Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 8 - condición necesaria de punto de inflexión

1. Sea la función $f(x)=x^2-8\cdot\ln(x)$ definida en $f:1\rightarrow+\infty$. Obtener los puntos de inflexión y el valor de la ordenada de esos puntos.

La condición necesaria de punto de inflexión es anular la segunda derivada.

$$f(x)=x^2-8\cdot\ln(x) \rightarrow f'(x)=2x-\frac{8}{x} \rightarrow f''(x)=2+\frac{8}{x^2} \rightarrow f''(x)=\frac{2x^2+8}{x^2}$$

$f''(x)=0 \rightarrow x=\sqrt{-4}\notin\mathbb{R}$ → No existen candidatos a puntos de inflexión.

2. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)$, razonar si $x=4$ es un punto de inflexión.

Para tener un punto de inflexión en $x=4$, la segunda derivada debe anularse en $x=4$.

$$f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7) \rightarrow f''(x)=2(x-4)(x^2-8x+7)+(x-4)^2(2x-8)$$

$$f''(x)=(x-4)[2(x^2-8x+7)+(x-4)(2x-8)]=(x-4)(2x^2-16x+14+2x^2-16x+32)$$

$$f''(x)=(x-4)(4x^2-32x+46)=2(x-4)(2x^2-16x+23)$$

$f''(4)=0 \rightarrow x=4$ es uno de los candidatos a punto de inflexión

Evaluamos la tercera derivada en $x=4$. Y si el resultado es distinto de 0 , confirmaremos la existencia de un punto de inflexión en $x=4$.

$$f''(x)=2(x-4)(2x^2-16x+23) \rightarrow f'''(x)=2[(2x^2-16x+23)+(x-4)(4x-16)]$$

$$f'''(x)=2(2x^2-16x+23+4x^2-16x-16x+64)=2(6x^2-48x+87)=6(2x^2-16x+29)$$

$f'''(4)=-18\neq 0 \rightarrow x=4$ es un punto de inflexión

3. Obtener los puntos de inflexión de $g(x)=e^x-x$ **.**

La condición necesaria de punto de inflexión es segunda derivada nula.

Calculamos la primera derivada.

$$g(x)=e^x-x \quad \rightarrow \quad g'(x)=e^x-1$$

Calculamos la segunda derivada.

$$g''(x)=e^x \quad , \quad g''(x)=0$$

La segunda derivada no se anula para ningún valor real ya que la exponencial nunca se anula. Conclusión: la función no posee puntos de inflexión.

4. **Obtener la ecuación de la recta tangente a la función** $f(x)=\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)^2$ **en su punto de inflexión.**

El dominio de la función, al ser un cociente de polinomios, son todos los reales salvo el valor $x=7/9$ que anula al denominador.

Los puntos candidatos a puntos de inflexión anulan la segunda derivada.

$$f(x)=\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)^2$$

$$f'(x)=2\cdot\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)\cdot\left(\frac{(3\cdot(7-9x))-[(3x-2)\cdot(-9)]}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x)=2\cdot\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)\cdot\left(\frac{21-27x+27x-18}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x)=2\cdot\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)\cdot\left(\frac{3}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{18x-12}{(7-9x)^3}$$

$$f''(x)=\frac{18\cdot(7-9x)^3-(18x-12)\cdot 3\cdot(7-9x)^2\cdot(-9)}{(7-9x)^6}$$

$$f''(x)=\frac{(7-9x)^2\cdot[18\cdot(7-9x)-(18x-12)\cdot 3\cdot(-9)]}{(7-9x)^6}$$

$$f''(x)=\frac{126-162x-(18x-12)\cdot(-27)}{(7-9x)^4}$$

$$f''(x)=\frac{126-162x+486x-324}{(7-9x)^4}=\frac{324x-198}{(7-9x)^4}=\frac{18(18x-11)}{(7-9x)^4}$$

$$f''(x)=0\rightarrow\frac{18(18x-11)}{(7-9x)^4}=0\rightarrow 18(18x-11)=0\rightarrow x=\frac{11}{18}\simeq 0{,}61$$

Ya tenemos candidato a punto de inflexión. La función de partida está definida en toda la recta real salvo en $x=\frac{7}{9}\simeq 0{,}77$, valor que anula al denominador, por lo que evaluamos la segunda derivada en los siguientes intervalos.

$$(-\infty, \frac{11}{18}) \rightarrow f''(0)<0 \rightarrow f(x)\cap$$

$$(\frac{11}{18}, \frac{7}{9}) \rightarrow f''(0)>0 \rightarrow f(x)\cup$$

Por lo tanto, $x=\frac{11}{18}$ es punto de inflexión. Su imagen es:

$$f\left(\frac{11}{18}\right)=\left(\frac{3\cdot\left(\frac{11}{18}\right)-2}{7-9\cdot\left(\frac{11}{18}\right)}\right)^2=\left(\frac{\frac{-3}{18}}{\frac{27}{18}}\right)^2=\left(\frac{-3}{18}:\frac{27}{18}\right)^2=(\frac{54}{486})^2=(\frac{3}{27})^2=\frac{1}{81}$$

Las coordenadas del punto son $(\frac{11}{18}, \frac{1}{81})$. La pendiente de la recta tangente en este punto coincide con el valor de la derivada evaluada en la abscisa del punto:

$$f'(x)=\frac{18x-12}{(7-9x)^3}$$

$$f'(\frac{11}{18})=\frac{18\cdot\frac{11}{18}-12}{(7-9\cdot\frac{11}{18})^3}=\frac{-1}{(\frac{3}{2})^3}=\frac{-8}{27}$$

La ecuación punto-pendiente de la recta resulta:

$$\frac{y-\frac{1}{81}}{x-\frac{11}{18}}=\frac{-8}{27}$$

5. Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)e^x$.

a) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$.

b) Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de la función.

a) La condición necesaria de punto crítico es primera derivada nula.

$$f'(x)=1\cdot e^x+(x-a)e^x=e^x(1+x-a)$$

Si en $x=0$ hay punto crítico --> $f'(0)=0 \to e^0(1+0-a)=0 \to a=1$

b) La condición necesaria de punto de inflexión es segunda derivada igual a cero.

Si $a=1 \to f'(x)=e^x(x) \to f''(x)=e^x(x)+e^x\cdot 1=e^x(x+1)$

$f''(x)=0 \to e^x(x+1)=0 \to e^x=0$ o bien $x+1=0$

La exponencial nunca se anula, por lo que el único candidato a punto de inflexión es $x=-1$

Aplicamos condición suficiente de punto de inflexión, evaluando el candidato en la tercera derivada.

$$f''(x)=e^x(x+1) \to f'''(x)=e^x(x+1)+e^x\cdot 1=e^x(x+1+1)=e^x(x+2)$$

$f'''(-1)=e^{-1}(-1+2)>0 \to x=-1$ es punto de inflexión, donde la función pasa de cóncava a convexa.