A) Título: **A través del túnel**

En la matemática, las derivadas y las integrales son las herramientas fundamentales del cálculo, nos permiten modelar todos los aspectos de la naturaleza en las ciencias físicas.

A través de estos nuevos conceptos desarrollados en el siglo XVII, por dos grandes matemáticos: Newton y Leibniz, un gran número de problemas que se pueden apreciar en la vida cotidiana son estudiados.

B) Fotografía elegida:

C) Situación problemática:

El subterráneo en la Ciudad de Buenos Aires es el segundo medio de transporte más utilizado, por lo cual se quiere realizar la más atractiva planificación de una nueva línea "G" con el objetivo de generar fluidez al tránsito en calles y avenidas, proyectada para armar un túnel que una Retiro y el monumento al Cid Campeador, también conocido como las "7 esquinas".
Los arquitectos encargados del proyecto se realizan un par de preguntas a la hora de comenzar la construcción:

- ¿Cuál es el área ocupada por un túnel subterráneo?
- ¿Cuál es la altura y el ancho máximo que debe tener un túnel subterráneo?

Resolución:
Para poder comenzar el proyecto se debe tener primero en cuenta las medidas del túnel subterráneo cuyo ancho debe ser de 6,4 m y la altura de 4,56 m. Mientras que el área que ocupa el túnel es de 26,26 m, estas medidas son aproximadas y básicas para que luego los subtes puedan desplazarse cómodamente.

D) Justificación algebraicamente en Geogebra:

Luego de ingresar la imagen y ajustarlo en Geogebra, se ubican 5 puntos (C,D,E,F,G) sobre el túnel de la imagen. En la Entrada con AjustePolinómico se ingresan los 5 puntos y el grado del polinomio que deseamos, grado 4:

$$F(x) = \text{AjustePolinómico}(\{C, D, E, F_1, G\}, 4)$$

$$\rightarrow \quad -0.01\, x^4 + 0.3\, x^3 - 2.85\, x^2 + 12.45\, x - 16.17$$

A partir del polinomio hallado se comienza a realizar el análisis solicitado:

1- Para poder hallar el área bajo la curva se ingresa en la Entrada: el polinomio y se define el intervalo que se desea estudiar que se determinó por los 2 puntos (H e I), siendo el intervalo [3;9,4]:

$$\text{Área} = \text{IntegralN}(F, x(H), x(I))$$

$$\rightarrow \quad 26.26$$

El area bajo la curva se calcula a partir de la integral de la función definida en un intervalo [a,b], siendo b el limite superior y a el limite inferior. Estos tipos de problemas, medición del área encerrada por líneas curvas, no se resolvió hasta finales del siglo XVII con el descubrimiento del cálculo integral.
La integral definida de $f(x)$ en el intervalo se escribe (regla de Barrow):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Área del túnel= $\int_3^{9,4} -0{,}01x^4 + 0{,}3x^3 - 2{,}85x^2 + 12{,}45x - 16{,}17 \; dx$

Integro:

$$= -0{,}002x^5 + 0{,}075x^4 - 0{,}95x^3 + 6{,}225x^2 - 16{,}17x|\,_3^{9,4}$$

$$= \left(-0{,}002.(9{,}4)^5 + 0{,}07.(9{,}4)^4 - 0{,}95.(9{,}4)^3 + 6{,}23.(9{,}4)^2 - 16{,}17.(9{,}4)\right) - \left(-0{,}002.(3)^5 + 0{,}07.(3)^4 - 0{,}95.(3)^3 + 6{,}23.(3)^2 - 16{,}17.(3)\right)$$

$\rightarrow \quad = 9{,}147 - (-12{,}906) \cong 22{,}053$[1]

También se puede calcular la integral en la aplicación ingresando en la entrada:

$$f(x) = \text{Integral}(F)$$

$$\rightarrow \quad 0\, x^5 + 0.07\, x^4 - 0.95\, x^3 + 6.23\, x^2 - 16.17\, x$$

2- Para saber la altura máxima del túnel, se debe realizar el siguiente procedimiento:

- Hallar la derivada primera de la cual obtenemos el crecimiento y decrecimiento de una función y los posibles máximos y mínimos relativos*:*

---

[1] El resultado obtenido es una aproximación del área bajo la curva ya que al utilizar un conjunto denso como los números decimales para realizar los cálculos se realizó anteriormente un redondeo de los mismos produciendo que el resultado sea impreciso.

$$\mathrm{F}'(\mathrm{x}) = \mathrm{Derivada}(\mathrm{F})$$

$$\rightarrow \quad -0.05\, x^3 + 0.89\, x^2 - 5.7\, x + 12.45$$

- Calcular las raíces de la primera derivada:
  F'(x)= $-0{,}05x^3 + 0{,}89x^2 + 5{,}7x + 12{,}45 = 0$

$$\mathrm{J} = \mathrm{Raíz}(\mathrm{F}')$$

$$\rightarrow \quad (6.16,\ 0)$$

- Hallar la segunda derivada, y calcular el signo que toman en ella las raíces de la derivada primera, y si:
  -f"(a) < 0 es un **máximo.**
  -f"(a) > 0 es un **mínimo.**

$$\mathrm{F}''(\mathrm{x}) = \mathrm{Derivada}(\mathrm{F}')$$

$$\rightarrow \quad -0.14\, x^2 + 1.77\, x - 5.7$$

- Calculamos la imagen en la función original, reemplazando las raíces obtenidas por la derivada primera.
  $\mathrm{F}(6{,}16) = -0{,}01.\,6{,}16^4 + 0{,}3.\,6{,}16^3 - 2{,}85.\,6{,}16^2 + 12{,}45.6{,}16 - 16.17$
  F(6,16) = 8,1[2].

Con el Geogebra se puede obtener la altura máxima escribiendo en Entrada:

$$\mathrm{Alto} = \mathrm{Extremo}(\mathrm{F})$$

$$\rightarrow \quad (6.16,\ 4.56)$$

Obteniendo así que la altura del túnel es de 4,56 m.

3- Para poder obtener el ancho del túnel se debe aplicar el Teorema de Pitágoras: la distancia entre dos puntos: C (3,12;2,8) y G (9,42;2,8), utilizando la opción segmento cuyos extremos son los puntos mencionados dando como resultado que el ancho del túnel es de 6,4 m:

$$\mathrm{Ancho} : \mathrm{Segmento}(\mathrm{C}, \mathrm{G})$$

$$\rightarrow \quad 6.4$$

Fórmula:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(C,G) = \sqrt{(9{,}42 - 3{,}12)^2 + (2{,}8 - 2{,}8)^2}$$

$$d(C,G) = \sqrt{88{,}7364 - 58{,}7808 + 9{,}7344}$$

$$d(C,G) = \sqrt{39{,}69}$$

$$d(C,G) = 6{,}3$$

[2] El resultado obtenido es una aproximación de la altura máxima ya que al utilizar un conjunto denso como los números decimales para realizar los cálculos se realizó anteriormente un redondeo de los mismos produciendo que el resultado sea impreciso.

Vista gráfica Geogebra: