Sucesos dependientes e independientes. Probabilidad condicionada

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach CCSS	PROBABILIDAD	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

Pensemos en el experimento siguiente. Tenemos una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas negras, y sacamos dos bolas al azar.

Si al sacar la primera bola, la dejamos fuera de la bolsa y procedemos a sacar la segunda, es evidente que los resultados de la segunda extracción dependen de lo que ha pasado en la primera extracción. En este caso, sacar la primera bola y sacar la segunda bola son **sucesos dependientes: el segundo suceso depende del resultado del primero**.

Pero si al sacar la primera bola, la volvemos a introducir en la bolsa y realizamos la segunda extracción, queda claro que ambas extracciones son absolutamente independientes. Si metemos la primera bola extraída nuevamente en la bolsa, **el resultado del segundo suceso no depende para nada de lo que haya pasado en el primero. Los sucesos son independientes.**

¿Cuál es la notación matemática para indicar la probabilidad de sucesos dependientes?

P(B/A) → Se lee de la siguiente forma: **"Probabilidad de B condicionada a que ocurra A"**. Es decir, **probabilidad de que ocurra B si antes ha ocurrido A**.

¿Cómo se calcula P(B/A)?

Dentro de poco lo veremos, joven aprendiz del mundo de la probabilidad.

Lo que sí estamos en disposición de comprender es que, **en dos sucesos independientes** (no confundir con incompatibles), **la probabilidad de la intersección es igual a la probabilidad del primero por la probabilidad del segundo** (este es un dato que ya habíamos intuido en apartados anteriores).

Cuando los resultados de dos sucesos no dependen entre sí, la probabilidad de la intersección de ambos sucesos se calcula simplemente multiplicando las probabilidades de casa suceso por separado.

Si A y B son independientes → $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

¿Qué ocurre si A y B son dependientes?

La probabilidad de la intersección dependerá de la probabilidad condicionada P(B/A).

Si A y B son dependientes → $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

¡OJO! SUCESOS INDEPENDIENTES NO SON LO MISMO QUE INCOMPATIBLES

Los sucesos dependientes y los sucesos independientes ocurren uno a continuación del otro: primero ocurre A y luego ocurre B. Si el resultado de B depende de lo que haya pasado antes con A, son dependientes. En caso contrario, son independientes.

Por ejemplo: sacar dos bolas sin reposición de una bolsa, son sucesos dependientes. Y sacar bolas con reposición son sucesos independientes.

Los sucesos compatibles y los sucesos incompatibles ocurren de manera simultánea. Si tienen elementos en común con compatibles. Si no tienen elementos en común son incompatibles.

Por ejemplo: dado el experimento de lanzar un dado, puedo considerar de manera simultánea el suceso “salir par” y el suceso “salir impar”. No tienen elementos en común, por lo que son incompatibles.

Si considero el suceso “salir par” y el suceso “ser múltiplo de tres”, tienen el valor 6 en común, por lo que son sucesos compatibles.

EJEMPLO RESUELTO

Tenemos una bolsa con 7 bolas rojas (R) y 3 bolas negras (N). Sacamos dos bolas al azar. ¿Qué probabilidad hay se sacar R y R?

Considerar el caso de que la primera bola extraída vuelve a la bolsa (con reemplazamiento) y el caso de que la primera bola no vuelva a la bolsa (sin reemplazamiento).

Llamamos a la primera extracción de la bola roja suceso A, y a la segunda extracción de la bola roja suceso B. Sabemos que la conjunción “y” en la expresión “Roja y Roja” se sustituye por el operador intersección. Por lo que **debemos calcular $P(A \cap B)$.**

Con reemplazamiento (sucesos independientes): al extraer la primera bola (suceso A), la volvemos a introducir en la bolsa y luego sacamos la segunda (suceso B). Con estas condiciones, las dos extracciones son independientes. La probabilidad de la intersección se calcula: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Sacar primera roja → $P(A) = 7/10$ (casos favorables entre casos totales)

Sacar segunda roja → $P(B) =7(10)$ (casos favorables entre casos totales)

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 7/10 \cdot 7/10 = 49/100$

Sin reemplazamiento (sucesos dependientes): ahora, el resultado de B depende de lo acontecido en A. Por lo tanto, la fórmula para obtener la probabilidad de la intersección será: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

$P(A)$ sigue siendo la probabilidad de que ocurra A. $P(B/A)$ es la probabilidad de que ocurra B si antes ha ocurrido A.

Sacar primera roja → $P(A) = 7/10$ (casos favorables entre casos totales)

Sacar segunda roja cuando antes hemos sacado la primera roja → Tras la primera extracción de una bola roja, quedarán 9 bolas (6 R y 3 N) → $P(B/A) = 6/9 = 2/3$ (casos favorables entre casos totales).

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 7/10 \cdot 2/3 = 14/30 = 7/15$

Si hubiéramos dibujado un diagrama de árbol, tendríamos una primera rama con probabilidad 7/10 y, a continuación, una segunda rama con probabilidad 6/9.

En este tipo de ejercicios, en Selectividad, a veces piden dibujar el diagrama de árbol. Si no lo piden, podemos razonar los resultados de palabra tal y como aparece en este ejemplo.

PROBABILIDAD DE LA INTERSECCIÓN

En sucesos independientes se cumple: P(A ∩ B) = P(A)·P(B).

En sucesos dependientes se cumple: P(A ∩ B) = P(A)·P(B/A) → Estamos ante una **probabilidad compuesta**, donde P(A) indica la probabilidad del suceso A y P(B/A) indica la probabilidad de que ocurra B si antes se ha cumplido A. Importante el orden: primero acontece A y luego acontece B.

¡Ojo! Si fuese al revés, la probabilidad compuesta sería: P(B ∩ A) = P(B)·P(A/B).

En sucesos dependientes es claro que: **P(B/A) ≠ P(B) y P(A/B) ≠ P(A)** → ¡Muy importante! Una cosa es la probabilidad de B (P(B)) y otra cosa es la probabilidad de B condicionada a que antes ocurra A (P(B/A)).

¿CÓMO SE CALCULA LA PROBABILIDAD CONDICIONADA P(B/A)?

Depende del tipo de ejercicio que estemos resolviendo.

En sucesos independientes no hay condicionamiento, por lo que se cumplen las siguientes igualdades: $P(B/A) = P(B/\bar{A}) = P(B)$ y $P(A/B) = P(A/\bar{B}) = P(A)$. Es lógico, piénsalo bien. Si B no depende de A, la probabilidad de B no se ve afectada por lo que haya pasado antes con A.

En sucesos dependientes, el valor de P(B/A) se obtiene mediante razonamiento lógico de casos favorables dividido entre casos posibles (regla de Laplace). Tal y como hemos razonado en apartados anteriores al dibujar diagramas de árbol y las probabilidades de cada rama.

En ocasiones no tenemos información suficiente para aplicar la regla de Laplace, pero si conocemos la probabilidad de la intersección y la probabilidad de A siempre podemos despejar la siguiente expresión:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \rightarrow \boldsymbol{P(B/A)} = \frac{\boldsymbol{P(A \cap B)}}{\boldsymbol{P(A)}}\ , siempre\ que\ P(A) \neq 0$$

Si intercambiamos el orden en que acontecen los sucesos, tendríamos la siguiente igualdad:

$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B) \rightarrow \boldsymbol{P(A/B)} = \frac{\boldsymbol{P(B \cap A)}}{\boldsymbol{P(B)}}\ , siempre\ que\ P(B) \neq 0$$

RECUERDA: SUCESO INDEPENDIENTE NO ES LO MISMO QUE SUCESO INCOMPATIBLE

En sucesos incompatibles (sin elementos en común) → A ∩ B = ∅ → P(A ∩ B) = 0.

En sucesos incompatibles (sin elementos en común) → $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

En sucesos compatibles (con elementos en común) → $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.