La parabóla

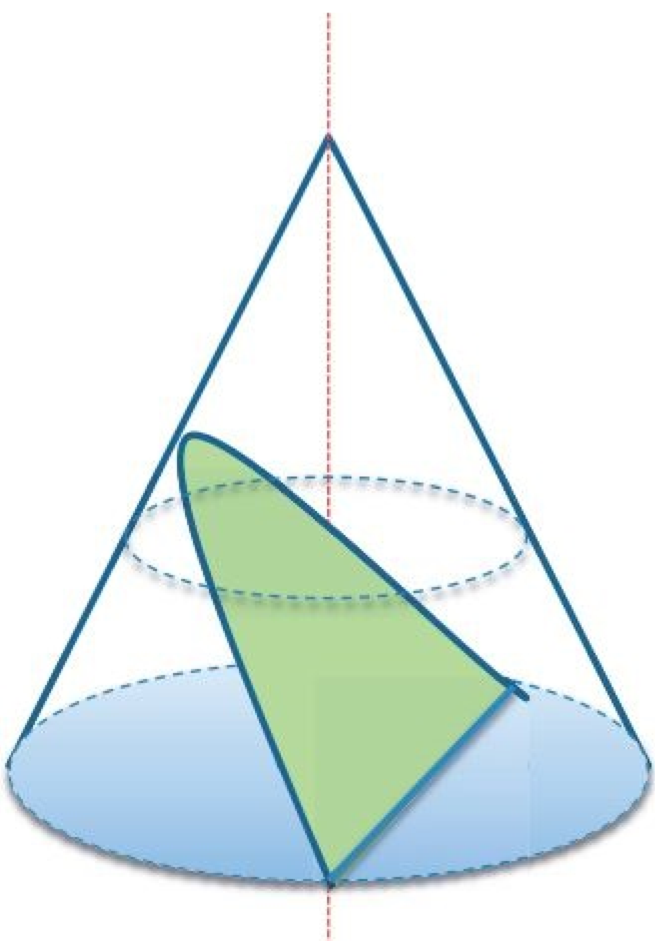
Norberto Alejandro Perez Colin
Profesor

Elementos y las ecuaciones de una parábola

La parábola y sus elementos

En el bloque anterior analizamos las secciones cónicas, que son curvas que se forman cuando un cono circular recto se intersecta con un plano, obteniendo con ello tres curvas, además de la circunferencia. Una de estas curvas es la parábola.

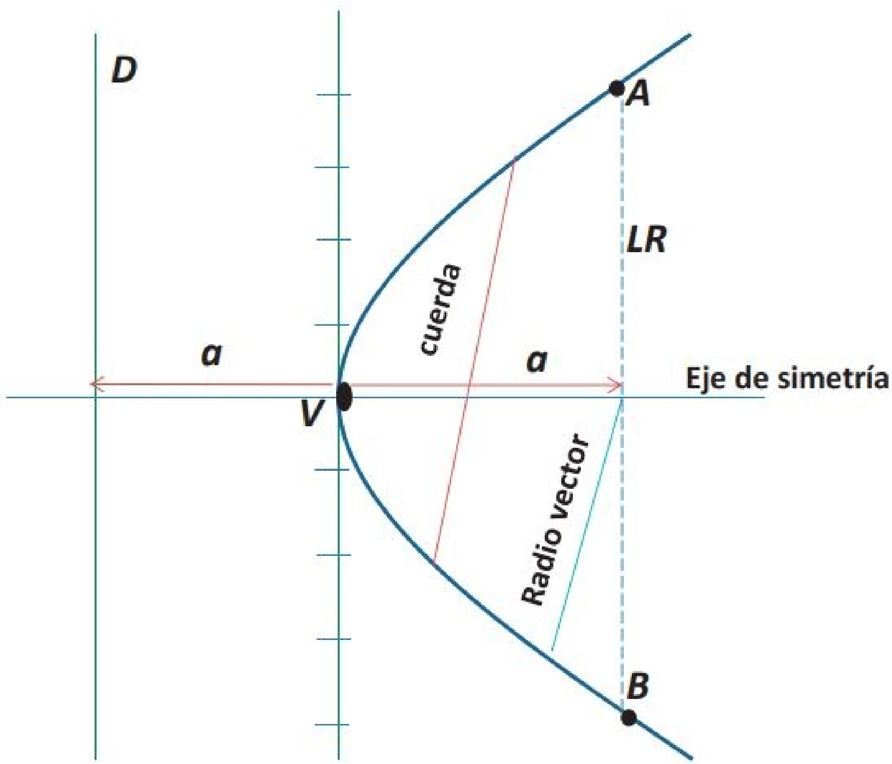
El corte es de la siguiente forma:



