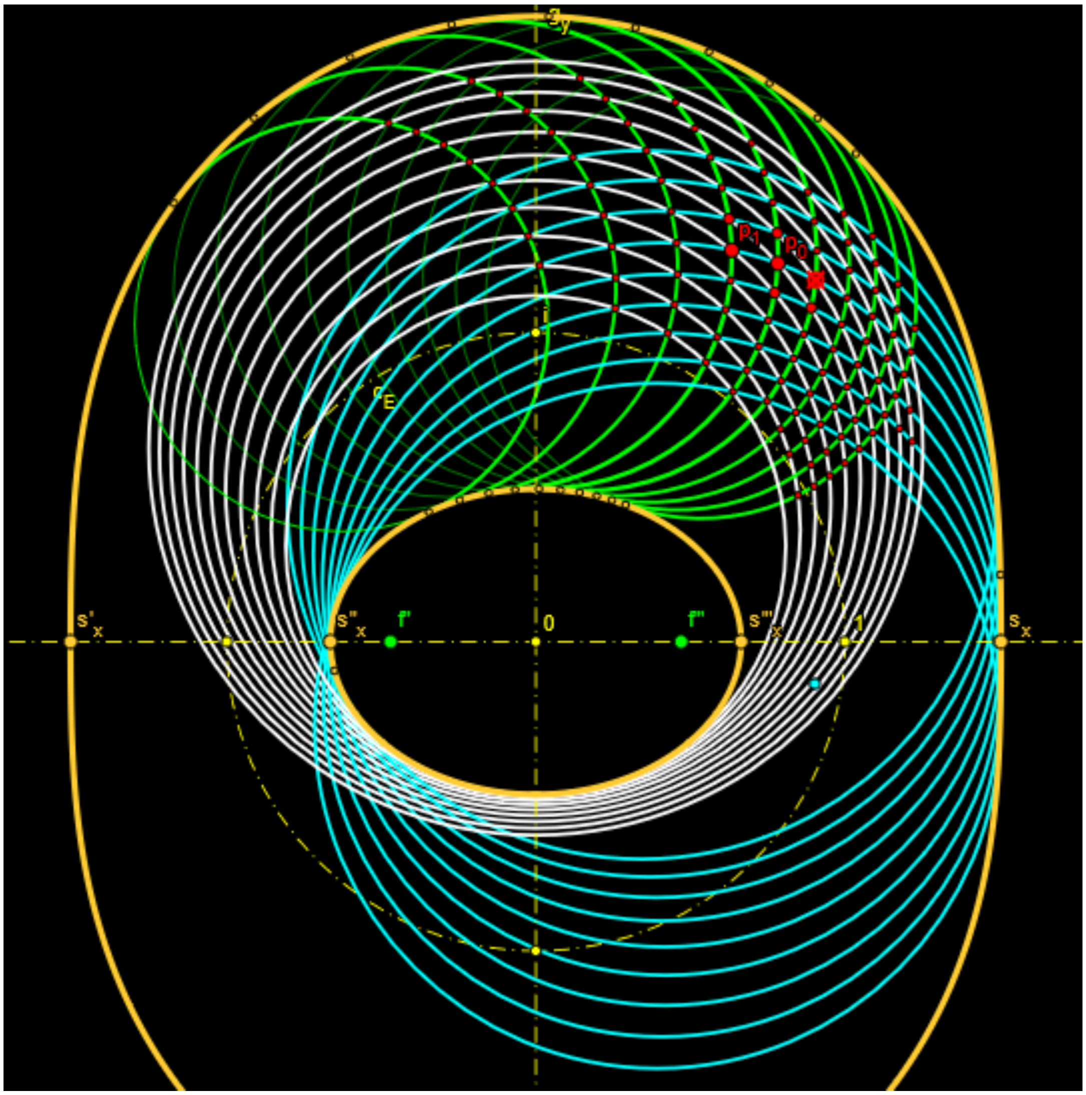
GeoGebra

summary

Author: Walter Füchte

Hommage an Walter Wunderlich



geogebra-book **elliptische-Funktionen&&Kreisbüschel&&bizirkulare-Quartiken&&6-Eck-Netze-aus-Kreisen**

Link ⟷ ***https://www.geogebra.org/m/nzfg796n***

Elliptische Funktionen lassen sich charakterisieren durch eine ***elliptische Differential-Gleichung*** des Typs

- $(g')^2 = c \cdot (g - f_1) \cdot (g - f_2) \cdot (g - f_3) \cdot (g - f_4)$ mit komplexen $c, f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{C}$

Für die **WEIERSTRASS**sche $\wp$ -Funktion ist einer der **4** ***Brennpunkte*** ∞ .

