Teoría – Tema 2

Teoría - 8b - repaso al método de aplicar logaritmo en límites 0 elevado a 0, infinito elevado a 0, 1 elevado a infinito

Propiedades del logaritmo y su aplicación en límites

En 1ºBachillerato estudiamos que las indeterminaciones 0 elevado a 0, infinito elevado a 0 y 1 elevado a 0 se pueden resolver aplicando logaritmo neperiano, resolviendo el nuevo límite buscando una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$, para finalmente aplicar exponencial con la que cancelar el primer logaritmo.

Repasemos este método.

El logaritmo es la función inversa a la exponencial.

Si la base del logaritmo es el número e , hablamos de logaritmo neperiano o natural (ln). Si la base es 10, hablamos de logaritmo decimal o en base 10 (lg).

Por lo tanto:

$$\log(10^x)=10^{\log(x)}=x$$
$$\ln(e^x)=e^{\ln(x)}=x$$

Como ya sabemos de cursos anteriores, el logaritmo de un producto es igual a la suma de logaritmos.

$$\log(x\cdot y)=\log x+\log y$$

Asimismo, el logaritmo de un cociente es la diferencia de logaritmos.

$$\log\left(\frac{x}{y}\right)=\log x-\log y$$

El logaritmo de una potencia es el exponente de la potencia por el logaritmo de la base.

$$\log(x^y)=y\cdot\log x$$

No debemos confundir esta última propiedad con el hecho de que todo el logaritmo esté elevado a un exponente. Es decir: $\log(x^y)\neq\log^y x$.

Pues bien, **en ciertos límites que al ser evaluados tienden a** 0^0 **,** ∞^0 **o** 1^∞ **podemos aplicar logaritmo para convertir el límite en un caso** $0\cdot\infty$ **que podamos resolver por técnicas estudiadas el curso pasado**. Sin olvidar que, **al final del cálculo**, deberemos **aplicar la función exponencial** para recuperar el límite de partida.

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

Una vez tengamos la indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$ podemos manipular el límite para conseguir una indeterminación $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y poder resolver por L'Hôpital o por otra técnica apropiada

Ejemplo 1 resuelto

Resuelve $\lim_{x \to 0^+} x^x = 0^0$

Aplicamos logaritmo neperiano a todo el límite.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x^x) = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} \to L'Hôpital \to \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

$e^0 = 1$ ==> $\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$