Parábola: es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano, cuya distancia de un punto fijo llamado *foco* es igual a la distancia a una recta fija, llamada *directriz*.

Elementos de la parábola:

- V = vértice, punto de intersección entre la parábola y el eje principal.
- F = foco, un punto fijo.
- D = directriz.
- a= parámetro, distancia entre el vértice y el foco o del vértice a la directriz.
- AB = LR = lado recto = |4a|, la distancia que existe entre dos puntos simétricos de la parábola.
- Eje de la parábola o de simetría, recta que pasa por el vértice y el foco.
- Radio vector, recta del eje de la parábola a uno de sus puntos.
- Cuerda, segmento de recta que une dos puntos de la de la parábola.



-

Hay dos características importantes de la parábola:

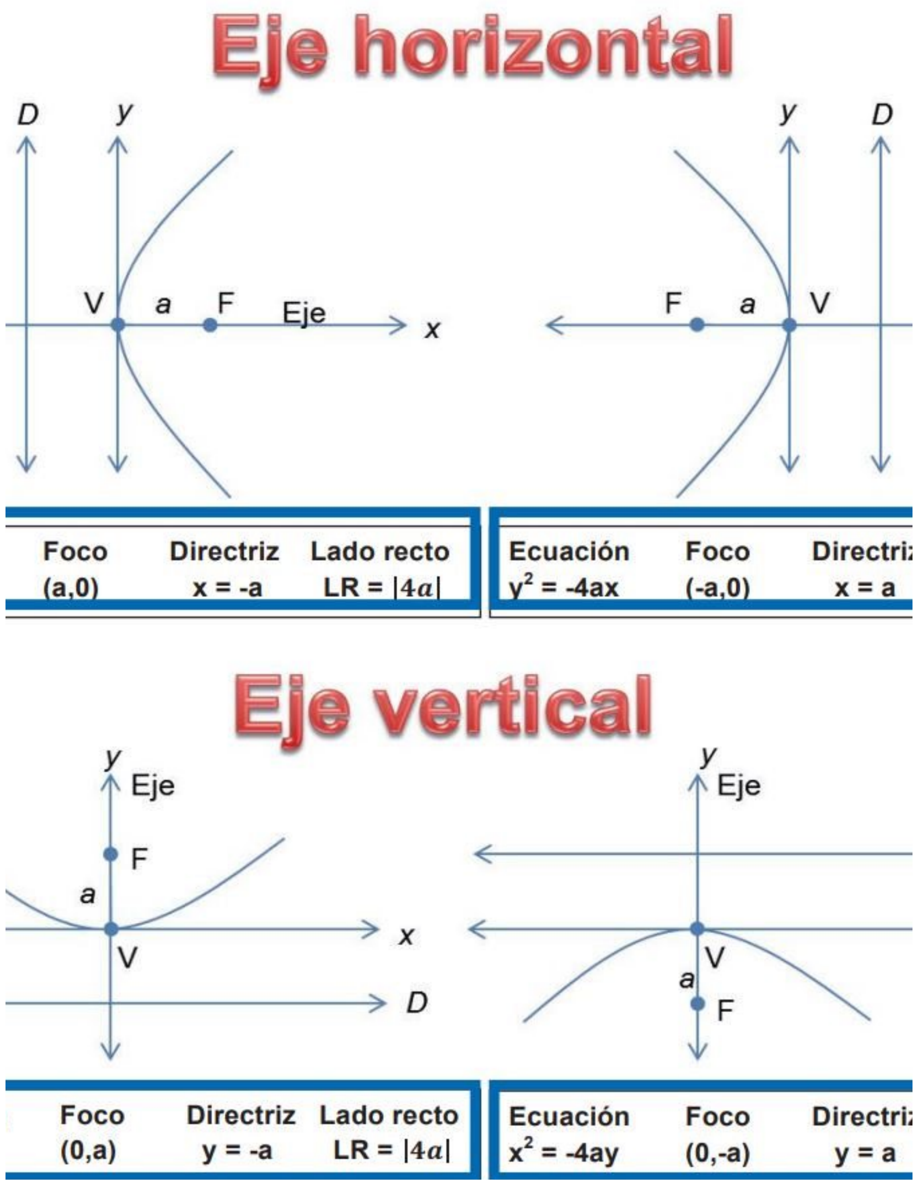
- La posición del eje determina la posición de la parábola; entonces, se generan parábolas horizontales, verticales o inclinadas.