≡ GeoGebra ⋮

Kreisbüschel werden beschrieben durch eine ***Differentialgleichung*** $p' = c \cdot (p - f_1) \cdot (p - f_2)$ mit geeignetem c.
Eine ***Elliptische Funktion*** ist auf mehrfache Weise das Produkt zweier ***Kreisbüschel***,
Lösungskurven sind dann Winkelhalbierende der ***Kreise*** aus den **2** ***Büscheln***.
4 verschiedene ("***Brenn***")-Punkte lassen sich durch eine geeignete ***Möbiustransformation*** abbilden auf $f, -f, \frac{1}{f}, \frac{-1}{f}$ mit komplexem $f \notin \{0, \infty, 1, -1, i, -i\}$.
Ist die ***absolute Invariante*** $J_{\{abs\}}$ der **4** ***Brennpunkte*** -d.i. auch die ***absolute Invariante*** der ***elliptischen Differentialgleichung*** - reell, so sind ***konfokale bizirkulare Quartiken Lösungskurven***:
2-teilige für $J_{\{abs\}} \geq 0$, 1-teilige für $J_{\{abs\}} \leq 0$. Für $J_{\{abs\}} = 0$ gilt beides: die 1-teiligen schneiden die 2-teiligen unter 45°: ***harmonische Lage*** der ***Brennpunkte***.
Tetraederlage: $J_{\{abs\}} = -1$, zu jeder Paarbildung der ***Brennpunkte*** sind ***konfokale*** 1-teilige ***Quartiken Lösungskurven***; sie schneiden sich unter Vielfachen von 30°. Die ***Brennpunkte*** sind - auf der ***Möbiusquadrik*** - die Ecken eines regulären***Tetraeders***.
Die Eigenschaften ***konfokaler bizirkularer Quartiken*** sind mindestens so faszinierend wie die der ***konfokalen Kegelschnitte***, welche ***möbiusgeometrisch*** eigentlich nur Spezialfälle sind: von den **4** ***Brennpunkten*** fallen **2** oder **3** zusammen!
Geometrisch lassen sich ***bizirkulare Quartiken*** durch ihre ***Brennpunkte***, ihre ***Leitkreise*** und die ***doppelt-berührenden Kreise*** als Hüllkurven beschreiben.
Obwohl zu diesen Quartiken einige spezielle bekannte historische Kurven gehören, hat diese Kurvenklasse noch keinen Einzug in **wikipedia** gehalten.
Mindestens ebenso faszinierend sind die **3**-dimensionalen Pendants: die ***konfokalen DARBOUX Cycliden***, zu denen auch die ***konfokalen Quadriken*** gehören.
geogebra-book **conics bicircular-quartics Darboux-cyclides** ⟷ [***https://www.geogebra.org/m/gz4cyje5***](https://www.geogebra.org/m/gz4cyje5)

W. Blaschke stellte **1938** die Frage nach allen ***6-Eck-Geweben*** aus ***Kreisen***. Gelöst war zu der Zeit die Frage nach allen ***geradlinigen 6-Eck-Geweben***: Satz von **Graf** und **Sauer**: diese Gewebe entstehen aus den ***Tangenten*** einer Kurve 3. Klasse.
Kurioser Weise ist **Blaschke**s Problem **3D** für ***Kreise*** auf Flächen gelöst: nur auf ***DARBOUX Cycliden*** existieren solche ***Kreis-***Gewebe; und sie sind alle erfaßt!
Einzige Ausnahme: für ***Kreise*** auf ***Ebenen*** oder ***Kugeln*** ist **Blaschke**s Problem weiter ungelöst!
Ein wunderschöner Referenzartikel zu allen bisher bekannten ebenen ***6-Eck-Geweben*** aus ***Kreisen*** ist **Walter Wunderlich**s Arbeit von **1938** "*Über ein besonderes Dreiecksnetz aus Kreisen*":
2-teilige ***bizirkulare Quartiken*** besitzen **4** paarweise ***orthogonale Symmetriekreise*** und dazu **4** Scharen ***doppelt-berührender Kreise***. Aus drei dieser Scharen läßt sich ein ***6-Eck-Gewebe*** erzeugen.

GeoGebra

2013 veröffentlichte **Fjodor Nilov** **5** bis dahin unbekannte ***6-Eck-Gewebe*** aus ***Kreisen***, zugrunde liegen allen Beispielen spezielle ***Kegelschnitte***.
Wir konnten **4** der Beispiele verallgemeinern zu eine Reihe von bisher unbekannten ***6-Eck-Geweben***, die ***bizirkulare Quartiken*** zugrunde legen.
Wie rechnet man so etwas? Leider ist ein gut passender spezieller Kalkül für ***Kreise*** uns nicht zugeflogen.
Für ***Kreisbüschel*** jedoch gibt es einen einfachen, genau passenden Kalkül:
Die ebene ***Möbius-Gruppe*** ist isomorph zur komplexen $\mathbf{SO}(3,\mathbb{C})$. (Vor vielen Jahren fand man diese sehr nützliche Repräsentation noch auf wikipedia - dort ist sie schon lange verschwunden!?) Die **LIE**-Algebra hierzu ist die Komplexifizierung des ***Euklidischen Vektorraum***s: das ***Kreuzprodukt*** wird zum **LIE**-Produkt, das ***Skalarprodukt*** wird zu einer ***symmetrischen nicht-ausgearteten*** und natürlich nicht mehr positiv-definiten ***Bilinearform***.
Die Punkte (Vektoren) auf der entstehenden ***Quadrik*** lassen sich als ***parabolische Kreisbüschel*** deuten, die anderen Punkte gehören zu ***elliptischen/hyperbolischen Kreisbüscheln*** und deren ***Isogonaltrajektorien*** (Loxadrome).
Deuten lassen sich die Vektoren als ***Infinitesimale Möbiustransformationen***.
Multiplikation mit $\sqrt{-1}$ ist die ***Polarität***.
Die ***Orthogonalität*** und die **LAGRANGE**sche Entwicklungsregel lassen sich nutzen.
Beispielsweise läßt sich damit die Lage von **4** ***Punkten*** (in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ einfach charakterisieren.

Links:

geogebra-book ***Sechseck-Netze*** ⟷ ***https://www.geogebra.org/m/z8SGNzgV***
geogebra-book ***Möbiusebene*** ⟷ ***https://www.geogebra.org/m/kCxvMbHb***