot mm^{-1}}$$

Silnější pružina:

$$k_2 = \frac{5\,\mathrm{N}}{5\,\mathrm{mm}} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{mm}^{-1}$$

Tato konstanta říká, jakou sílu musíme použít, aby se pružina stlačila o jeden milimetr. Vidíme, že silnější pružina má konstantu dvakrát větší než pružina slabší, takže na její stlačení o tutéž délku je potřeba dvojnásobná síla.

Mohli bychom tedy říci, že silnější pružina je dvakrát silnější, ale místo toho použijeme zavedenou fyzikální veličinu - **tuhost pružiny**. Řekneme, že tuhost slabší pružiny je $k_1 = 0{,}5\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{mm}^{-1}$ a tuhost silnější pružiny je $k_2 = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{mm}^{-1}$.

Tuhost pružiny je tedy konstantou úměrnosti ve vztahu (a) a je definována vztahem (b). Většinou se udává v jednotkách $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

Takže v našem případě dostáváme

$$k_1 = \boxed{500\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}}$$

$$k_2 = \boxed{1000\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}}$$

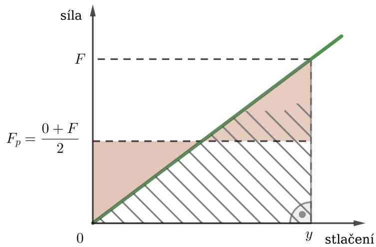
c) Blbý je, že vzorec pro výpočet práce $A = Fs$ lze použít jen v případě, že síla je **konstantní**. Ale při stlačování pružiny se síla potřebná ke stlačení zvětšuje! Co s tím? Naštěstí z toho snadno vybruslíme.

Použijeme sílu průměrnou a řekneme si, že pomyslná průměrná síla vykoná stejnou práci jako skutečná síla proměnlivá. No jó, ale kde vzít průměrnou sílu?

Síla se naštěstí zvětšuje **lineárně** (tabulky ze zadání převedené do grafu dávají přece lajnu) a díky tomu si můžeme říci, že průměrná síla bude jistojistě aritmetickým průměrem počáteční a koncové hodnoty (podobně se počítá průměrná rychlost auta u RZP) Ale počáteční síla je pro $y = 0$ nulová a koncová síla je $F = ky$, takže průměrná síla F_p bude

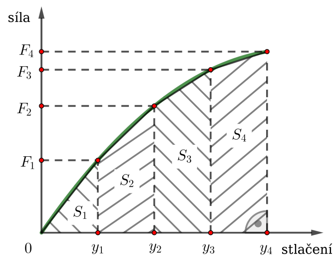
$$F_p = \frac{0 + ky}{2} = \frac{1}{2}ky \qquad \text{(c)}$$

Poznámka. *Poznámka:*
Kdyby se síla nezvětšovala lineárně, tak by byl větší problém určit tu průměrnou sílu. Ale šlo by to, neboj! Šlo by vlastně jen o určení obsahu plochy pod grafem síly v závislosti na dráze – o tom jsme již mluvili v kapitole o práci. Říkali jsme, že **velikost vykonané práce je číselně rovna ploše pod grafem síly v závislosti na dráze**.



V tomto našem případě se jedná jedno-duše o plochu pravoúhlého trojúhelníka, a vskutku dostáváme vztah

$$A = \frac{1}{2} \times \text{základna} \times \text{výška} = \frac{1}{2}Fy$$



Pokud by grafanec byl zakřivený, tak ho holt musíme rozřezat na kousky a nahradit lineárními úseky, čímž se dopouštíme chyby, kterou lze ale limitně libovolně snižovat k nule, vole!

$$[A] = [plocha]$$

No takže pro práci dostáváme

$$A = F_p y = \frac{1}{2}ky \cdot y$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}ky^2}$$

Tuto práci tedy musí Chris vykonat při stlačení pružiny. A pružina tím získá tu kýženou potenciální energii pružnosti, která se pak přemění na kinetickou energii té papírové kuličky, která nakonec zasáhne Věru. No já už se fakt nemůžu dočkat, to bude extáze!

Čiliž číselně:

$$A_1 = \frac{1}{2}k_1y^2 = 0.5 \cdot 500 \cdot 0,02^2 = \boxed{0{,}10\,\mathrm{J}}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}k_2y^2 = 0.5 \cdot 1000 \cdot 0,02^2 = \boxed{0{,}20\,\mathrm{J}}$$

No a můžeme jít střílet!