- La parábola siempre es simétrica con respecto a su propio eje.

En la figura anterior, podemos describir la parábola como sigue:

- Pasa por el vértice y abre hacia el foco.
- Tiene la misma distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz, es decir, el mismo parámetro (*a*).
- El ancho focal o lado recto a la cuerda que pasa exactamente en el foco, que es perpendicular al eje de simetría y paralela a la directriz.
- Las coordenadas del vértice son V(0,0).

Ecuación de una parábola con vértice en el origen



Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la parábola y los elementos que se te solicitan, cuyo vértice está en el origen y su foco en $F(3,0)$

Solución

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia la derecha con foco $F(a,0)$ y tiene la forma:

Ecuación	Foco	Directriz
$y^2 = 4ax$	$(a,0)$	$x = -a$

a) El parámetro $a = 3$

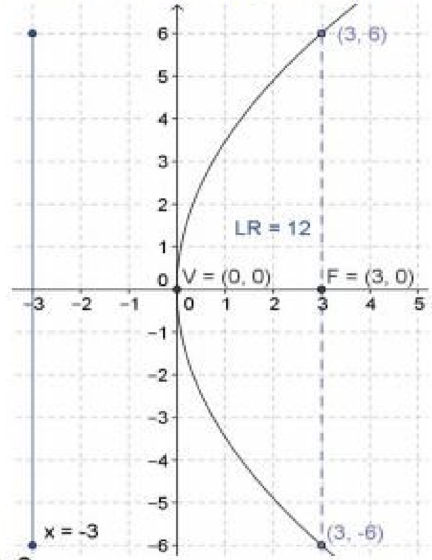
b) Su ecuación $y^2 = 4(3)x \qquad y^2 = 12x$

c) Su directriz está en $x = -(3) \qquad x = -3$

d) La longitud del lado recto $LR \quad LR = |4(3)| \quad LR = 12$

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Se toma el valor de la abscisa del foco, es decir, $x = 3$
$y^2 = 4ax \qquad y^2 = 4(3)(3) \qquad y^2 = 36 \qquad y = \pm\sqrt{36} \qquad y = \pm 6$
Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (3,6) y (3,-6)

f) Su gráfica



Ejemplo 2

Encuentra la ecuación de la parábola y los elementos que se te solicitan, cuyo vértice está en el origen y su foco en $F(0,-6)$

Solución

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia la abajo con foco $F(0,-a)$ y tiene la forma:

Ecuación	Foco	Directriz
$x^2 = -4ay$	$(0,-a)$	$y = a$

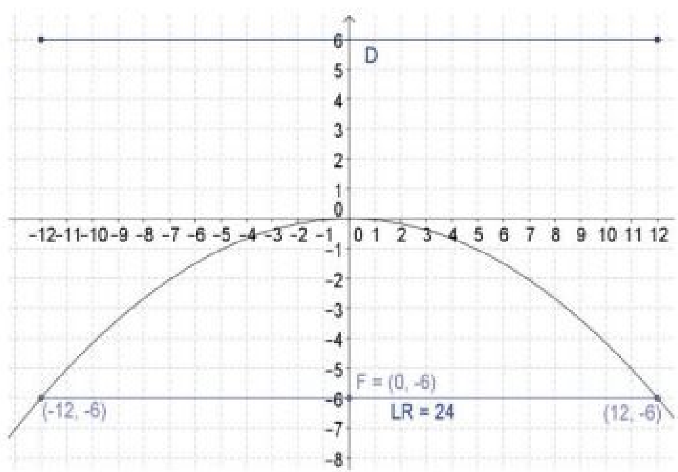
a) El parámetro $a = 6$

b) Su ecuación $x^2 = -4(6)y \qquad x^2 = -24y$

c) Su directriz está en $y = 6 \quad y = 6$

d) La longitud del lado recto LR
$LR = |4(-6)| \quad LR = |-24| \quad LR = 24$

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto:
Se toma el valor de la ordenada del foco, es decir, $y = 6$
$x^2 = -4ay \qquad x^2 = -4(-6)(6)$
$x^2 = 144 \qquad x = \pm\sqrt{144} \qquad x = \pm 12$
Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son:
(12,-6) y (-12,-6)



Ejemplo 3

Encuentra la ecuación de la parábola y los elementos que se te solicitan, cuya longitud del lado recto es 8 y su gráfica abre hacia la izquierda.

Solución

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia la izquierda:

Ecuación	Foco	Directriz
$y^2 = -4ax$	$(-a,0)$	$x = a$

Como la longitud del lado recto $LR = |4a| = 8$

despejamos a $\quad 8 = |4a| \quad a = \frac{8}{4} \quad a = 2$

a) El parámetro $a = 2$

b) Su ecuación $y^2 = -4(2)x \qquad y^2 = -8x$

c) Las coordenadas del foco son $F(-2,0)$

d) Su directriz está en $x = a \qquad x = 2$

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto:

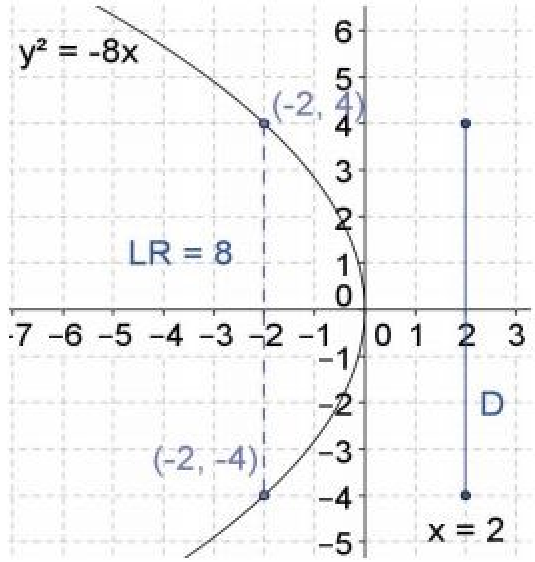
Se toma el valor de la abscisa del foco, es decir, $x = -2$

$y^2 = -4ax \qquad y^2 = -4(2)(-2)$

$y^2 = 16 \qquad y = \pm\sqrt{16} \qquad y = \pm 4$

Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (-2,4) y (-2,-4)

f) Su gráfica



Ejemplo 4

Dada la ecuación de la parábola $x^2 = 20y$, calcula sus elementos.

Solución

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia arriba y tiene la forma:

Ecuación	Foco	Directriz
$x^2 = 4ay$	$(0,a)$	$y = -a$

a) Su parámetro. Como la ecuación tiene la forma $x^2 = 4ay$, $4a = 20$.

Despejamos a: $a = \frac{20}{4} = 5$

El parámetro $a = 5$

b) Su foco está en $F(0,a)$ por lo que $F(0,5)$

c) Su directriz está en $y = -a \quad y = -5$

d) La longitud del lado recto

$LR = |4a| \quad LR = |4(5)| \quad LR = |20| \quad LR = 20$

Ejemplo 4

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.

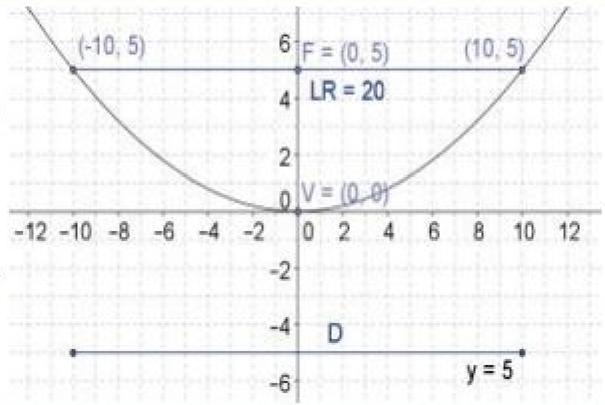
Se toma el valor de la ordenada del foco, es decir, $y = 5$

$x^2 = 4ay \quad x^2 = 4(5)(5) \quad x^2 = 100$

$x = \pm\sqrt{100} \quad x = \pm 10$

Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (10,5) y (-10,5)

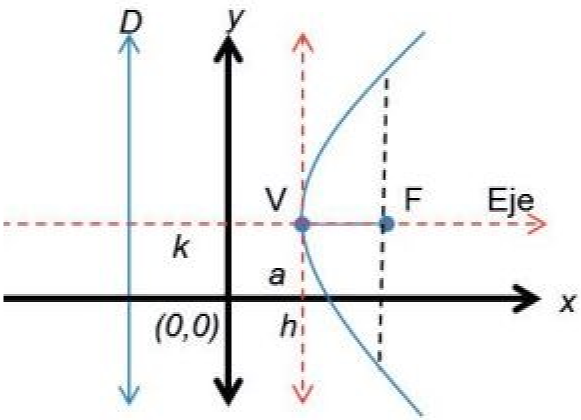
f) Su gráfica



Ecuación de una parábola con vértice fuera del origen

La ecuación de una parábola, ya sea horizontal o vertical, cuyo vértice está fuera del origen y que se encuentra en el punto *v(h,k)*, se obtiene reemplazando *x* por *(x – h)* y *y* por *(y – k)* en la ecuación básica de la parábola con vértice fuera del origen, al igual que se hizo con la circunferencia.

Eje horizontal

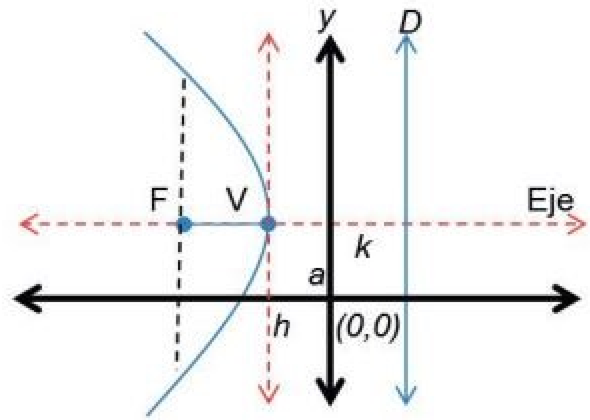


Ecuación: $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

Foco: $(h + a, k)$

Directriz: $x = h - a$

Lado recto: $LR = |4a|$



Ecuación: $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

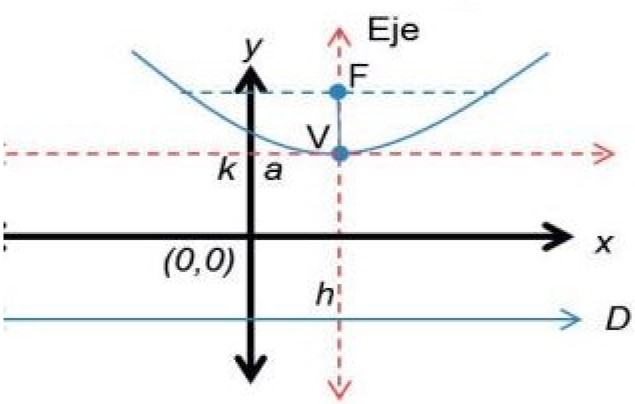
Foco: $(h + a, k)$

Si a es negativa

Directriz: $x = h - a$

Lado recto: $LR = |4a|$

Eje vertical

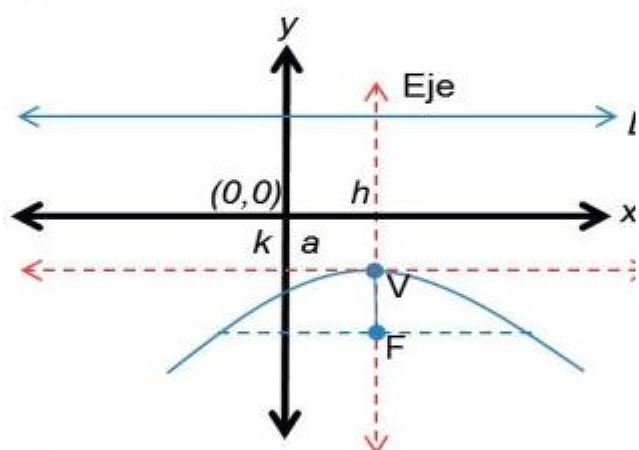


Ecuación: $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

Foco: $(h, k + a)$

Directriz: $y = k - a$

Lado recto: $LR = |4a|$



Ecuación: $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

Foco: $(h, k + a)$

Directriz: $y = k - a$

Lado recto: $LR = |4a|$

Por lo tanto, las ecuaciones de la parábola en su forma ordinaria con vértice fuera del origen son:

- $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ Si abre hacia la derecha o izquierda
- $(x - h) = 4a(y - k)$ Si abre hacia arriba o hacia abajo

Si desarrollamos, las ecuaciones de la parábola en su forma general con vértice fuera del origen son:

- $y^2 \pm by \pm cx \pm d = 0$ Si abre hacia la derecha o izquierda
- $x^2 \pm bx \pm cy \pm d = 0$ Si abre hacia arriba o abajo

Donde *b, c* y *d* son números reales.

Ejercicios de la vida cotidiana

Ejemplo 5

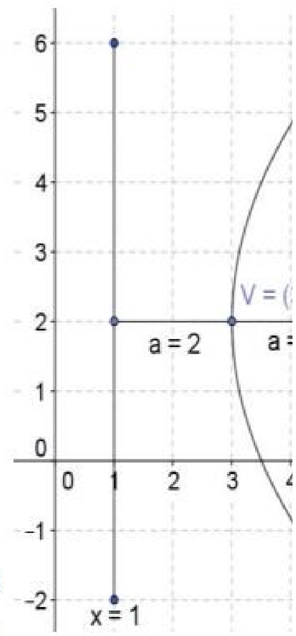
Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general,
todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (3, 2) y su foco en $F(5, 2$

Solución

Como el foco está después del vértice, la parábola abre hacia la de
condiciones:

Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	$(h+a, k)$	$x = h - a$	$LR = \|4a\|$

a) El parámetro: $a = \overline{VF} = 5 - 3 \quad a = 2$



b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(y-2)^2 = 4(2)(x-3) \qquad (y-2)^2 = 8(x-3)$

c) Desarrollamos para la ecuación en forma general:
$y^2 - 4y + 4 = 8x - 24 \qquad y^2 - 4y + 4 - 8x + 24 = 0$
Reduciendo términos: $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$

d) Su directriz está en $x = h - a \quad x = 3 - 2 \qquad x = 1$

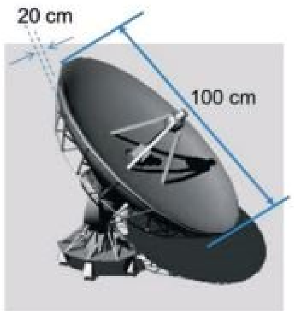
e) La longitud del lado recto $LR \quad LR = |4(2)| \quad LR = 8$

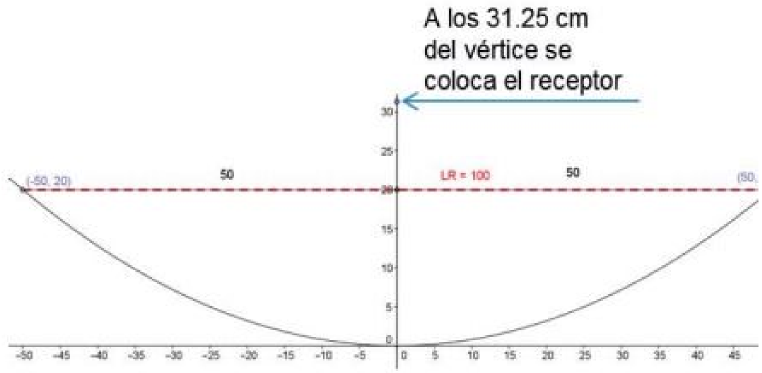
f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 8, existen 4 puntos arriba de él y 4 puntos debajo de él, por lo que se suma y se resta 4 a la ordenada del foco k, obteniendo $k + 4 = 2 + 4 = 6$ $k - 4 = 2 - 4 = -2$, por lo que las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (5,6) y (5,-2)

g) Su gráfica

Ejemplo 11

Calcula la posición del receptor de una antena para televisión que tiene forma paraboloide, con un diámetro de 100 cm y 20 cm de profundidad, si éste se coloca e foco de la antena.





Solución

La parábola generatriz se traza en un plano cartesiano, donde se coloca el vértice e origen y el eje de la parábola en el eje y.

De acuerdo con la figura, la ecuación de la parábola tiene la forma $x^2 = 4ay$.

Los valores son $x = 50$, $y = 20$.

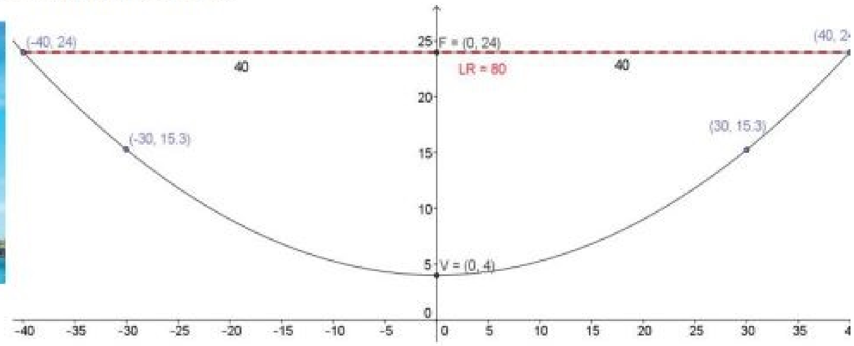
Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior tenemos:

$(50)^2 = 4a(20) \qquad 2500 = 80a \qquad a = \dfrac{2500}{80} \qquad a = 31.25$

El receptor se tendrá que colocar 31.25 cm arriba del vértice del eje de la parábola.

plo 12

ables de un puente colgante forman un arco parabólico como se muestra en . Los pilares que lo sostienen tienen una altura de 24 m sobre el nivel del puente separados 80 m. El punto más bajo del cable queda a 4 m sobre el ras del puen la la altura del cable a 30 m del centro.



ión

rábola generatriz se traza en un plano cartesiano, donde se coloca el vértice 4 del origen y el eje de la parábola en el eje y.

uerdo con la figura, la ecuación de la parábola tiene la forma $(x - h)^2 = 4a(y -$ $h = 0$ y $k = 4$. Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior tenemos:

$^2 = 4a(y - 4)$ $\qquad x^2 = 4a(y - 4)$

do x = 40 el valor de y = 24, y sustituyendo estos valores en la fórmula anterior:

$= 4a(24 - 4) \qquad 1600 = 4a(20) \qquad \frac{1600}{20} = 4a \qquad 4a = 80$

tituir el valor de 4a en la ecuación $x^2 = 4a(y - 4)$ queda:

$0(y - 4)$ y para saber la altura del cable a los 30 m del centro, hacemos $x = 30$

$= 80(y - 4) \qquad \frac{900}{80} = y - 4 \qquad 11.3 = y - 4 \qquad 11.3 + 4 = y \qquad y = 15.3$

ura del cable a los 30 metros del centro es de 15.3 m